

Modèle d'arbre de Steiner pour le confinement des quarks

Master science de la matière
Ecole normale supérieure de Lyon

Stage 2010-2011
Guiot Benjamin
M2 physique

Résumé

Ce rapport a été réalisé dans le cadre du stage de master 2 de l'ENS de Lyon. Il s'est déroulé à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon (IPNL) sous la direction de J.M Richard. Dans ce rapport, on s'intéressera à l'arbre de Steiner et à la possibilité d'obtenir un tetraquark stable.



Table des matières

1	L'interaction forte et le confinement	3
1.1	Symétrie et couleur	3
1.2	Potentiels d'interaction	4
1.2.1	Arbre de Steiner	4
2	Les mésons	6
2.1	Résolution exacte	6
2.2	Méthode variationnelle	8
2.3	méthode par raccordement	11
3	Les baryons	12
3.1	Interaction à 2 corps	13
3.1.1	Etude du cas scalaire	13
3.1.2	Cas général et recherche de la bonne symétrie	15
3.2	Potentiel en Y	16
3.2.1	Test et comparaison des deux méthodes	16
3.2.2	Calcul de l'énergie	17
4	Tetraquark	17
4.1	Quelques tests	18
4.2	En 2 dimensions	18
4.3	En 3 dimensions	19
5	Conclusion	20
6	Annexes	20
6.1	Loi d'échelle	20
6.2	Théorème de l'énergie variationnelle	21

Introduction

Les expériences de physique des particules ont mis en évidence des pics dans le secteur des quarks lourds dont les nombres quantiques s'expliquent difficilement en formant un méson ou un baryon, tandis qu'un état lié de 2 quarks et 2 antiquarks, appelé tetraquark, pourrait fournir une réponse.

Le but du stage est d'étudier les systèmes liés de quarks comme les mésons et les baryons, mais aussi le tetraquark ($qq\bar{q}\bar{q}$). Dans certaines théories effectives, le potentiel de l'interaction forte est représenté par une corde entre 2 quarks. On souhaite étudier ce modèle ainsi que celui où l'on utilisera l'arbre de Steiner et le flip-flop comme potentiels. Plus précisément, on cherchera à étudier la partie linéaire de ces potentiels et si le modèle (arbre de Steiner + flip-flop) permet d'avoir un tetraquark stable.

Une grande partie du travail repose sur la résolution numérique de l'équation de Schrödinger pour 2, 3 et 4 corps. Suite à une introduction aux différents potentiels que l'on va utiliser, on étudiera les différentes méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger pour les mésons et pour les baryons. Dans la dernière partie, on utilisera les méthodes développées et le potentiel (arbre de Steiner + flip-flop) pour étudier le tetraquark.

1 L'interaction forte et le confinement

Le but ici n'est pas de faire un cours sur l'interaction forte, mais plutôt de faire quelques rappels, théoriques et expérimentaux, qui permettront d'introduire pourquoi des choses comme le tétraquark et le pentaquark sont étudiés.

1.1 Symétrie et couleur

La puissance du modèle des quarks est qu'il prédit a priori tout les mésons et baryons observés avec la bonne énergie sans même avoir à préciser le potentiel. Ce modèle, proposé par Gell-Mann et Zweig en 1964, a vu le jour lorsque les scientifiques découvrant chaque année de nouvelles particules, ont cherché à expliquer leur existence de façon plus fondamentale en utilisant des particules plus élémentaires, les quarks. Uniquement 6 quarks (et leur antiparticules) sont nécessaires pour expliquer toutes les particules observées. On parle de saveur pour distinguer les quarks caractérisés par leur masse et on les range dans les 2 triplets (u, d, s) et (c, b, t) , où dans chaque triplet les masses sont « voisines ». La dimension de la représentation naturelle du groupe de saveur est donc 3, et on étudie donc le groupe $SU(3)_{\text{saveur}}$. Etant donné que dans un triplet, les quarks n'ont pas exactement la même masse, cela signifie que la symétrie $SU(3)_{\text{saveur}}$ a été brisée.

