

*Ecole Normale Supérieure de Lyon*  
*Université Claude Bernard Lyon 1*

STAGE 2006-2007  
**Maïté DUPUIS**  
M2 majeur Physique

---

## Mousses de spin en gravité quantique

---

Résumé:

La méthode des mousses de spin est une des approches à la problématique de la gravité quantique. En utilisant des techniques d'intégrale de chemin, on arrive à des résultats intéressants sur la dynamique de l'espace-temps au niveau quantique. Je présenterai de manière originale le modèle de Barrett-Crane, modèle de mousses de spin le plus étudié aujourd'hui pour en montrer les limites et quelles sont les solutions proposées par le groupe de Carlo Rovelli.

Mots Clefs : mousses de spin, réseau de spin, intégrale de chemin, contraintes, quantification, amplitude au vertex.

Centre de Physique Théorique  
Campus de Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 9  
<http://www.cpt.univ-mrs.fr>

Maître de stage: Carlo Rovelli

Avril - Juillet 2007

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	L'aspect cinématique de la gravité quantique . . . . .	4
1.2	L'aspect dynamique: deux voies . . . . .	4
1.3	Les mousses de spin . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Relativité générale et théorie BF</b>	<b>6</b>
2.1	Le formalisme de Palatini . . . . .	6
2.2	Le formalisme de Plebanski . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Modèle de Barrett-Crane à 4d</b>	<b>8</b>
3.1	Discrétisation à la Regge . . . . .	8
3.1.1	La triangulation $\Delta$ et son dual $\Delta^*$ . . . . .	8
3.1.2	Définition des variables discrètes . . . . .	8
3.1.3	Degrés de liberté de jauge . . . . .	10
3.1.4	Contraintes . . . . .	10
3.1.5	Signification géométrique des variables . . . . .	12
3.1.6	Dynamique . . . . .	12
3.1.7	Structure symplectique du bord . . . . .	14
3.2	Quantification . . . . .	14
3.2.1	Stratégie . . . . .	15
3.2.2	Espace de Hilbert cinématique . . . . .	15
3.3	Problèmes . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Comment modifier le modèle de Barrett-Crane?</b>	<b>17</b>
4.1	Traitement des contraintes . . . . .	17
4.2	Un nouvel entrelaceur . . . . .	17
4.3	Fonctions de partition . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Gravité quantique à boucles, réseaux de spin</b>	<b>20</b>
<b>B</b>	<b>Décomposition gauche-droite de <math>SO(4)</math></b>	<b>21</b>
<b>C</b>	<b>Algèbre de Lie d'un groupe de Lie</b>	<b>21</b>
	<b>References</b>	<b>23</b>

# 1 Introduction

$G$	$c^{-1}$	$\hbar$	théorie
0	0	0	Mécanique classique
1	0	0	Gravité de Newton
0	1	0	Relativité restreinte
0	0	1	Mécanique quantique
1	1	0	Relativité générale
0	1	1	Théorie quantique des champs
1	1	1	Gravité quantique?

Table 1: Constantes fondamentales et théories

La gravité quantique est supposée se manifester à un régime où il est nécessaire de considérer à la fois la constante de Planck  $\hbar$ , la vitesse de la lumière  $c$  et la constante universelle de Newton  $G$ . Par analyse dimensionnelle, on peut estimer les échelles caractéristiques de ces phénomènes :

$$E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \sim 10^{28} eV,$$

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-35} m.$$

L'énergie de Planck  $E_p$  est à comparer à l'énergie des futurs accélérateurs (qq  $10^{12} eV$ ); la longueur de Planck est à comparer aux échelles de distances intranucléaires. Aujourd'hui nous ne disposons d'aucun fait expérimental tombant explicitement et clairement dans le régime physique  $\hbar = c = G = 1$ . De plus, nous avons un cadre théorique qui décrit l'ensemble des phénomènes observés à ce jour donné par la juxtaposition de la relativité générale et du modèle standard.

On peut donc s'interroger: *Pourquoi la gravité quantique?* Je ne répondrai que très partiellement à cette question mais, plusieurs indices conduisent à penser que l'espace-temps est gouverné par les lois quantiques (trous noirs).

La relativité générale nous apprend essentiellement que la gravité trouve son origine dans la géométrie qui devient une quantité dynamique. La mécanique quantique nous apprend que toute quantité dy-

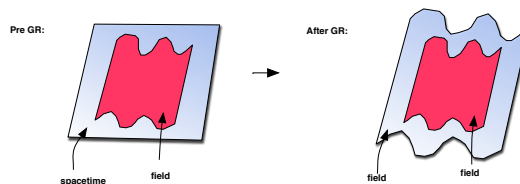


Figure 1: La géométrie est une quantité dynamique

namique doit être quantifiée. Naïvement, on s'attend à ce qu'une théorie de gravité quantique soit une théorie de géométrie quantique.

Il existe plusieurs approches à la problématique de la gravité quantique. Le plus simple pour commencer est d'essayer d'appliquer les principes de quantification que nous connaissons à la relativité générale: l'approche canonique à la Dirac et l'approche par intégrale de chemin due à Feynman. Il faut tout d'abord se rappeler que la relativité générale est un système (totalement) contraint (son Hamiltonien est nul et seules les contraintes contiennent sa dynamique) et que la présence de contraintes (de première classe) s'accompagne de symétries de jauge. L'existence de contraintes et de symétries de jauge complique la démarche de quantification. Et donc pour chacune de ces méthodes de quantification, les subtilités vont provenir du traitement des contraintes et des symétries de jauge.

## 1.1 L'aspect cinématique de la gravité quantique

La première approche de quantification étudiée a été l'approche canonique où, dès la fin des années 1980, Carlo Rovelli et Lee Smolin entre autres ont cherché à appliquer le programme de quantification de Dirac à la relativité générale. Cela a donné ce qu'on appelle aujourd'hui la *gravité quantique à boucles*. On regarde une hypersurface - notre espace - évoluant dans le temps et créant ainsi notre espace-temps. La gravité quantique a permis de définir un espace de Hilbert de la géométrie de l'hypersurface. La

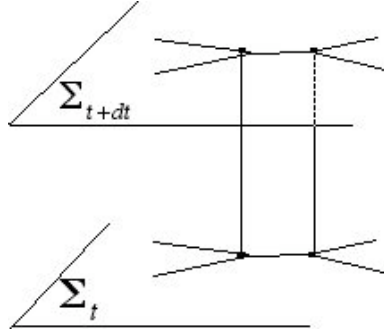


Figure 2: Décomposition 3+1 de l'espace-temps: hypersurface évoluant dans le temps

géométrie est quantifiée et vient par quanta discrets d'aire et de volume. Dans cet espace d'états, on peut diagonaliser certains des opérateurs qui décrivent la géométrie (comme l'opérateur représentant l'aire d'une surface  $\Sigma$ :  $A(\Sigma)$ ); on trouve alors une base d'états formée de *réseaux de spins*.

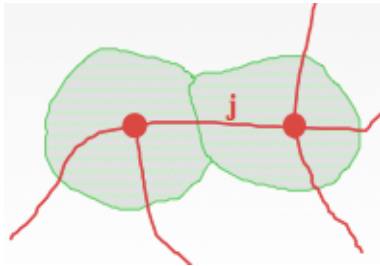


Figure 3: Réseau de spins et quanta de volume

Je donne quelques définitions, résultats sur les réseaux de spin qui nous seront utiles pour la suite dans l'appendice A.

## 1.2 L'aspect dynamique: deux voies

La dynamique de ces états quantiques reste toujours mal comprise. Plusieurs directions de recherche sont explorées: approches canoniques ([5], [6]), ou approches covariantes. Je vais me concentrer dans cet exposé sur une approche covariante de quantification par intégrale de chemin.

## 1.3 Les mousses de spin

Je vais maintenant m'intéresser aux modèles de mousses de spin qui utilisent les techniques d'intégrale de chemin. De manière naïve, l'intégrale de chemin de la gravité quantique s'écrit

$$\int [\mathcal{D}g] e^{iS[g]}$$

où  $S[g]$  désigne l'action de la gravité et l'intégrale porte sur les métriques d'espace-temps  $g$ . La philosophie des mousses de spin consiste à donner un sens à ces intégrales en utilisant des discrétisations de l'espace-temps.

Il n'est pas du tout clair que discrétiser pour quantifier soit une technique payante qui permette de capturer toute la physique du problème. Deuxièmement, il s'agit d'une rupture méthodologique avec la philosophie de la gravité quantique à boucles, où la discrétisation n'est pas introduite à la main mais prédite. Ces deux remarques sont liées: c'est précisément parce que la gravité à boucles prédit une structure discrète de l'espace-temps que les méthodes d'intégrales de chemin discrètes peuvent être considérées comme raisonnables. L'objectif est à terme de reprendre contact avec la gravité à boucles en montrant explicitement que les modèles de mousses de spin résolvent les équations de Wheeler-DeWitt. (Dans la théorie de la gravité quantique à boucle, deux des trois équations de Wheeler-DeWitt ont été résolues - voir appendice A)

Une mousse de spin ("spinfoam") est en quelque sorte un diagramme de Feynman pour l'espace-temps codant les informations sur les interactions entre les états de réseaux de spin. Les amplitudes des faces et des liens peuvent être assimilées aux propagateurs. Pour définir ces amplitudes, on associe des représentations du groupe (SO(4) dans le cas de la gravité euclidienne à 4d; SO(3,1) dans le cas Lorentzien 4d) aux faces de la mousse de spin et des entrelaceurs aux côtés. Les vertex/points représentent les "événements" dans l'espace-temps; ce sont les lieux des interactions, de la dynamique. L'élément essentiel est donc l'amplitude au vertex qui code toute l'information sur les interactions et le contenu dynamique de la théorie.