Ce modèle, fondé pour expliquer toutes les particules observées, possède certains fondements empiriques. On suppose ainsi que les particules observées sont uniquement des mésons $q\bar{q}$ ou des baryons qqq . Les mésons et les baryons sont alors classés de la façon suivante (pour un triplet) :

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (1)$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (2)$$

où les chiffres à droite des égalités correspondent à la dimension de la représentation irréductible. Ainsi si on fait une permutation sur les saveurs, un méson dans le groupe 8 va se changer en un autre méson de ce groupe, mais jamais en celui du singlet.

Si maintenant on s'intéresse au groupe 10 dans lequel les états sont symétriques par rapport à la saveur, on trouve le baryon sss formé de 3 quarks strange. Mais les quarks sont des fermions et n'ont donc que 2 états de spin, tandis que nous avons un système lié de 3 fermions, ce qui est visiblement en violation avec le principe d'exclusion de Pauli. C'est cette découverte qui a suggéré d'ajouter un nombre quantique : la couleur. La symétrie de couleur est supposée exacte et forme le groupe $SU(3)_{couleur}$. On pense que toutes les particules observables sont des singlets de couleur, ce qui explique le confinement des quarks, en effet on affecte à chaque quark une seule couleur, ce qui les oblige à se rassembler pour former un singlet. Ainsi pour les mésons et les baryons on peut écrire les équations schématiques :

$$q_r \bar{q}_{\bar{r}} = (q\bar{q})_{r+b+v} \quad (3)$$

$$q_r q_b q_v = (qqq)_{r+b+v} \quad (4)$$

où $\bar{r} = b + v$. Remarquons que la couleur n'interdit pas des systèmes comme le tetraquark, où il est possible de former un singlet de couleur avec 2 quarks et 2 antiquarks. Par exemple, par la suite on étudiera un potentiel qui crée une liaison (pas de type interaction forte) entre 2 mésons. Chaque méson étant blanc, le tetraquark le sera aussi.

Le fait que le tetraquark ne soit pas interdit par la couleur est déjà une raison pour s'y intéresser. L'autre raison est que récemment, des expériences dans les accélérateurs de particules ont trouvés des pics dont les nombres quantiques s'expliquent difficilement par les mésons ou les baryons, tandis qu'ils le sont par les multiquarks. On peut prendre comme exemple le méson scalaire $J^{pc} = 0^{++}$. Pour obtenir un état de parité positive à partir d'un méson, il faut au moins une unité de moment angulaire, $l \geq 1$, ce qui donne une énergie théorique de 1.3 GeV pour le plus léger méson scalaire. Cette valeur est loin de celle obtenue expérimentalement ; le tetraquark permet de régler ce problème [6].

1.2 Potentiels d'interaction

Si on veut faire des simulations pour obtenir des énergies précises on est obligé de choisir un potentiel. Contrairement à l'électromagnétisme, la force forte entre deux quarks (ou antiquarks) augmente avec la distance, mais bien sûr deux quarks ne peuvent pas se pénétrer. Un potentiel simple qui peut alors être utilisé est :

$$V = \frac{\alpha}{r^2} + \lambda r \quad (5)$$

et cette interaction lie les quarks 2 par 2. Le potentiel entre deux quarks est parfois appelé corde. Si l'on souhaite prendre en compte tout les effets observés dans la physique des particules, le potentiel devient alors beaucoup plus complexe. Le but de ce stage ne sera pas de rendre compte précisément des expériences, mais plutôt d'étudier la partie linéaire de la corde, pour le potentiel à 2 corps et pour des potentiels plus compliqués que je vais immédiatement présenter.

1.2.1 Arbre de Steiner

L'arbre de Steiner est avant tout une construction mathématique qui consiste à relier un nombre n de points (terminals) par un chemin (network) particulier. On se sert de cette construction comme d'un potentiel d'interaction à n corps où les différentes branches du network correspondent à notre

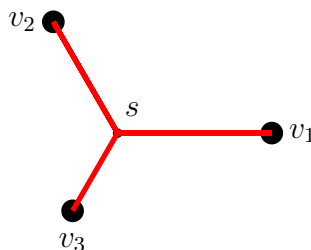
corde (dont on étudie que la partie linéaire). On va détailler cette construction pour les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Pour les baryons, l'arbre de Steiner consiste en un quatrième point, appelé point de Steiner et noté S , relié à chacun des 3 quarks. Si l'on appelle (v_1, v_2, v_3) les positions des 3 quarks et que l'on note $v_i S$ la distance entre le quark v_i et le point S , le potentiel est alors :

$$V = \min \{v_1 S + v_2 S + v_3 S\} \quad (6)$$

On peut montrer que le minimum est obtenu lorsque tous les angles $\widehat{v_i S v_j} = 120^\circ$ à condition que $\widehat{v_i v_j v_k} \leq 120^\circ$, on peut appeler ça la condition d'angle. Dans le cas contraire, S sera confondu avec le sommet de l'angle supérieur à 120° , on dit que l'arbre de Steiner est dégénéré.

FIGURE 1 – arbre de Steiner pour $n = 3$



Après un peu de géométrie, il est possible d'obtenir une formule exacte pour le potentiel

$$V_{exacte} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2}} \quad (7)$$

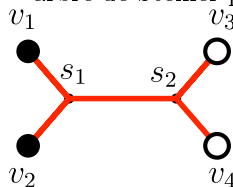
$$V_{exacte} = v_i v_k + v_k v_j \text{ (si arbre dégénéré au point } v_k) \quad (8)$$

où a, b et c sont les 3 distances inter-quarks.

Pour $n = 4$, le problème est assez similaire, mais on a 2 points de Steiner S_1 et S_2 . Le potentiel est alors donné par :

$$V = \min \{v_1 S_1 + v_2 S_2 + S_1 S_2 + v_3 S_2 + v_4 S_2\} \quad (9)$$

FIGURE 2 – arbre de Steiner pour $n = 4$



il n'y a pas de formule pour le potentiel dans le cas général, le principal problème étant que tous les points ne sont pas forcément dans le même plan. Trouver le potentiel revient à chercher la plus

grande distance entre 2 cercles dans l'espace [5]. Toutefois, la condition d'angle est toujours valable pour le point S_1 dans le triangle $v_1v_2S_2$ et pour le point S_2 dans le triangle $S_1v_3v_4$.

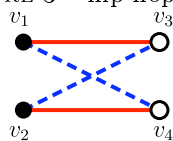
Numériquement, le potentiel est facile à trouver car connaissant la position des 4 particules, il suffit de paramétrer la position des 2 points de Steiner et de faire une minimisation sur 6 variables.

Finalement le potentiel le plus général que l'on utilisera sera :

$$V_{tot} = \min\{\text{flip-flop ; arbre de steiner}\} \quad (10)$$

$$FF = \min\{v_1v_4 + v_2v_3, v_1v_3 + v_2v_4\} \quad (11)$$

FIGURE 3 – flip-flop(FF)



Le flip-flop est un potentiel qui crée une liaison entre 2 mésons par la possibilité de changer de configuration, choisissant celle qui minimise son énergie. Il faut préciser que le flip-flop et l'arbre de Steiner sont 2 potentiels très différents : le premier crée une liaison entre 2 objets blancs (les mésons), ce n'est donc pas une interaction de type forte, contrairement à l'arbre de Steiner.

2 Les mésons

Tout d'abord, pour les mésons, il n'y a pas de différence entre le modèle de Steiner et l'interaction à deux corps habituelle. Par contre, le cas à deux corps est un très bon moyen de comparer les différentes méthodes de résolution numérique de l'équation de Schrödinger, car nous connaissons le résultat exact. Pour les problèmes à 3 et 4 corps, certaines méthodes utilisées seront juste une généralisation de celles présentées pour les mésons.

2.1 Résolution exacte

Utilisant un potentiel linéaire pour le confinement et en notant r la distance inter-quarks, nous avons donc l'hamiltonien suivant :

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \lambda r \quad (12)$$

\mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 étant respectivement les variables conjuguées des vecteurs positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 et r la distance entre le quark et l'antiquark. On fait ensuite un changement de variable :

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (13)$$

On note \mathbf{P} la variable conjuguée de \mathbf{R} , avec la masse M et \mathbf{p} celle de \mathbf{r} , avec la masse réduite μ . On obtient :

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \lambda r = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + H_r \quad (14)$$

$$M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

Le premier terme de H correspond à l'impulsion totale du système qui est une quantité conservée, on ne va donc pas s'en occuper. H_r correspond au mouvement relatif. En utilisant la loi d'échelle (voir annexe 6.1), et sans perte de généralité, on peut se ramener à l'étude de l'hamiltonien réduit :

$$h = (\mathbf{p}^2 + r) \quad H_r = (2\mu)^{-\frac{1}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} h \quad (16)$$