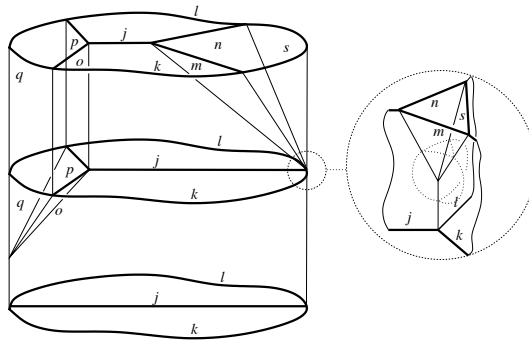


Figure 4: Mousse de spin ("spinfoam")

Le modèle de mousse de spin le plus étudié est celui de Barrett -Crane. Ce modèle est généralement présenté comme une quantification d'une théorie BF discrétisée qu'on contraint ensuite; cette idée est développée de manière un peu plus précise dans la partie 2. Cependant, une autre idée est de prendre comme point de départ une version discrète de la relativité générale; une telle formulation du modèle de Barrett-Crane n'existe pas dans la littérature. J'en donne une présentation originale dans la partie 3 en utilisant la formulation discrète de la relativité générale de Regge, en me restreignant au cas euclidien 4d. On peut alors facilement pointer les problèmes de construction de ce modèle et en trouver des corrections. C'est ce que je développerai dans la partie 4 en exposant les modifications au modèle de Barrett-Crane qu'étudient en ce moment Carlo Rovelli et son groupe. Mon travail lors de ce stage a été essentiellement de comprendre le modèle de Barrett-Crane, sa construction, ses limites; puis de reformuler ce modèle pour en arriver où en est le groupe de gravité quantique du Centre de Physique Théorique de Marseille. (voir [27] et article à paraître: Spinfoam vertex and loop gravity; de Jonathan Engle, Roberto Pereira et Carlo Rovelli)

## 2 Relativité générale et théorie BF

### 2.1 Le formalisme de Palatini

C'est une formulation de la relativité générale qui est classiquement équivalente à la formulation d'Einstein mais qui utilise un autre ensemble de variables. On s'intéresse au cas euclidien sans constante cosmologique.

On considère une variété  $\mathcal{M}$  de dimension 4 et un espace-vectoriel fixé  $V$  de dimension 4 muni de la métrique plate  $\eta_{IJ} = (+, +, +, +)$  euclidienne. Cet espace  $V$  est appelé *espace interne* et les indices  $I, J, K, \dots$  désignent les indices internes. Les variables qui rentrent dans la formulation de Palatini sont  $(e_\mu^I, \omega_\mu^{IJ})$ :

- La première variable est une tétrade  $e_\mu^I$ , 1-forme à valeur dans  $V$ . En tout point  $p \in \mathcal{M}$ ,  $e_\mu^I(p)$  fournit une application de l'espace  $T_p\mathcal{M}$  tangent à  $\mathcal{M}$  en  $p$  vers  $V$ . Si on suppose que cette application est inversible en tout point alors on peut construire une métrique non-dégénérée à partir de cette forme par

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^I \eta_{IJ} e_\nu^J \quad (2.1)$$

On peut remarquer que des champs de tétrades différents reliés par une rotation de Lorentz locale  $\Lambda_J^I(x)$  conduisent à la même métrique

$$\Lambda_I^K e_\mu^I \eta_{KL} \Lambda_J^L e_\nu^J = e_\mu^I \eta_{IJ} e_\nu^J = g_{\mu\nu}$$

ce qui introduit des degrés de liberté supplémentaires. On s'attend à ce que ces derniers se traduisent en termes de degrés de liberté de jauge.

- La seconde variable est une connection de Lorentz  $\omega_\mu^{IJ}$  à valeur dans l'algèbre de Lie de Lorentz  $\mathfrak{so}(4)$ . Cette connection définit une dérivée covariante  $\mathcal{D}_\mu$  agissant sur les indices internes:

$$\mathcal{D}_\mu t_I = \partial_\mu t_I + \omega_{\mu I}^J t_J$$

On peut alors définir la 2-forme de courbure associée à  $\omega$

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[\omega] = \partial_\mu \omega_\nu^{IJ} - \partial_\nu \omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{IK} \omega_\nu^{KJ} - \omega_\nu^{IK} \omega_\mu^{KJ}$$

L'action de Palatini est définie à partir de ces deux champs  $e_\mu^I$  et  $\omega_\mu^{IJ}$ :

$$S_P[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}^{KL}[\omega] \quad (2.2)$$

$\epsilon_{IJKL}$  tenseur complètement anti-symétrique ( $\epsilon_{0123} = +1$ );  $\tilde{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}$  densité de tenseur complètement anti-symétrique ( $\tilde{\epsilon}^{txyz} = +1$ ) En introduisant les formes différentielles,

$$e^I = e_\mu^I dx^\mu,$$

$$\omega^{IJ} = \omega_\mu^{IJ} dx^\mu,$$

et la 2-forme courbure

$$F^{IJ} = d_\omega \omega,$$

où  $d_\omega$  désigne la dérivée covariante extérieure associée à la connection  $\omega$ , on peut réécrire l'action de Palatini sous la forme:

$$S_P[e, \omega] = \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) \quad (2.3)$$

Cette action est une action pour la relativité générale: si  $e$  et  $\omega$  vérifient les équations du mouvement de l'action de Palatini (2.3) et si  $e$  est inversible, alors la métrique définie par (2.1) satisfait l'équation d'Einstein de la gravité pure.

## 2.2 Le formalisme de Plebanski

C'est une réécriture de l'action de Palatini qui permet de présenter la relativité générale comme une théorie BF contrainte.

**Théorie BF** C'est une théorie topologique; elle est décrite par une action de la forme

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}} B^{IJ} \wedge F_{IJ} = \int_{\mathcal{M}} \text{tr}(B \wedge F)$$

**Relativité générale** On s'intéresse à une action de la forme  $S_{BF}$  et on impose en plus à la 2-forme  $B$  d'être de la forme

$$B^{IJ} = \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L$$

On peut introduire cette contrainte explicitement dans l'action à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Pour cela, on montre qu'une condition nécessaire pour que  $B$  satisfasse  $B^{IJ} = \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L$  est que

$$B^{IJ} \wedge B^{KL} = 0$$

condition qu'on appelle *condition de simplicité*. On définit alors l'action de Plebanski

$$S = S(\omega, B, \phi) = \int_{\mathcal{M}} \left[ B^{IJ} \wedge F_{IJ}(\omega) - \frac{1}{2} \phi_{IJKL} B^{KL} \wedge B^{IJ} \right] \quad (2.4)$$

où

- la connection  $\omega$  est une 1-forme à valeur dans l'algèbre  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $\omega = \omega_{\mu}^{IJ} \tau_{IJ} dx^{\mu}$  avec  $\tau_{IJ}$  les générateurs de  $\mathfrak{so}(4)$ .
- $F = d\omega$ , une 2-forme, est la courbure correspondante.
- $B = B_{\mu\nu}^{IJ} \tau_{IJ} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$  est une 2-forme à valeur dans  $\mathfrak{so}(4)$ .
- $\phi_{IJKL}$  est un multiplicateur de Lagrange.

La variation de l'action par rapport à  $\phi_{IJKL}$  donne la contrainte

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} \rightarrow B^{IJ} \wedge B^{KL} = e \epsilon^{IJKL}$$

avec  $e = \frac{1}{4!} \epsilon_{IJKL} B^{IJ} \wedge B^{KL}$ . Quand  $e \neq 0$ , cette contrainte est équivalente à

$$\epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\lambda}^{KL} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \tilde{e} \quad (2.5)$$

où  $e = \frac{1}{4!} \tilde{e} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \wedge dx^{\lambda}$ . Cette contrainte est vérifiée si et seulement si il existe une tétrade  $e^I = e^I_{\mu} dx^{\mu}$  telle que l'une des équations suivantes est vérifiée:

$$\begin{aligned} I. \quad & B^{IJ} = \pm e^I \wedge e^J \\ II. \quad & B^{IJ} = \pm \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}_{KL} e^K \wedge e^L \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si nous restreignons le champs  $B$  à toujours appartenir au secteur II. (avec le signe +) (ce qui est toujours possible classiquement) et que nous substituons  $B$  par son expression en fonction de la tétrade dans l'action, on obtient  $S = \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}$  qui est bien l'action de la relativité générale dans le formalisme de Palatini.

Pour passer au modèle de Barrett-Crane, qui se veut une théorie quantique de la gravité, il faut traduire ces contraintes, qui font passer de la théorie BF à la relativité générale, au niveau quantique. Je ne développerai pas plus cette idée. Je vais dans la partie suivante repartir de la relativité générale discrétisée à la Regge.

### 3 Modèle de Barrett-Crane à 4d

Je commence par présenter le calcul à la Regge standard pour ensuite formuler le modèle de Barrett-Crane.

La première étape est de discrétiser la variété: nous considérerons pour cela une triangulation fixe de l'espace-temps.

#### 3.1 Discrétisation à la Regge

L'idée du physicien italien Tulio Regge, introduite dans les années soixantes, est d'approximer la relativité générale euclidienne grâce à une théorie sur réseau discrète. La relativité générale euclidienne décrit une variété Riemannienne  $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$  où  $\mathcal{M}$  est notre variété différentiable et où on a noté  $d_{\mathcal{M}}$  sa métrique. La variété Riemannienne peut être approximée par une variété plate par morceaux  $(\Delta, d_{\Delta})$  formée de simplexes (de métrique plate) collés ensemble.  $\Delta$  désigne la triangulation et  $d_{\Delta}$  est sa métrique qui est déterminée par la taille des simplexes individuels. Pour un suffisamment grand nombre de simplexes, on peut approximer suffisamment bien toute variété de Riemann.

##### 3.1.1 La triangulation $\Delta$ et son dual $\Delta^*$

On considère une triangulation  $\Delta$  4d de notre variété  $\mathcal{M}$ . Elle est formée de 4 simplexes, tétraèdres, triangles, segments orientés et points. On utilisera de manière équivalente la triangulation ou son dual ( $\Delta^*$ ). La métrique est plate à l'intérieur de chaque 4-simplex  $v$ . Tous les tétraèdres, triangles et segments

triangulation $\Delta$	notations	dual $\Delta^*$
4-simplex	$v$	<b>vertex</b>
tétraèdre	t ou e	<b>côté</b>
triangle	f	<b>face</b>
segment		région 3d
point		région 4d

Table 2: triangulation  $\Delta$  et son dual  $\Delta^*$

sont plats (droits).

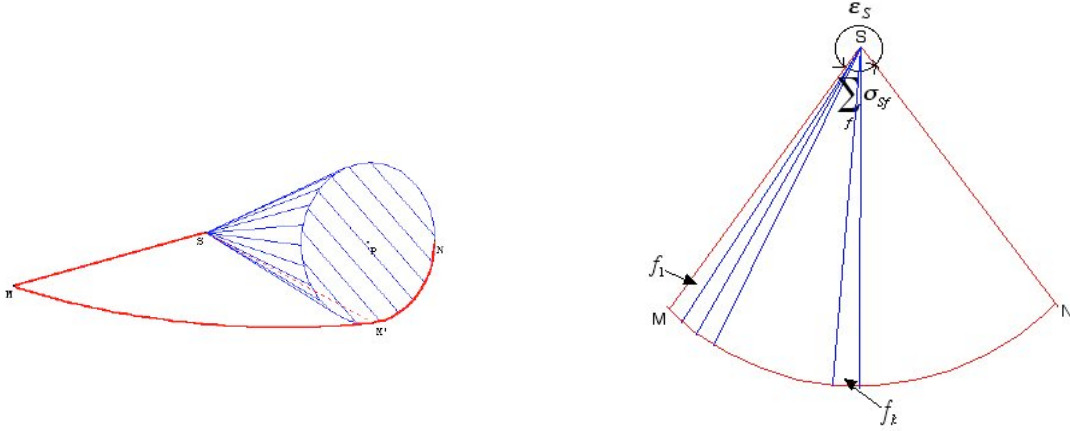
##### 3.1.2 Définition des variables discrètes

**L'angle de déficit** Le modèle de Regge donne une approximation discrète de la relativité générale à partir d'un formalisme du second ordre, qui fait intervenir la métrique. Regge utilise comme variables les longueurs des segments de  $\Delta$  qui fournissent la même information que le tenseur métrique. Dans ce formalisme discret, la courbure est concentrée sur les triangles en 4D. Cela est dû au fait que la somme des angles dièdres de tous les 4-simplexes autour d'un triangle peut-être différente de  $2\pi$ . Cette différence donne l'angle de déficit. La courbure de l'espace-temps peut s'exprimer en terme des angles de déficit. En 2d, une surface peut être approximée par une surface obtenue en collant des triangles (plats) ensemble côte à côte: la courbure est alors concentrée aux points de rencontre des triangles. On note  $n$  un tel point et  $\sigma_{fn}$  l'angle interne du triangle  $f$  au point  $n$ . L'angle de déficit,  $\epsilon_n$ , associé au point  $n$  est alors donné par:

$$\sum_f \sigma_{fn} = 2\pi - \epsilon_n$$

Cela se visualise facilement dans le cas d'un cône. On a représenté la surface d'un cône de sommet  $S$  obtenue par déroulement (l'angle de déficit au point  $S$  est noté  $\epsilon_S$ ):





Les angles de déficit peuvent être calculés directement à partir des différentes longueurs des segments de la triangulation, ce qui est équivalent à dire que le tenseur de courbure de Riemann peut être obtenu à partir du tenseur métrique. Regge a montré que les équations du vide d'Einstein peuvent se reformuler à partir des angles de déficit pour une variété sans bord. Cependant Regge a ignoré les bords pour définir son action. Au niveau quantique, les termes de bord sont importants: ils sont essentiels pour que les amplitudes de mécanique quantique satisfassent la loi de composition correcte et pour que ces amplitudes aient la bonne limite classique. L'intégrale définissant l'action pour une décomposition simpliciale (triangulation en simplexes) de l'espace-temps devra donc être sur les longueurs des côtés de l'intérieur du réseau en gardant fixes les longueurs des côtés du bord. On vient de voir que la variation de l'action de Regge par rapport à la longueur des côtés de la triangulation donne l'analogue des équations d'Einstein pour un réseau simplicial et donc toute autre action ne pourra différer de celle de Regge que par des termes de bord.

**Choix des variables** Pour la gravité quantique, le formalisme du premier ordre de la relativité générale semble mieux adapté (gravité quantique à boucles...). Quelle variable peut-on prendre comme approximation discrète du champ gravitationnel  $e$ ?

- En 4d, tous les triangles  $f$  concentrent de la courbure. Chaque triangle est entouré par des 4-simplexes  $v_1^f, \dots, v_n^f$  qui sont séparés par les tétraèdres qui ont le triangle  $f$  en commun. On peut toujours choisir les coordonnées cartésiennes recouvrant un ou deux 4-simplexes adjacents (chaque simplexe est "plat") mais en général, on ne peut pas définir de manière continue un système de coordonnées cartésiennes qui couvre l'ensemble  $\{v_1^f, \dots, v_n^f\}$  pour un triangle  $f$  donné. On choisit donc de définir un système de coordonnées  $\{x^\mu\}$  pour chaque tétraèdre et un système de coordonnées  $\{\tilde{x}^\mu\}$  pour chaque 4-simplexe  $v$ .

Pour chaque tétraèdre, on définit

$$e(t) = e_\mu^I(t) v_I dx^\mu \quad (3.1)$$

où  $v_I$  est une base de  $V$  fixée.  $e(t)$  est notre première variable, approximation discrète du champ gravitationnel. On peut aussi la définir sur le 4-simplexe  $v$  en entier:

$$e(v) = e_\mu^I(v) v_I d\tilde{x}^\mu \quad (3.2)$$

Un 4-simplexe  $v$  est constitué de cinq tétraèdres  $t_A$ ,  $A = 1 \dots 5$ . Les cinq variables  $e(t_A)$  ne sont pas indépendantes car  $v$  est plat.

- Le simplexe  $v$  est plat; chaque  $e(t_A) \in v$  peut-être relié à  $e(v)$  par une matrice de rotation  $\text{SO}(4)$  dans  $\mathbb{R}^4$ , notée  $V_{vt_A}$

$$e_\mu^I(v) = (V_{vt_A})^I_J e_\mu^J(t_A) \quad (3.3)$$

- Pour chaque tétraèdre  $t$ , on considère la deux-forme, bivecteur:  $B(t) = *(e(t) \wedge e(t)) = B_{\mu\nu}^{IJ}(t)v_I v_J dx^\mu \wedge dx^\nu$  où  $B_{\mu\nu}^{IJ} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}e_\mu^K(t)e_\nu^L$ . On associe alors le bivecteur  $B_f(t)$  au triangle  $f$  du tétraèdre  $t$ , où

$$B_f(t) = \int_f B(t) \quad (3.4)$$

- On s'intéresse à une triangulation  $\Delta$  qui a un bord  $\partial\Delta$ . Ce bord est une variété 3d triangulé par des tétraèdres qui sont collés ensemble le long d'un triangle. Chaque tétraèdre du bord n'appartient qu'à un seul 4-simplexe de la triangulation et chaque triangle du bord n'est commun qu'à deux tétraèdres du bord. On veut maintenant définir les variables du bord qui donnent le champ gravitationnel du bord dans la limite classique.

- La première variable est  $B_f(t)$  où  $f$  est un triangle du bord et  $t$  un tétraèdre du bord. Pour un triangle  $f$  donné, il y a seulement deux tétraèdres  $t$  et  $t'$  qui ont ce triangle en commun. On peut donc introduire la notation  $B_f^R$  et  $B_f^L = B_{f^{-1}}^R$  pour  $B_f(t)$  et  $B_f(t')$  respectivement.
- Sur l'ensemble de la triangulation, la transformation pour passer de  $e(t_A)$  à  $e(t_B)$  où  $t_A$  et  $t_B$  sont deux tétraèdres d'un 4-simplexe  $v$  est donnée par

$$e(t_A) = U_{t_A t_B}(v)e(t_B) \quad (3.5)$$

avec

$$U_{t_A t_B}(v) = V_{t_A v} V_{v t_B} \quad (3.6)$$

où  $V_{v t_A} \equiv V_{t_B v}^{-1}$ . Comme un triangle  $f$  est commun à plusieurs tétraèdres  $t_1, t_2, t_3, \dots$ . Les bivecteurs du triangle  $f$  associés aux différents tétraèdres sont reliés

$$B_f^{IJ}(t_1) = U_{t_1 t_2 K}^I(v_{12}) U_{t_1 t_2 L}^J(v_{12}) B_f^{KL}(t_2) \quad (3.7)$$

où on a utilisé l'équation (3.5) et le fait que  $\epsilon_{IJKL} U_P^I U_Q^J U_M^K U_N^L = \epsilon_{PQMN}$  ( $\det(U) = 1$ ) et que  $UU^T = \text{id}$ . En particulier, on définit la deuxième variable de bord par l'élément de groupe:  $U_f = U_{t' t}$  où  $t$  et  $t'$  sont les deux tétraèdres de bord qui ont le triangle de bord  $f$  en commun. Alors en utilisant (3.5) et en se rappelant que  $UU^T = \text{id}$ , on obtient la relation

$$U_f B_f^R U_f^{-1} = B_f^L \quad (3.8)$$

### 3.1.3 Degrés de liberté de jauge

Au niveau continu, on a vu que dans le formalisme de Palatini des champs de tétrades reliés par une rotation de Lorentz locale  $\Lambda_f^I(x)$  conduisent à la même métrique  $g_{\mu\nu}$ . Au niveau des variables discrètes, cet arbitraire est conservé et on a une transformation de jauge  $\text{SO}(4)$

$$\begin{aligned} e(t) &\longrightarrow \Lambda(t)e(t) \\ e(v) &\longrightarrow \Lambda(v)e(v) \\ V_{vt} &\longrightarrow \Lambda(v)V_{vt}\Lambda(t)^{-1} \\ U_{tt'} &\longrightarrow \Lambda(t)U_{tt'}\Lambda(t')^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\Lambda(t), \Lambda(v) \in \text{SO}(4)$  sont les paramètres de jauge associés avec le choix des bases des tétraèdres et des 4-simplexes.

### 3.1.4 Contraintes

L'objectif est de construire une théorie de la relativité générale classique discrétisée à partir de l'ensemble des variables que l'on vient de définir:

- les variables de "l'intérieur" de la triangulation: -  $B_f(t)$ , bivecteur associé à chaque triangle  $f \in \Delta$  d'un tétraèdre  $t$ ; et  $V_{vt} \in \text{SO}(4)$  élément du groupe associé à chaque tétraèdre  $t \in \Delta$  d'un 4-simplexe -. Les quantités  $B_f^{IJ}(t)$  et  $V_{vt}$  peuvent être considérées comme une discrétisation des champs de gravitation continus  $B^{ij}$  et  $\omega^{IJ}$  qui définissent la relativité générale dans le formalisme de Plebanski.

- les variables de bord:  $B_f^R$  et  $B_f^L$  associées à un triangle de bord  $f$  et l'élément du groupe  $U_f \in \text{SO}(4)$ .

Ces variables ne sont pas indépendantes; elles sont reliées par des contraintes. On distingue les contraintes cinématiques qui agissent séparément sur chaque tétraèdre et donc en particulier pour les tétraèdres de bord, elles n'agissent que sur les variables de bords; et les contraintes dynamiques. Ces dernières agissent à la fois sur les variables de bord et de l'intérieur.