\mathbf{p} correspond au mouvement relatif des particules. Nous allons maintenant résoudre l'équation de Schrödinger pour h (on pose $\hbar = 1$) :

$$(-\Delta + r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (17)$$

On se place dans le système de coordonnées sphériques

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (18)$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (19)$$

et on obtient l'équation radiale :

$$u''(r) - \frac{u(r)}{r^2} l(l+1) + u(r)(E - r) = 0 \quad (20)$$

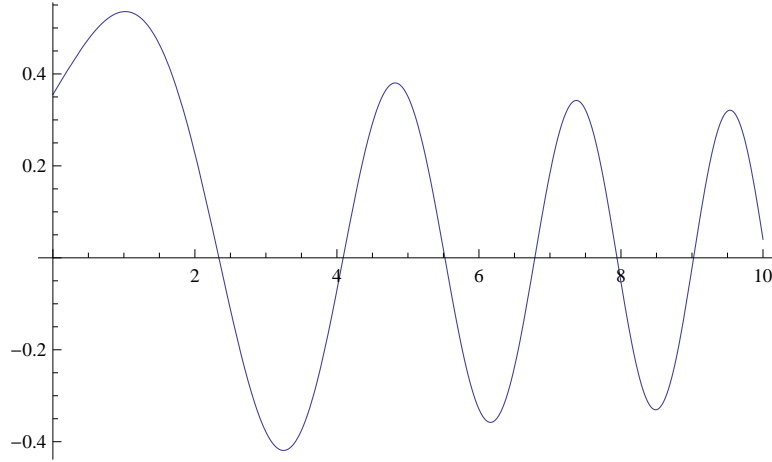
L'état fondamental correspond au cas $l = 0$, d'où l'équation :

$$-u''(r) + (r - E)u(r) = 0 \quad (21)$$

dont l'une des solutions est donnée par la fonction de Airy, $Ai(r)$, pour $E = 0$, c'est à dire :

$$-Ai''(r) + rAi(r) = 0 \quad (22)$$

FIGURE 4 – $\text{Ai}(-r)$



Cependant $E = 0$ n'est pas solution de l'équation de Schrödinger car la fonction de Airy ne possède pas les bonnes conditions limites. En effet pour que $\psi(0)$ ne diverge pas et pour avoir une probabilité égale à 1 on impose les conditions suivantes :

$$u(0) = 0 \quad u(\infty) = 0 \quad (23)$$

En translatant l'équation (21) d'une quantité E , on voit que la fonction d'onde $u(r + E)$ est solution de l'équation de Airy et donc que :

$$u(r) = \text{Ai}(r - E) \quad (24)$$

En imposant la condition limite $\text{Ai}(-E) = 0$ on trouve finalement les valeurs de l'énergie :

$$E = -a_n \quad (25)$$

où les $a_n < 0$ sont les zéros de la fonction de Airy.

2.2 Méthode variationnelle

On s'intéresse à la quantité suivante :

$$E(u) = \frac{\langle u|h|u \rangle}{\langle u|u \rangle} \quad (26)$$

où h est l'hamiltonien réduit du système et u une fonction d'onde quelconque. Le théorème de l'énergie variationnelle (voir annexe 6.2) énonce que si $E(u)$ est stationnaire par rapport à une variation de u dans l'espace des fonctions, alors $u = \varphi_n$ et $E = E_n$, φ_n et E_n étant respectivement les fonctions d'ondes propres et les énergies propres de h . Dans le cas numérique, ce n'est pas possible de minimiser $E(u)$ dans tout l'espace des fonctions et l'on va donc chercher à évaluer :

$$E(a) = \frac{\langle u(a)|h|u(a) \rangle}{\langle u(a)|u(a) \rangle} \quad (27)$$

où $u(a)$ est une fonction d'onde test qui dépend d'un ensemble de paramètres a . Dans notre cas, nous allons choisir comme fonction test une gaussienne :

$$\psi(r, a) = \frac{u(r, a)}{r} = \exp\left(-a \frac{r^2}{2}\right) \quad (28)$$

$u(r, a)$ appartient au sous espace de l'espace des fonctions et donc la minimisation de $E(a)$ par rapport aux paramètres a a peut de chance de donner l'énergie propre. En effet le minimum obtenu dans le sous espace n'est peut être plus un minimum quand on considère l'espace tout entier.