### Contraintes cinématiques

- A partir du théorème de Stokes, on montre facilement que les quatre bivecteurs  $B_{f_1}^{IJ}(t) \cdots B_{f_4}^{IJ}(t)$  associés aux quatre triangles d'un tétraèdre  $t$  satisfont la relation de fermeture

$$B_{f_1}^{IJ}(t) + B_{f_2}^{IJ}(t) + B_{f_3}^{IJ}(t) + B_{f_4}^{IJ}(t) = \int_{\partial t} B^{IJ}(t) = \int_t \underbrace{dB^{IJ}(t)}_{=0 \text{ sur } t} = 0 \quad (3.10)$$

- De plus, on rappelle que pour passer de la théorie BF à la relativité générale, la 2-forme  $B^{IJ}$  doit vérifier la contrainte de simplicité  $\epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\lambda}^{KL} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \tilde{e}$ . On peut la réécrire sous la forme d'un système de trois équations:

$$\begin{aligned} \epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\mu\nu}^{KL} &= 0 \\ \epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\mu\rho}^{KL} &= 0 \\ \epsilon_{IJKL} B_{\mu\nu}^{IJ} B_{\rho\lambda}^{KL} &= \pm \tilde{e} \text{ où les indices } \mu, \nu, \rho, \lambda \text{ sont tous différents.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comme la 2-forme  $B^{IJ}(t)$  est définie à partir du champ de tétrade, elle doit satisfaire ce système d'équation. Les indices libres de ces équations de contraintes sont les indices d'espace-temps qui peuvent être saturés en intégrant de toutes les manières possibles sur les faces du 4-simplexe. On peut donc montrer que les deux premières équations du système (3.11) impliquent:

- pour chaque triangle  $f$ ,

$$\epsilon_{IJKL} B_f^{IJ}(t) B_f^{KL}(t) = 0 \quad (3.12)$$

- pour un couple de triangles  $f$  et  $f'$  ayant un segment commun,

$$\epsilon_{IJKL} B_f^{IJ}(t) B_{f'}^{KL}(t) = 0 \quad (3.13)$$

La dernière équation du système (3.11) donne le cas où les deux triangles  $f$  et  $f'$  du même 4-simplexe ont seulement un point en commun. Nous reviendrons sur cette contrainte.

Les trois contraintes (3.10), (3.12), (3.14) sont les contraintes cinématiques.

**Contraintes dynamiques** Reconsidérons la dernière équation de (3.11). Elle implique pour deux triangles  $f$  et  $f'$  du même 4-simplexe qui ont seulement un point en commun

$$\epsilon_{IJKL} B_f^{IJ}(t) B_{f'}^{KL}(t) = V(f, f') \quad \text{où} \quad V(f, f') = \int_{x \in f, y \in f'} \tilde{e} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad (3.14)$$

Cette contrainte force les bivecteurs, qui étaient jusqu'à maintenant définis pour chaque tétraèdre indépendamment, à appartenir au même 4-simplexe (plat). Mais on peut montrer que si la relation (3.6):  $U_{t_A t_B(v)} = V_{t_A v} V_{v t_B}$  est vérifiée et que les contraintes cinématiques sont satisfaites, alors cette dernière contrainte est automatiquement satisfaite. On prend donc pour contrainte dynamique

$$U_{t_A t_B(v)} = V_{t_A v} V_{v t_B} \quad (3.15)$$

### 3.1.5 Signification géométrique des variables

**Variables continues - 2-forme de Plebanski**  $B^{IJ}[e] = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}_{KL}e^K \wedge e^L = \frac{1}{2}B^{IJ}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$  On s'intéresse à la signification géométrique des variables utilisées dans le formalisme de Plebanski pour décrire la variété  $\mathcal{M}$ .

- $|B_{\mu\nu}|^2 = \underbrace{\epsilon^{IJ}_{KL}\epsilon^{IJ}_{KL}}_{2(\eta_{KM}\eta_{LN}-\eta_{KN}\eta_{LM})} e_\mu^K e_\nu^L e_\mu^M e_\nu^N = (g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} - g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}) \equiv (2A_{\mu\nu})^2$ . La quantité  $A_{\mu\nu}$  donne l'aire  $A_{\mu\nu}dx^\mu dy^\nu$  de l'élément de surface  $dx^\mu dy^\nu$ . On peut écrire pour une surface  $S$ :

$$\text{aire}(S) = \frac{1}{2} \int_S |B_{\mu\nu}| dx^\mu dy^\nu$$

- De la même manière, on peut calculer  $B_{\mu\nu} \cdot B_{\mu\rho} = 2(g_{\mu\mu}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\mu\rho}) \equiv 4J_{\mu\nu\rho}$ . La quantité  $J_{\mu\nu\rho}$  est reliée à l'angle  $\theta_{\mu\nu\rho}$  entre les éléments de surface  $dx^\mu dy^\nu$  et  $dx^\mu dz^\rho$ :  $A_{\mu\nu}A_{\mu\rho}\cos\theta_{\mu\nu\rho} = J_{\mu\nu\rho}$ .
- On montre aussi facilement que la 4-forme  $V \equiv \frac{1}{4!}\epsilon_{IJKL}B^{IJ} \wedge B^{KL}$  est proportionnel à l'élément de volume  $dV = \sqrt{g}d^4x$ .

**Variables discrètes** On se place maintenant dans le cas discret: l'espace-temps est muni d'une triangulation et on a défini des variables discrètes. Peut-on retrouver des caractéristiques géométriques de notre variété Riemannienne à travers nos variables discrétisées?

- L'aire d'un triangle  $f$  est donnée par la norme de  $B_f(t)$ :  $A_f = |B_f(t)|$ . Le triangle  $f$  est commun à plusieurs tétraèdres. Soient  $t$  et  $t'$  deux des ces tétraèdres, alors on a vu que  $B_f(t)$  et  $B_f(t')$  sont reliées par une matrice  $SO(4)$  qui ne modifie pas leurs normes:  $|B_f(t)| = |B_f(t')|$ . La définition des variables  $B_f(t)$  correspond donc bien aux exigences de la triangulation à la Regge: les bords des différents 4-simplexes doivent correspondre; en particulier l'aire d'un triangle ne doit pas dépendre du choix du tétraèdre de base, ce qui est bien vérifié ici.
- Si on considère deux triangles  $f$  et  $f'$  appartenant au même tétraèdre  $t$ , l'angle diédral  $\theta_{ff'}$  entre eux est donné par  $J_{ff'} = A_f A_{f'} \cos\theta_{ff'} = B_f(t) \cdot B_{f'}(t)$ .

Ces deux quantités sont invariantes de jauge et caractérisent complètement la géométrie.

### 3.1.6 Dynamique

La dernière étape avant de quantifier le modèle est d'écrire l'action discrétisée. On prend les  $e(t)$  comme variables indépendantes telles que  $B_f(t) = \int_f *(e(t) \wedge e(t))$ . On définit l'action

$$S_{\text{int}}[e(t), U, V] = \frac{1}{2} \sum_f \text{Tr}[B_f(t)U_f(t)] + \sum_v \sum_{f \subset v} \text{Tr}[\lambda_{vf}U_{tt'}(v)V_{t'v}V_v] \quad (3.16)$$

où

- la première somme est sur tous les triangles de l'intérieur de la discrétisation et  $U_f(t)$  définie par  $U_f(t_1) \equiv U_{t_1 t_2}(v_{12}) \cdots U_{t_n t_1}(v_{n1})$  est le produit des matrices obtenu en tournant autour des tétraèdres  $\{t_1 \cdots t_n\}$  qui ont le triangle  $f$  en commun en commençant par le tétraèdre  $t_1$ .
- la seconde somme est sur tous les 4-simplexes et sur tous les triangles  $f$  appartenant à ces 4-simplexes.
- $\lambda_{vf} \in \mathfrak{so}(4)$  est un multiplicateur de Lagrange. La variation de  $S_{\text{int}}$  par rapport à  $\lambda_{vf}$  donne la contrainte dynamique (3.6):  $U_{t_A t_B}(v) = V_{t_A v} V_{v t_B}$ .

Cette action est invariante sous les transformations de jauge (3.9). On vérifie que cette action redonne l'action de la relativité générale dans la limite d'une triangulation fine. Si la courbure est faible, on peut écrire au premier ordre

$$U_f(t) = 1 + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

où  $dx^\mu \wedge dx^\nu$  est le plan normal au triangle  $f$ . On peut alors développer

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}[B_f(t)U_f(t)] &\sim \frac{1}{2} \underbrace{\text{Tr}(B_f(t))}_{=0} + \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^I F_{\rho\lambda}^J \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_{KL}^{IJ} e_\mu^K e_\nu^L F_{\rho\lambda}^J \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \\ &= e e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ} \\ &= \sqrt{g} R \end{aligned} \quad (3.17)$$

On retrouve bien la densité lagrangienne de la relativité générale. La variation de cette action par rapport aux tétrades donne l'analogie discret des équations d'Einstein. On peut aussi montrer que la variation de l'action par rapport à  $V_{tv}$  donne au premier ordre la relation de fermeture.

Le lien de  $S_{\text{int}}$  avec l'action de Regge se met facilement en évidence. Pour cela, il faut commencer par exprimer l'angle de déficit. On note  $v_1^\mu$  et  $v_2^\mu$  deux des côtés du triangle  $f$ . Soit  $t_1, t_2, \dots, t_n$  l'ensemble des tétrahédres qui ont le triangle  $f$  en commun et soit  $v_{12}, v_{23}, \dots, v_{n1}$  l'ensemble des 4-simplexes correspondants à ces tétrahédres:  $t_2$  appartient à la fois à  $v_{12}$  et  $v_{23}$ .... Pour transporter parallèlement  $e(t)$  à travers les 4-simplexes autour du triangle  $f$ , nous utilisons  $U_{tt'}$ . En général, cela entraîne une rotation de  $e(t)$  due à la courbure du triangle  $f$ . La matrice  $U_f(t_1) \equiv U_{t_1 t_2}(v_{12}) \cdots U_{t_n t_1}(v_{n1})$  représente la courbure  $\text{SO}(4)$  associée au triangle  $f$  dans le repère de  $t_1$ . Cependant comme le triangle  $f$  est l'axe de transport parallèle autour de  $f$ ,  $U_f(t)_\nu^\mu$  laisse invariant chacun des vecteurs  $v_1^\mu, v_2^\mu$ :

$$\begin{aligned} U_f(t)_\nu^\mu v_i^\nu &= v_i^\mu, \quad i \in \{1, 2\} \\ \underbrace{e_\mu^I U_f(t)_\nu^\mu e_J^\nu}_{=U_f(t)_J^I} \underbrace{e_\rho^J v_i^\rho}_{=v_i^J} &= e_\mu^I v_i^\mu \end{aligned}$$

où on a multiplié par  $e_\mu^I$  et introduit dans le membre de gauche  $e_J^\nu(t) e_\rho^J(t) = \delta_\rho^\nu$ . Alors

$$U_f(t)_J^I v_i^J = v_i^I, \quad i \in \{1, 2\}$$

On note  $W$  l'espace vectoriel formé par les deux vecteurs  $v_1^I$  et  $v_2^J$ .  $U_f(t)_J^I$  laisse invariant l'espace  $W$ . On note  $W^\perp$  l'espace complémentaire orthogonal de  $W$ ; on en choisit une base orthonormale  $\xi_1^I, \xi_2^I$ . La rotation  $U_f(t)_J^I$  est une rotation dans le plan  $W^\perp$  qui peut être caractérisée par un angle  $\theta_f$

$$U_f(t)_{21} := (\xi_2)_I U_f(t)_J^I \xi_1^J = \sin\theta_f$$

$\theta_f$  est l'angle duquel  $\xi_1$  est tourné par  $U_f(t)$ ; c'est l'angle de déficit associé à  $f$ . On a aussi

$$U_f(t)_{12} := (\xi_1)_I U_f(t)_J^I \xi_2^J = -\sin\theta_f$$

De plus,  $B_f(t)^{IJ}$ , antisymétrique, appartient à  $W^\perp$ ; on en déduit donc que  $B_f(t)^{IJ} \propto \xi_1^I \xi_2^J$ . De plus, la norme de  $B_f(t) = A_f$ , d'où comme  $(\xi_1^I, \xi_2^I)$  est une base orthonormale,

$$B_f(t)^{IJ} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_f \xi_1^I \xi_2^J$$

Donc,

$$B_f(t)^{IJ} U_f(t)_{IJ} = A_f \xi_1^I \xi_2^J U_f(t)_{IJ} = -\sqrt{2} A_f \sin\theta_f$$

On peut donc réécrire l'action  $S_{\text{int}}$  (en oubliant la contrainte) en fonction de l'angle  $\theta_f$

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_f B_f(t)^{IJ} U_f(t)_{IJ} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_f A_f \sin\theta_f \quad (3.18)$$

qui est bien si l'on développe au premier ordre en  $\theta_f$  l'action de Regge.

Comme nous l'avons déjà souligné, les termes de bords dans les intégrales fonctionnelles ne peuvent être omis au niveau quantique. Le problème des termes de bord n'est pas aussi simple que celui qui apparaît dans les théories des champs classiques pour lesquelles on choisit des conditions aux limites physiquement acceptables qui font que les termes de bord s'annulent. On ne peut pas imposer que la métrique soit nulle sur les bords, sinon on aurait une singularité physiquement non acceptable qui identifierait chacun des points du bord. On peut montrer que l'action d'Einstein-Hilbert qui donne les bonnes équations d'Einstein par principe variationnel pour une variété avec bord s'écrit

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{\pm h} K$$

où  $h$  est le déterminant de la métrique induite  $h_{\mu\nu}$  par  $g_{\mu\nu}$  sur les bords; le signe  $\pm$  est déterminé par la propriété genre espace ou genre temps du bord.  $K$  est la trace du tenseur de courbure extrinsèque de  $\partial\mathcal{M}$  qui est définie par rapport à la variété totale  $\mathcal{M}$  dans laquelle  $\partial\mathcal{M}$  est plongée. Dans le calcul à la Regge, l'action doit satisfaire deux conditions

1. L'action doit être additive sur les régions de l'espace-temps. Si on considère une région de l'espace-temps qui est l'union de deux régions disjointes séparées par une frontière,  $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$ , on doit alors avoir  $S[\Sigma'] + S[\Sigma'']$ .
2. Les équations classiques du mouvement doivent être les mêmes lorsque nous faisons varier l'action avec les variables de bord fixées.

A partir des variables discrétisées, l'action de bord peut s'écrire de manière générale comme

$$S_{\partial\Delta} = \sum_{f \in \partial\Delta} Tr[B_f(t)U_{tt'}] \quad (3.19)$$

où  $U_{tt'} = U_{tt_1}(v_1) \cdots U_{t_n t'}(v_n)$ . On montre facilement que les conditions précédentes sont vérifiées.

### 3.1.7 Structure symplectique du bord

Comme pour la triangulation 4D de la variété  $\mathcal{M}$ , nous pouvons définir le dual de la triangulation du bord:  $(\partial\Delta)^*$ . Le complexe dual à  $\partial\Delta$  est un graphe de valence 4 où les noeuds  $n$  sont duaux aux tétraèdres de bords  $t$  et les liens  $l$  sont duaux aux triangles  $f$ . On peut voir les variables de bord comme des variables associées à  $(\partial\Delta)^*$ :  $U_l \in SO(4)$  associés aux liens  $l$  de  $(\partial\Delta)^*$  et les deux variables  $B_l^R$  et  $B_l^L$  associées aux liens orientés de  $(\partial\Delta)^*$ . L'espace des variables  $(B_l^L, B_l^R, U_l)$  est le même que l'espace des phases de la théorie de Yang-Mills  $SO(4)$  sur réseau et on peut donc l'identifier à l'espace cotangent de l'espace de configuration  $C = SO(4)^L$  où on a noté  $L$  le nombre de liens de  $(\partial\Delta)^*$ ;  $B_l^R$  et  $B_l^L$  sont les champs de vecteurs invariants à droite et à gauche respectivement sur le groupe; la loi de transformation entre ces deux variables est donnée par  $U_l B_l^R U_l^{-1} = B_l^L$ . La structure symplectique naturelle de cet espace cotangent définit les crochets de Poisson de Yang-Mills:

$$\begin{aligned} \{U_l, U_{l'}\} &= 0 \\ \{(B_l^L)^{IJ}, U_{l'}\} &= \delta_{l'l} \tau^{IJ} U_{l'} \\ \{(B_l^R)^{IJ}, U_{l'}\} &= \delta_{l'l} U_l \tau^{IJ} \\ \{(B_l^L)^{IJ}, (B_{l'}^L)^{KL}\} &= \delta_{l'l} \lambda_{MN}^{IJKL} (B_{l'}^L)^{MN} \end{aligned} \quad (3.20)$$

où  $\tau^{IJ}$  sont les générateurs de  $SO(4)$  et  $\lambda_{MN}^{IJKL}$  sont les constantes de structures de  $SO(4)$ .

## 3.2 Quantification

Pour quantifier, nous prenons généralement la variable de configuration et le moment comme les observables de base puis les représentons comme opérateurs quantiques sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les opérateurs doivent être choisis tels que le commutateur de deux opérateurs soit donné par l'opérateur correspondant au crochet de Poisson des observables:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hbar \widehat{\{F, G\}}$$

La difficulté dans notre cas vient des contraintes et symétries de jauge.

### 3.2.1 Stratégie

Les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{f \in t} B_f(t) &= 0 \\ C_{ff} &:= *B_f(t) \cdot B_f(t) = 0 \\ C_{ff'} &:= *B_f(t) \cdot B_{f'}(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

sont les contraintes cinématiques. Nous allons quantifier la structure symplectique sur le bord et imposer ces contraintes au niveau quantique pour définir l'espace de Hilbert cinématique. La dynamique sera construite bloc par bloc; le bloc fondamentale étant un 4-simplexe. Elle va être imposée en définissant une amplitude pour un état de l'espace de Hilbert de bord. L'amplitude totale sera donnée en multipliant les amplitudes au vertex avec les amplitudes des côtés et des faces.

### 3.2.2 Espace de Hilbert cinématique

La structure symplectique (3.20) n'est pas aussi simple que le cas de base où l'espace des phases est décrit par le couple  $(p, q)$  où  $\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \longrightarrow [\hat{p}_i, \hat{q}^j] = i\hbar\delta_i^j$ . Cependant, on a déjà fait remarquer que cette structure symplectique était bien connue (théorie de Yang-Mills).

- Parmi les variables de bord, notre variable de configuration est  $U_l$  et on a rappelé dans l'appendice B que tout élément  $U \in \text{SO}(4)$  pouvait se décomposer sous la forme  $U = (g_+, g_-)$  avec  $g_+, g_- \in \text{SU}(2)$ ; on cherche donc un espace de fonctionnelles d'onde  $\Psi(U_l) = \Psi(g_+, g_-)$  de carré intégrable  $\subset L_2[\text{SO}(4)^L]$  où  $L$  est le nombre de liens du dual de la triangulation du bord  $(\partial\Delta)$ .

- $\{(B_l^L)^{IJ}, (B_{l'}^L)^{KL}\} = \delta_{l'l} \lambda_{MN}^{JKL} (B_l^L)^{MN}$  et on sait que les générateurs de  $\text{SO}(4)$  vérifient les relations de commutation quantiques équivalentes:  $\{\tau^{IJ}, \tau^{KL}\} = \lambda_{MN}^{JKL} \tau^{MN}$

- $\{U_l, U_{l'}\} = 0$   
 $\{(B_l^L)^{IJ}, U_{l'}\} = \delta_{l'l} \tau^{IJ} U_l$  Les variables  $U_l$  sont naturellement quantifiées par les opérateurs  
 $\{(B_l^R)^{IJ}, U_{l'}\} = \delta_{l'l} U_l \tau^{IJ}$

diagonaux du groupe alors que les variables  $B_l^L$  et  $B_l^R$  sont quantifiées par les opérateurs invariants gauche et droit respectivement sur le groupe. (voir appendice C)

- On commence par s'intéresser à la contrainte de fermeture:  $\sum_f B_f(t) = 0$ . En fait, comme le

tétraèdre  $t$  est plat, pour un  $t$  donné, la spin-connection peut être prise nulle et donc la contrainte de Gauss:  $DB = dB + [A, B] = 0$  ( $A$  est la spin-connection définie de la même que dans l'appendice A:  $A_\mu^i = \omega_\mu^i + \beta K_\mu^i$ ) est alors égale à  $dB = 0$  qui est équivalente à la relation de fermeture (intégrer sur  $t$ ). Or la contrainte de Gauss impose la symétrie de jauge (3.9) aux variables  $U_l$  (équivalent de la connection au niveau discret) si on se restreint aux variables de bord. On doit donc avoir des états invariants de jauge:  $\Psi(U_l) = \Psi(\Delta_n U_l \Delta_{n'}^{-1})$ . Par commodité, on a cette fois-ci associé les variables de la théorie aux éléments du dual de  $\partial\Delta$ :  $n$  et  $n'$  désignent les vertexes, extrémités d'un côté  $l \in (\partial\Delta)^*$ . Cette contrainte réduit donc l'espace de Hilbert  $L_2[\text{SO}(4)^L]$  à  $L_2[\text{SO}(4)^L/\text{SO}(4)^N]$  où  $N$  est le nombre de vertexes du dual de  $\partial\Delta$  (et  $N$  est bien strictement inférieur à  $L$ ). Comme  $\text{SO}(4) \sim \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ , une base de cet espace est donnée par les réseaux de spin (voir appendice A et appendice B) définis par

$$\Psi_{j_l^+ j_l^- i_n^+ i_n^-}(g_l^+, g_l^-) = \langle g_l^+ g_l^- | j_l^+, j_l^-, i_n^+, i_n^- \rangle = \left( \prod_l \rho^{j_l^+}(g_l^+) \cdot \prod_n i_n^+ \right) \left( \prod_l \rho^{j_l^-}(g_l^-) \cdot \prod_n i_n^- \right) \quad (3.22)$$

où on a décomposé  $\forall l \in (\partial\Delta)^*$ ,  $U_l = (g_l^+, g_l^-)$  et les produits sont sur tous les côtés et tous les vertexes du graphe que représente  $(\partial\Delta)^*$ ,  $\rho$  est la matrice de représentation de l'élément du groupe  $g$  dans la représentation irréductible  $j$  et les indices de  $\rho$  et  $i$  (entrelaceur; la définition est donnée dans l'appendice A) sont contractés.