Pour améliorer la précision, on va prendre une somme de gaussiennes comme fonction d'onde test. Le point crucial est que comme le montrent E.Hiyama Y.Kino et M.Kamimura [4] n fonctions d'onde orthogonales $u_n(a)$ correspondant chacune à une somme de n gaussiennes constituent presque un ensemble complet (pour n assez grand). Plus on ajoute de gaussiennes, plus le sous espace auquel appartient $u(a)$ devient grand et plus le minimum obtenu se rapproche du vrai minimum (et donc $E(a)$ de E_n).

L'énergie variationnelle donne donc une borne supérieure aux énergies propres E_n de l'hamiltonien réduit.

Je vais maintenant détailler rapidement les fonctions test et les techniques utilisées pour calculer $E(a)$. Dans un premier temps on prend :

$$u(r, a) = r \exp\left(-a \frac{r^2}{2}\right) \quad (29)$$

r étant la distance entre les deux particules. On peut donc calculer :

$$E(a) = \frac{\int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\partial u(r, a)}{\partial r} \right)^2 + r u(r, a)^2 \right\} dr}{\int_0^\infty u(r, a)^2 dr} \quad (30)$$

$$E(a) = \frac{3a}{2} + \frac{2}{\sqrt{\pi} \sqrt{a}} \quad (31)$$

Puis il faut minimiser par rapport au paramètre a . l'ensemble des résultats, fonctions d'ondes et énergies, seront récapitulés à la fin de la sous section.

L'étape suivante consiste à prendre une somme de gaussiennes :

$$u(r, a) = \sum_i^n c_i r \exp\left(-a \frac{r^2}{2}\right) \quad (32)$$

La difficulté est de mettre en place une méthode qui permet un nombre de termes assez grands, tout en ayant un calcul assez rapide. On voit que si l'on prend n termes avec n paramètres a_i indépendants, alors il va falloir minimiser sur tout les paramètres et cela va prendre beaucoup de temps ou pire, être impossible à cause des instabilités numériques. La première astuce est donc de choisir comme paramètres uniquement a_1 et a_n et d'obtenir les autres, par exemple, grâce à une suite géométrique allant de a_1 à a_n . Dans ce cas, quelque soit le nombre de termes, il ne faudra minimiser que sur 2 paramètres. Dans [2] J-M Richard souligne le fait que pour obtenir une bonne énergie, le nombre de gaussiennes est plus important que la façon de minimiser et c'est pour cette raison que cette manière de faire est efficace.

Ensuite on remarque que l'on peut écrire :

$$u(r, a)^2 = (c_1 \dots c_n) \left(\exp\left\{-\frac{(a_i + a_j)r^2}{2}\right\} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} \quad (33)$$

On peut donc utiliser l'algèbre linéaire pour faire le calcul. On doit résoudre l'équation aux valeurs propres généralisée :

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = EN \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} \quad (34)$$

où A est la matrice correspondant à l'énergie potentielle+énergie cinétique et N celle pour la normalisation :

$$A = Ep_{ij} + Ek_{ij} = \left(\int_0^\infty \{ru(r, a_i)u(r, a_j)\}dr \right) + \left(\int_0^\infty \left\{ \frac{\partial u(r, a_i)}{\partial r} \frac{\partial u(r, a_j)}{\partial r} \right\} dr \right) \quad (35)$$

$$N = \left(\int_0^\infty \{u(r, a_i)u(r, a_j)\}dr \right) \quad (36)$$

Une fois que l'on a résolu l'équation aux valeurs propres généralisée en fonction des paramètres a_i on fait une minimisation. On obtient ainsi les n premières énergies (et leurs vecteurs propres associés).