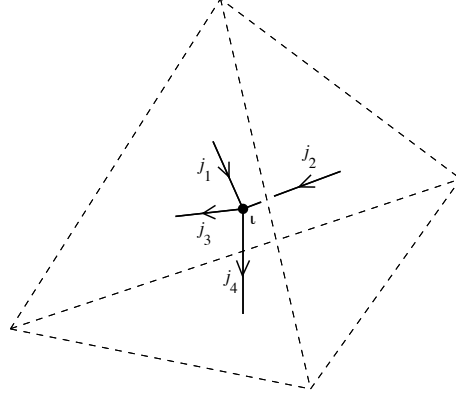
- La contrainte de simplicité, pour les variables de bord,  $C_U := *B_l \cdot B_l = 0$  (où on a oublié les indices  $R$  et  $L$ ) impose  $j_l^+ = j_l^- = j_l$ ; c'est-à-dire que l'ensemble des réseaux de spins est restreint à ceux pour lesquels la représentation associée aux liens est simple. En effet, en utilisant les parties gauche  $B_l^{(+i)}$  et droite  $B_l^{(-i)}$  de l'opérateur  $B_l$  (définies dans l'appendice B), la contrainte de simplicité se réécrit

$$C_U = \delta_{ij} [B_l^{(+i)} B_l^{(+j)} - B_l^{(-i)} B_l^{(-j)}] = 0 \quad (3.23)$$

Or  $C_U$  est un des deux Casimirs quadratiques de  $\mathfrak{so}(4)$ . C'est la différence des Casimirs quadratiques de  $\mathfrak{su}(2)_+$  et  $\mathfrak{su}(2)_-$ . Les représentations du recouvrement universel de  $\mathrm{SO}(4)$ , le groupe  $Spin(4) \sim \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ , sont identifiées par deux demi-entiers  $(j_+, j_-)$ . Les représentations de  $\mathrm{SO}(4)$  forment un sous-ensemble de l'ensemble de ces représentations; représentations pour lesquelles  $j_+ + j_- \in \mathbb{Z}$ .  $C_U$  peut donc s'écrire  $[j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)]id = C_U$

$$C_U = 0 \implies [j_+(j_+ + 1) - j_-(j_- + 1)] = 0 \implies j_+ = j_- \quad \diamond$$

- La contrainte  $C_{ll'} = 0$  sur les variables de bord avec  $l \neq l'$  pour un même noeud  $n$  donne en fait trois équations. Chaque noeud reçoit quatre liens. En effet, on rappelle que la triangulation du bord  $\partial\Delta$ ,  $(\partial\Delta)^*$  est un graphe de valence quatre, avec un noeud au centre de chaque tétraèdre de  $\partial\Delta$  et un lien qui intersecte chaque triangle. Chaque lien est caractérisé par un spin  $j$  et chaque



noeud par un entrelaceur  $i$ . On considère un tétraèdre isolé dont les spins externes sont fixés:  $(j_1 \cdots j_4)$  qui correspondent à des représentations simples de  $\mathrm{SO}(4)$ . On note  $\mathcal{H}_{j_1 \cdots j_4}$  l'espace de Hilbert associé. Alors  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{j_1 \cdots j_4}$  peut s'écrire sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum c_{i^+, i^-} |i^+ i^-\rangle$$

où  $(i^+, i^-)$  est la décomposition en partie gauche et droite de  $i$ . Comme précédemment, on utilise les parties gauche  $B_l^{(+i)}$  et droite  $B_l^{(-i)}$  de l'opérateur  $B_l$  (définies dans l'appendice B). On applique alors la contrainte  $C_{ll'}$  à un état  $|i^+ i^-\rangle$

$$\begin{aligned} C_{ll'} |i^+ i^-\rangle &= \delta_{ij} [B_l^{(+i)} B_{l'}^{(+j)} - B_l^{(-i)} B_{l'}^{(-j)}] |i^+ i^-\rangle \\ &= \frac{\delta_{ij}}{2} [(B_l^{(+i)} + B_{l'}^{(+i)})(B_l^{(+j)} + B_{l'}^{(+j)}) - (B_l^{(-i)} + B_{l'}^{(-i)})(B_l^{(-j)} + B_{l'}^{(-j)})] |i^+ i^-\rangle \\ &= [i^+(i^+ + 1) - i^-(i^- + 1)] |i^+ i^-\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

où pour passer à la deuxième ligne nous avons utilisé la contrainte de simplicité (3.23). On en déduit que pour le couple de liens  $(l, l')$ , cette contrainte implique que

$$i^+ = i^- \equiv i$$

Il y a trois conditions indépendantes de cette sorte, une pour la paire de liens (1, 2), une pour la paire (1, 3), une pour la paire (1, 4). (La paire (3, 4) donne la même contrainte que la paire (1, 2),



et ainsi de suite). On cherche donc un entrelaceur  $i_j : j_l \otimes j_{l'} \longrightarrow j_{l''} \otimes j_{l'''}$  de la forme  $\sum_j c_j (i_j \otimes i_j)$  qui reste sous cette forme pour toutes les paires de liens  $(l, l') = (1, 2), (1, 3),$  ou  $(1, 4)$ . Barrett et Crane ont trouvé un entrelaceur avec cette propriété ([8]):

$$i_{\text{BC}} = \sum_j (2j + 1)(i_j \otimes i_j) \quad (3.25)$$

Reisenberger a ensuite prouvé que c'était l'unique solution vérifiant toutes ces contraintes ([17]).

### 3.3 Problèmes

Le modèle de Barrett-Crane ainsi défini est obtenu en traduisant au niveau quantique les contraintes qui font passer de la théorie BF à la théorie de la relativité générale. Cependant plusieurs résultats font penser que ce modèle est mal défini.

- Tout d'abord, l'espace des états de bord obtenu est similaire mais ne correspond pas exactement à celui de la gravité quantique à boucles (voir appendice A). L'entrelaceur de Barrett-Crane est unique, ce qui ne peut pas donner tous les réseaux de spin de la gravité quantique à boucles. De plus, l'opérateur volume est alors mal-défini.
- Ensuite, il semblerait que toutes les fonctions à n-points ne soient pas correctes dans la limite basse énergie. Les calculs à l'origine de ces résultats vont paraître dans [28].

## 4 Comment modifier le modèle de Barrett-Crane?

Dans le modèle de Barrett-Crane tel que je viens de le présenter toutes les contraintes ont été imposées fortement:  $C|\Psi\rangle = 0$ . Cependant, les contraintes  $C_{ll'}$  ne commutent pas; ces contraintes sont de seconde classe et les imposer fortement élimine des degrés de liberté physiques.

### 4.1 Traitement des contraintes

Le programme de quantification canonique de Dirac préconise les contraintes de seconde classe faiblement. Dans notre cas, deux états  $|\xi\rangle$  et  $|\Psi\rangle$  sont physiques ssi  $\forall(l, l') \in (\partial\Delta)^*, \langle \xi | C_{ll'} | \Psi \rangle = 0$ .

Dans le modèle défini par J Engle, R Pereira et C Rovelli, une des trois contraintes  $C_{ll'}$  est imposée fortement, les deux autres sont imposées faiblement. La contrainte imposée fortement implique comme nous l'avons montré précédemment, que au noeud  $n$   $i_n^+ = i_n^- \equiv i_n$  (une contrainte appliquée faiblement impose seulement que les états soient symétriques par permutation des composantes gauche/droite). Un état est alors donné par  $|j_l, i_n\rangle \equiv |j_l^+, j_l^-, i_n^+, i_n^-\rangle$ , ce qui donne pour espace de Hilbert de la théorie un espace isomorphe à  $L_2[\text{SU}(2)^L/\text{SU}(2)^N]$ . Cet espace est très proche de celui des réseaux de spins de la gravité quantique à boucles (appendice A); cependant il dépend du choix du couple  $(l, l')$  pour lequel la contrainte  $C_{ll'}$  a été imposée fortement. Comme un entrelaceur doit être invariant sous  $\text{SO}(3)$ , une solution est de projeter notre espace de réseaux de spin  $\text{SO}(4)$  dans l'espace des réseaux de spin  $\text{SO}(3)$  de la gravité quantique à boucles.

### 4.2 Un nouvel entrelaceur

On considère un élément de  $\mathcal{H}_{j_1 \dots j_4}$ , qui correspond à l'espace de Hilbert associé à un tétraèdre isolé dont les spins externes sont fixés:  $(j_1 \dots j_4)$  représentations simples de  $\text{SO}(4)$ :

$$I^{(A_1 \dots A_{2j_1})(A'_1 \dots A'_{2j_1})(B_1 \dots B_{2j_2})(B'_1 \dots B'_{2j_2})(C_1 \dots C_{2j_3})(C'_1 \dots C'_{2j_3})(D_1 \dots D_{2j_4})(D'_1 \dots D'_{2j_4})} := I^{\mathcal{AA}'\mathcal{BB}'\mathcal{CC}'\mathcal{DD}'}$$

où nous avons utilisé la notation spinorielle standard. Les parenthèses signifient que les indices sont symétrisés. Tous les indices sont dans la représentation fondamentale de  $\text{SU}(2)$ . Or tout spineur (non symétrisé) peut-être décomposé en une somme de spineurs symétriques produit tensoriel avec des epsilons;

par exemple:  $\phi^{AB} = \phi^{(AB)} + \lambda \epsilon^{AB}$  où  $\lambda = 1/2 \epsilon_{AB} \phi^{AB}$ . Cette décomposition est la décomposition en décompositions irréductibles de  $SU(2)$  de la représentation  $1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0$  (la représentation de plus haut poids est celle où il n'y a pas de epsilon). Les spineurs symétrisés se transforment donc selon les représentations irréductibles de  $SU(2)$ . On peut alors projeter notre spineur de telle sorte que ses indices vivent dans la représentation irréductible de  $SU(2)$  de plus haut poids dans la décomposition:  $j \otimes j = 0 \oplus \dots \oplus 2j$ . On définit ainsi l'espace  $\mathcal{K}_{j_1 \dots j_4}$  par la projection  $\pi : \mathcal{H}_{j_1 \dots j_4} \longrightarrow \mathcal{K}_{2j_1 \dots 2j_4}$  telle que

$$\pi : I^{AA' \dots DD'} \mapsto I^{(AA') \dots (DD')} := i^{a \dots d} \quad (4.1)$$

où les indices  $\{a \dots b\}$  sont de la forme  $2j \in \mathbb{Z}$ ; donc l'entrelaceur projeté est invariant sous  $SO(3)$ . Définissons maintenant la fonction  $f : \mathcal{K}_{j_1 \dots j_4} \longrightarrow \mathcal{H}_{(\frac{j_1}{2}, \frac{j_1}{2}) \dots (\frac{j_4}{2}, \frac{j_4}{2})}$ . Nous procédons en deux étapes:

- Nous définissons tout d'abord:  $e : \mathcal{K}_{j_1 \dots j_4} \longrightarrow \mathcal{H}_{(\frac{j_1}{2}, \frac{j_1}{2})} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{(\frac{j_4}{2}, \frac{j_4}{2})}$  par

$$e : i^{a \dots d} \mapsto e(i)^{A \dots DA' \dots D'} := i^{(AA') \dots (DD')}$$

- Pour construire un entrelaceur de  $SO(4)$  (invariant sous  $SO(4)$ ), nous moyennons  $e(i)$  sur le groupe

$$f(i) := \int_{SO(4)} dV \left( \bigotimes_i \rho^{(j_i, j_i)}(V) \right) \cdot e(i)$$

Si on choisit une base d'entrelaceurs  $|i_+, i_- \rangle$  de  $SO(4)$ , on peut décomposer  $f(i)$  sous la forme

$$f(i) = \sum_{i_+, i_-} f_{i_+ i_-}^i |i_+, i_- \rangle \quad (4.2)$$

où les coefficients  $f_{i_+ i_-}^i$  sont donnés par

$$\begin{aligned} f_{i_+ i_-}^i &= \langle i_+ i_- | f(i) \rangle \\ &= i_+^{A \dots D} i_-^{A' \dots D'} f(i)_{AA' \dots DD'} \\ &= i_+^{A \dots D} i_-^{A' \dots D'} e(i)_{AA' \dots DD'} \end{aligned} \quad (4.3)$$

où la dernière égalité vient du fait que  $|i_+, i_- \rangle$  est invariant sous l'action de  $SO(4)$  et absorbe donc l'intégrale.  $f$  est une fonction de l'espace des entrelaceurs  $SO(3)$  entre les représentations  $2j_1 \dots 2j_4$  dans l'espace des entrelaceurs  $SO(4)$  entre les représentations  $(j_1, j_1), \dots, (j_4, j_4)$ .

### 4.3 Fonctions de partition

A partir des entrelaceurs, on peut définir la fonction de partition de la théorie. Pour le modèle de Barrett-Crane,

$$Z_{BC} = \sum_{j_l} \prod_l (\dim j_l)^2 \prod_n A_{BC}(j_l) \quad (4.4)$$

où l'amplitude est donnée par  $A_{BC}(j_l) = 15 j_{SO(4)}((j_l, j_l), i_{BC})$  avec  $15 j_{SO(4)}$  est le symbole  $15j$  de  $SO(4)$ . Pour le nouveau modèle, la différence vient de l'espace des entrelaceurs considéré, et la fonction de partition est donnée par

$$Z_{GR} = \sum_{j_l, i_n} \prod_l (\dim \frac{j_l}{2})^2 \prod_n A(j_l, i_n) \quad (4.5)$$

avec l'amplitude donnée par

$$\begin{aligned} A(j_l, i_n) &= 15 j_{SO(4)}\left(\left(\frac{j_l}{2}, \frac{j_l}{2}\right), f(i_e)\right) \\ &= \sum_{i_n^+, i_n^-} 15 j_{SO(4)}\left(\left(\frac{j_l}{2}, \frac{j_l}{2}\right), i_n^+, i_n^-\right) \prod_n f_{i_n^+, i_n^-}^{i_n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 5 Conclusion

Nous avons ainsi reformulé la théorie de mousse de spin de Barrett-Crane à partir de la relativité générale discrétisée à la Regge. Cette théorie est totalement contrainte cependant toutes les contraintes ne sont pas de première classe et les imposer fortement comme cela est fait dans le modèle de Barrett-Crane élimine des degrés de liberté physiques. Nous avons donc modifié ce modèle en imposant les contraintes de seconde classe faiblement; ce qui a permis d'obtenir une théorie dans laquelle les états quantiques de l'espace de bord correspondent exactement aux états  $SO(3)$  de la gravité quantique à boucles; aucun degré de liberté n'est perdu. De plus, comme les degrés de liberté manquant dans la théorie de mousse de spin de Barrett-Crane sont retrouvés, la nouvelle amplitude au vertex devrait permettre de trouver à la limite basse énergie la bonne fonction à  $n$  points. Finalement, le vertex peut être vu à la fois comme le vertex d'un réseau de spins  $SO(3)$  et le vertex d'un réseau de spin  $SO(4)$ ; il est à la fois covariant  $SO(3)$  et  $SO(4)$ .

Cependant, beaucoup de points restent encore à éclaircir. En particulier, après quantification, le secteur classique correspondant de la théorie, défini par (2.6), est le premier. Ce n'est donc pas le secteur de la relativité générale. Ce problème vient sûrement de la manière dont les variables ont été quantifiées. La compréhension du paramètre d'Immirzi (que je n'ai pas introduit dans ce travail) pourrait permettre de mieux comprendre ce problème.

## A Gravité quantique à boucles, réseaux de spin

La gravité quantique à boucles est une implémentation du programme de quantification canonique de Dirac, à partir de la version hamiltonienne d'une action de la gravité, obtenue comme une variante de l'action de Palatini. La partie du programme qui est à ce jour bien établie concerne la définition de l'espace de Hilbert, et l'implémentation et la résolution de deux des trois types de contraintes (les équations de Wheeler-DeWitt).

Nous commençons par une formulation ADM de la gravité classique en terme d'une triade locale  $e_\mu^i$  (reliée à la métrique 3d par  $h_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^i$ ) sur une variété 4d  $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times M$  où  $M$  est compact. Le fait de passer d'une invariance de Lorentz à 4d à une invariance 3d sur  $M$  introduit une nouvelle symétrie de jauge SU(2). Nous définissons la variable  $E_\mu^i = e e_\mu^I$  (où  $e$  est le déterminant de  $e_\mu^i$ ) et la variable  $K_\mu^i = K_{\mu\nu} E^{\nu i} / \sqrt{h}$  (où  $h$  est le déterminant de la métrique 3d  $h_{\mu\nu}$  et  $K_{\mu\nu}$  est la courbure extrinsèque). Le couple  $\{E_\mu^i, K_\mu^i\}$  peut être pris comme le couple canonique de l'espace des phases de la théorie mais en utilisant la transformation canonique  $A_\mu^i(x) = \omega_\mu^i + \beta K_\mu^i$  où  $\omega_\mu^i$  est la connection de spin SU(2) compatible avec la triade, on construit la nouvelle paire de variables canoniques de l'espace des phases  $(A_\mu^i(x), E_\mu^i)$ . La nouvelle variable de configuration est maintenant la 1-forme sur  $M$ ,  $A_\mu^i$ , connection à valeur dans l'algèbre  $\mathfrak{su}(2)$ ;  $E_\mu^i$  est le moment conjugué. Comme on a choisi les connexions comme variables de polarisation, il nous faut en principe construire un espace de fonctionnelles d'onde  $\Psi(A)$  de carré intégrable. L'espace qu'on cherche à construire est donc grossièrement

$$\mathcal{H}_0 = \{ \Psi(A) / \int [\mathcal{D}A] |\Psi(A)|^2 < \infty \}$$

Cependant, la définition rigoureuse de cet objet est loin d'être simple. De plus, au niveau quantique, les variables canoniques seront remplacées par des opérateurs agissant sur l'espace des phases de la théorie et le contenu dynamique de la relativité sera donné par l'action des contraintes de première classe sur les états physiques: la contrainte SU(2) de Gauss qui impose l'invariance de jauge locale à ces états ( $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_G$ ); la contrainte des difféomorphismes, générant les difféomorphismes 3d sur  $M$  ( $\mathcal{H}_G \rightarrow \mathcal{H}_{diff}$ ); et la contrainte hamiltonienne donnant l'évolution temporelle (coordonnée de temps non physique) de  $M$  ( $\mathcal{H}_{diff} \rightarrow \mathcal{H}_{phys}$ ).

Pour construire ces états, on considère un graphe  $\Gamma_n$  formé de  $n$  liens  $\gamma_i$ . On associe un élément de groupe à chaque lien  $\gamma_i$  en prenant l'holonomie  $g_i = \mathcal{P}exp(\int_{\gamma_i} A)$  (où  $\mathcal{P}exp$  désigne l'exponentielle ordonnée); un élément de  $SU(2)^n$  est donc associé au graphe. La notion d'holonomie permet de fabriquer un type particulier de fonctionnelles  $\Psi(A)$ : les fonctions cylindriques. Considérons maintenant une fonction à valeurs complexes  $f$  de  $SU(2)^n$ , on définit l'état  $\Psi_{\Gamma_n, f}(A) = f(g_1, \dots, g_n)$ . On peut munir l'espace des fonctions cylindriques, noté  $Cyl$  d'un produit scalaire. Si deux fonctions cylindriques sont basées sur le même graphe  $\Gamma$ , on définit

$$\langle \Psi_{\Gamma, f_1} | \Psi_{\Gamma, f_2} \rangle = \int dg_1 \cdots dg_n \overline{f_1(g_1, \dots, g_n)} f_2(g_1, \dots, g_n)$$

où on utilise la mesure de Haar normalisée sur SU(2). Si les deux fonctions cylindriques sont basées sur des graphes différents, on peut toujours les récrire sur un même graphe qui les contient tous les deux, et appliquer le même produit scalaire. La complétion  $\overline{Cyl}$  de l'espace des fonctions cylindriques par ce produit scalaire fournit un espace de Hilbert dont on peut montrer qu'il n'est autre que  $\mathcal{H}_0$ . Ce n'est pas l'espace des états physiques;  $\mathcal{H}_{phys}$  est donné par le sous-espace de  $\mathcal{H}_0$  qui est annulé par les trois contraintes quantiques de la théorie.

On peut construire une base orthonormale de  $\mathcal{H}_0$  en considérant le graphe  $\Gamma_n$  auquel on a associé des représentations irréductibles à ces liens. Pour un vertex  $v$  de valence  $k$ , on peut fixer une base orthonormale de l'espace formé du produit tensoriel des  $k$  espaces de Hilbert des représentations associées aux  $k$  liens se rejoignant en  $v$ . On associe alors un élément  $i$  de cette base au vertex  $v$ . L'état correspondant est alors défini par

$$\Psi_{\Gamma_n}(A) = \otimes_i \rho^{j_i}(g_i) \otimes_v i_v$$

où les produits sont sur tous les liens et tous les vertexes du graphe,  $\rho$  est la matrice de représentation de l'élément du groupe  $g$  dans la représentation irréductible  $j$  et les indices de  $\rho$  et  $i$  (tenseur) sont contractés.