On peut résumer les résultats dans le tableau suivant :

n	$Evar$	t(seconde)
1	2.344	0.2
3	(2.338 ; 4.215 ; 7.552)	1.3
5	(2.338 ; 4.108 ; 6.098 ; 10.010 ; 18.476)	1.4
10	(2.338 ; 4.088 ; 5.521 ; 6.787 ; 7.945 ; 9.025 ; 10.045 ; 11.014 ; 11.953 ; 12.850)	1.8

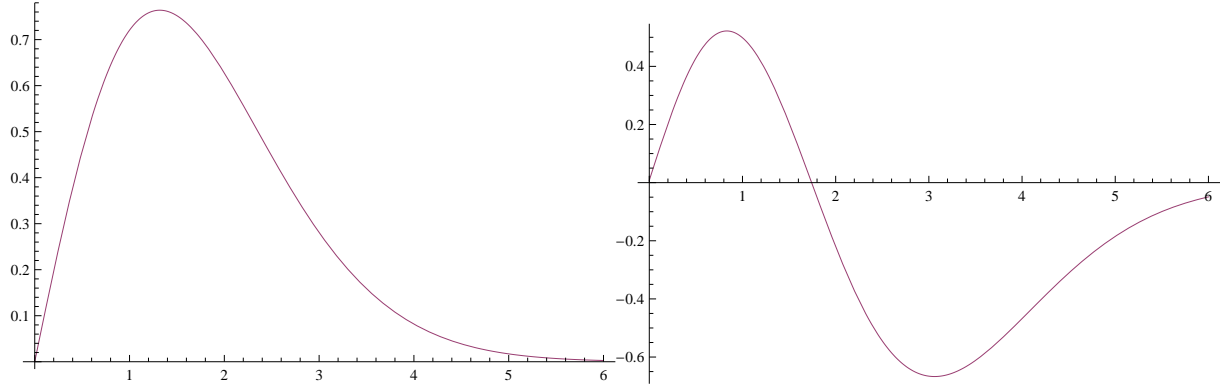
Que l'on compare aux premières valeurs données par la solution exacte :

(2.338 ; 4.087 ; 5.520 ; 6.787 ; 7.944 ; 9.022 ; 10.040 ; 11.008 ; 11.936 ; 12.828)

On voit que pour $n = 10$, les valeurs de l'énergie sont assez bonnes. Globalement, l'énergie fondamentale est mieux approximée. On peut également comparer les fonctions propres (exactes), et celles pour $n = 10$ (ce qui est facile puisque mathematica donne les 10 vecteurs propres $(c_1 \dots c_{10})$ associées aux valeurs propres) :

Remarque : La minimisation ayant été faite sur la somme des énergies, on a donc des paramètres a_1 et a_n « moyennés ». C'est pour ça que dans les cas $n = 3$ et $n = 5$, où il n'y a pas assez de paramètres, il manque des énergies intermédiaires. Si on avait minimisé sur l'énergie fondamentale, il ne manquerait pas certains niveaux d'énergie, mais les valeurs pour les énergies éloignées de l'énergie fondamentale seraient mauvaises. De façon générale, on peut minimiser sur la somme des p premières énergies ou juste sur l'énergie E_i , mais pour que les fonctions d'onde restent orthogonales, on ne peut choisir qu'un jeu de paramètres $(a_1$ et $a_n)$ et donc ne faire qu'une minimisation. C'est à dire qu'on ne peut pas minimiser indépendamment sur chaque énergie et avoir des fonctions orthogonales.

FIGURE 5 – Sur le premier graphe $\varphi_0(r)$ et $u_0(r)$ (pour $n = 10$). Sur le second $\varphi_1(r)$ et $u_1(r)$. Il y a une très bonne correspondance



2.3 méthode par raccordement

Nous allons maintenant voir une technique pour résoudre numériquement l'équation de Schrödinger. On obtient ainsi de très bons résultats et on peut facilement ajouter un moment angulaire.

Connaissant l'équation radiale (20), l'idée est de choisir 2 fonctions d'onde, l'une ayant le bon comportement en zéro, l'autre en l'infini. Ensuite on cherche dans quels cas ces deux fonctions se raccordent correctement en un point donné. Ce ne sera possible que pour certaines valeurs du paramètre E et on obtient ainsi la quantification de l'énergie.