De plus, si nous définissons  $i_v$  comme un tenseur invariant - c'est-à-dire qu'il appartient au sous-espace singlet dans la décomposition du produit tensoriel des  $k$  espaces de Hilbert en parties irréductibles -, alors l'état quantique  $\Psi_\Gamma$  est invariant sous  $SU(2)$ . L'ensemble de ces états sont annulés par les opérateurs de la première contrainte (contrainte de Gauss). On a donc une base de  $\mathcal{H}_G$ .

Les tenseurs invariants  $i_v$  sont appelés *entrelaceurs*; les graphes colorés  $(\Gamma, \rho, i)$  sont appelés *réseaux de spins*  $S$ , ils définissent un état quantique  $|S\rangle$ , représenté en terme d'une fonctionnelle  $\Psi_S(A) = \langle A|S\rangle$  du type que l'on vient de définir.

## B Décomposition gauche-droite de $SO(4)$

Le groupe  $SO(4)$  est isomorphe au produit de deux sous-groupes, chacun isomorphe à  $SU(2)$ :  $SO(4) \sim (SU(2)_+ \times SU(2)_-) / \mathbb{Z}_2$ . Donc,

$$\forall U \in SO(4), \exists g_+ \in SU(2)_+ \text{ et } g_- \in SU(2)_- \text{ tels que } U = (g_+, g_-)$$

et  $UU' = (g_+g'_+, g_-g'_-)$ . De plus,  $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2)_+ \oplus \mathfrak{su}(2)_-$ . On peut construire une base de  $\mathfrak{su}(2)_+$  et  $\mathfrak{su}(2)_-$  à partir des générateurs de  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $J^{IJ}$ . Pour cela, on commence par définir la partie gauche et la partie droite des générateurs  $J$ :

$$J_\pm := *J \pm J$$

où  $*$  est l'opérateur de Hodge

$$(*B)^{IJ} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJKL} B^{KL} \quad (\text{B.1})$$

On choisit ensuite un vecteur normé de  $\mathbb{R}^4$ , par exemple  $v = (0, 0, 0, 1)$  et trois autres vecteurs  $v_i, i = 1, 2, 3$ , tels que  $v_i^I = \delta_i^I$ , formant avec  $v$  une base orthonormale. On définit alors

$$J_\pm^i = J_\pm^{IJ} v^I v^J = J_\pm^{0i} \quad (\text{B.2})$$

On retrouve alors facilement la structure de  $\mathfrak{su}(2)$ :

$$[J_\pm^i, J_\pm^j] = 2\epsilon^{ij} J_\pm^k$$

Soit  $B^{IJ} \in \mathfrak{so}(4)$ , alors

$$\begin{aligned} B \cdot B &= B_+^i B_+^i + B_-^i B_-^i \\ *B \cdot B &= B_+^i B_+^i - B_-^i B_-^i \end{aligned}$$

Et en particulier,  $C = J \cdot J$  et  $\tilde{C} = *J \cdot J$  sont les deux Casimirs quadratiques de  $\mathfrak{so}(4)$ ; ils sont respectivement la somme et la différence des Casimirs quadratiques de  $\mathfrak{su}(2)_+$  et  $\mathfrak{su}(2)_-$ .

## C Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit  $G$  un groupe de Lie de dimension  $n$ . On définit l'action à gauche par

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto L_g(k) = gk \quad \text{avec } g \in G \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

De même, on définit l'action à droite

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto R_g(k) = kg \quad \text{avec } g \in G \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

On note  $(L_g)_* : T_k G \longrightarrow T_{gk} G$  et  $(R_g)_* : T_k G \longrightarrow T_{kg} G$  les "push-forward" respectifs de  $L_g$  et de  $R_g$ . Alors le champs de vecteurs  $\mathbf{v}$  est invariant à gauche si et seulement si

$$\forall g \in G (L_g)_* \mathbf{v} = \mathbf{v} \iff \forall g, k \in G \mathbf{v}(gk) = (L_g)_*^k \mathbf{v}(k)$$

On a bien sûr une définition équivalente pour les champs de vecteurs invariants à droite. Nous nous concentrons maintenant sur des champs de vecteurs invariants à droite.

- Si on prend  $k = e$ , élément neutre de  $G$  alors  $\mathbf{v}(g) = (L_g)_* \mathbf{v}(e)$ . La valeur du champ de vecteur  $\mathbf{v}$  en tout point  $g$  est donc entièrement déterminée par sa valeur en  $e$ .
- Soient deux champs de vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  invariants à gauche:  $\forall g, (L_g)_* \mathbf{v} = \mathbf{v}, (L_g)_* \mathbf{w} = \mathbf{w}$  alors

$$(L_g)_* [\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_k = [(L_g)_* \mathbf{v}|_k, (L_g)_* \mathbf{w}|_k] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_{gk}$$

donc  $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  est un champs de vecteurs invariant à gauche. L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche forment  $\text{Lie}(G)$  qui avec le crochet de Lie:  $[\cdot, \cdot] : \text{Lie}(G) \times \text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Lie}(G)$  est une algèbre de Lie associée au groupe de Lie  $G$ . C'est un espace vectoriel dont la dimension est égale à la dimension de  $G$ .

Si on prend  $\mathbf{v}^a$  avec  $a = 1 \cdots n$  une base de l'algèbre de Lie( $G$ ) alors  $[\mathbf{v}^a, \mathbf{v}^b] = f_c^{ab} \mathbf{v}^c$  où  $f_c^{ab}$  sont les constantes de structures de Lie( $G$ ).

De plus, pour passer des variables  $B_l^R, B_l^L, U_l$  à des opérateurs (partie ??), on a utilisé le fait qu'un champs de vecteur peut être vu comme un opérateur. On peut le définir comme un opérateur différentielle d'ordre 1, à savoir

$$\mathbf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i}$$

Cet opérateur agit sur les fonctions  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$  pour donner d'autres fonctions ( $\mathbf{v}[f] \in C^\infty(\mathcal{M})$ ).

## References

- [1] HJ Matschull *Dirac's Canonical Quantization Programme* , [arXiv: quant-ph/9606031]
- [2] JD Romano *Geometrodynamics vs. connection dynamics* ,Gen.Rel.Grav. 25 (1993) 759-854 , [arXiv: gr-qc/9303032]
- [3] M Gaul, C Rovelli, *Loop Quantum gravity and the Meaning of Diffeomorphism Invariance*,Lect.Notes Phys. 541 (2000) 277-324 , [arXiv: gr-qc/9910079]
- [4] C Rovelli, P Upadhyaya, *Loop quantum gravity and quanta of space: a primer* , [arXiv: gr-qc/9806079]
- [5] T Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD)*, Class.Quant.Grav. 15 (1998) 839-873, [arXiv: gr-qc/9606089]
- [6] T Thiemann, *Quantum Spin Dynamics (QSD) II*, Class.Quant.Grav. 15 (1998) 875-905, [arXiv: gr-qc/9606090]
- [7] JW Barrett, L Crane, *Relativistic spin networks and quantum gravity* , J.Math.Phys. 39 (1998) 3296-3302, [arXiv: gr-qc/9709028]
- [8] JW Barrett, L Crane, *A Lorentzian signature model for quantum general relativity* , Class.Quant.Grav. 17 (2000) 3101-3118, [arXiv: gr-qc/9904025]
- [9] JC Baez, *An introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity*, Lect.Notes Phys. 543 (2000) 25-94, [arXiv: gr-qc/9905087]
- [10] JC Baez, *Spin Foam Models*, Class.Quant.Grav. 15 (1998) 1827-1858, [arXiv: gr-qc/9709052]
- [11] JC Baez, JW Barrett *The Quantum Tetrahedron in 3 and 4 Dimensions*, ?, [arXiv: gr-qc/9903060]
- [12] D Oriti, *Spacetime geometry from algebra: spin foam models for non-perturbative quantum gravity*, Rept.Prog.Phys. 64 (2001) 1489-1544, [arXiv: gr-qc/0106091]
- [13] A Perez, *Spin Foam Models for Quantum Gravity*, Class.Quant.Grav. 20 (2003) R43, [arXiv: gr-qc/0301113]
- [14] A Perez, *Spin Foam quantization of  $SO(4)$  Plebanski's action*, Adv.Theor.Math.Phys. 5 (2002) 947-968; Erratum-ibid. 6 (2003) 593-595, [arXiv: gr-qc/0203058]
- [15] A Perez, *Introduction to loop quantum gravity and spin foams*, [arXiv: gr-qc/0409061]
- [16] R De Pietri, L Freidel,  *$so(4)$  Plebanski Action and Relativistic Spin Foam Model* , Class.Quant.Grav. 16 (1999) 2187-2196, [arXiv: gr-qc/0608135]
- [17] MP Reisenberger, *On relativistic spin network vertices*, ?, [arXiv: gr-qc/9809067]
- [18] ER Livine, *Towards a Covariant Loop Quantum Gravity*, [arXiv: gr-qc/0309028]
- [19] ER Livine, *Boucles et Mousses de Spin en Gravité Quantique*, Centre de Physique Théorique CNRS-UPR 7061 (France) PhD Thesis, 2003, [arXiv: gr-qc/0309028]
- [20] D Louapre, *Modèles de mousses de spin pour la gravité quantique en 3 dimensions*, ENS Lyon PhD Thesis.
- [21] A Perez, *Spin foams models for quantum gravity*, University of Pittsburg PhD Thesis, 2001.
- [22] K Noui, *Le formalisme hamiltonien de la gravité classique*, Universit  Montpellier 2, stage de DEA.
- [23] R Oeckl, *A "general boundary" formulation for quantum mechanics and quantum gravity* , Phys.Lett. B575 (2003) 318-324, [arXiv: hep-th/0306025]
- [24] T Regge, *General Relativity without Coordinates* , Il Nuovo Cimento XIX 3 (1961)

- [25] JB Hartle, R Sorkin, *Boundary Terms in the Action for Regge Calculus* , Gen. Rel. Grav. 13, 6 (1981).
- [26] M Creutz, *Gauge fixing, the transfer matrix, and confinement on a lattice*, Phys. Rev. D154 (1977), 1128-1136.
- [27] J Engle, R Pereira, C Rovelli, *The loop-quantum-gravity vertex-amplitude*, [arXiv: gr-qc/0705.2388]
- [28] E Alesci, C Rovelli, *Non diagonal terms of the propagator from LQG* , à paraître.
- [29] M Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Taylor and Francis, 2003
- [30] Y Choquet-Bruhat, C DeWitt-Morette, M Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics*, North-Holland, 1982.
- [31] M Creutz, *Quarks, Gluons and lattices* , Cambridge, 1980.
- [32] C Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge, 2004