On rappelle que les conditions aux limites sont données par les équations (23). Lorsque $r \rightarrow 0$ l'équation radiale devient :

$$-u''(r) + \frac{u(r)}{r^2}l(l+1) = 0 \quad (37)$$

En posant $u(r) = r^a$ on trouve que proche de l'origine, la fonction d'onde se comporte comme :

$$u(r) \propto r^{l+1} \quad (38)$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$ l'équation radiale devient :

$$-u''(r) + ru(r) = 0 \quad (39)$$

On trouve alors qu'à l'infini :

$$u(r) \propto \exp\left\{-\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (40)$$

On résout alors l'équation deux fois en fonction du paramètre E : la première pour la fonction d'onde $u(r)$ en imposant les bonnes conditions près de l'origine, et la seconde pour $v(r)$ avec les bonnes conditions à l'infini. On choisit alors un point quelconque r_r et l'on pose la condition de raccordement en annulant le wronskien :

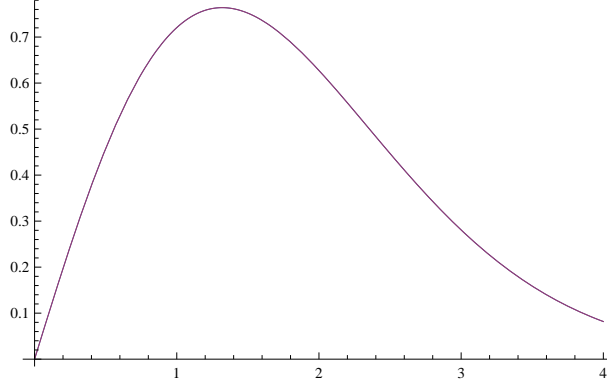
$$w(E, r_r) = u(E, r_r)v'(E, r_r) - v(E, r_r)u'(E, r_r) = 0 \quad (41)$$

ce qui impose l'égalité des deux fonctions et de leur dérivée a une constante multiplicative près.

Les résultats obtenus sont très bons et les fonctions d'onde se tracent immédiatement :

énergie exacte	2.338	4.088	5.520	6.787	7.944	9.022	10.040	11.008	11.936	12.828
énergie approchée	2.338	4.087	5.520	6.786	7.944	9.022	10.040	11.008	11.936	12.828

FIGURE 6 – fonction d'onde exacte et fonction d'onde par raccordement en fonction de r . La correspondance est très bonne.



La méthode par raccordement est plus simple à mettre en place et plus rapide que la méthode variationnelle avec les gaussiennes. De plus, la valeur de l'énergie est bonne quelque soit le niveau tandis que pour 10 gaussiennes, les 5 derniers niveaux ont une moins bonne précision. Le principal désavantage de la méthode par raccordement est qu'on ne l'utilise que pour des potentiels à symétrie sphérique (ce qui est le cas pour les mésons). Pour les baryons où le potentiel peut dépendre des angles, on devra faire une moyenne angulaire. Les cas où on ne prend pas en compte la dépendance angulaire sont parfois appelés cas scalaires. Finalement, l'un des avantages de la méthode variationnelle est de pouvoir utiliser autant de gaussiennes que l'on veut et donc de pouvoir augmenter la précision (évidemment le temps de calcul augmente aussi). Dans la pratique, les résultats convergent très vite et pour ce que l'on fait, inutile d'aller au delà de 10 termes.

3 Les baryons

Comme précisé précédemment, le but générale de ce stage n'est pas de réussir à reproduire exactement les expériences de physique des particules mais plutôt d'étudier l'effet d'un potentiel linéaire pour l'interaction forte. Dans ce sens, il n'est pas primordial d'étudier le cas le plus général et on se contentera de regarder le cas à 3 masses égales. Une généralisation à $m_1 = m_2 \neq m_3$ est facile car il suffit de changer la valeur de la masse réduite μ et d'utiliser la loi d'échelle (section 6.1)

Cette section à 2 objectifs : Le premier est de résoudre numériquement le problème à 3 corps pour un potentiel linéaire. Le second est d'appliquer ces méthodes pour le potentiel arbre de Steiner, que j'appellerais potentiel en « Y » dans le cas des baryons.

Pour ce faire, on utilisera les méthodes des gaussiennes et du raccordement étudiées précédemment.

3.1 Interaction à 2 corps

La difficulté du problème à trois corps réside dans la résolution d'un système d'équations différentielles couplées. Dans notre cas (résolution numérique) on suppose déjà connaître la solution (fonction d'onde test) et la difficulté réside dans le fait de trouver une « bonne » fonction d'onde pour le potentiel considéré. Une « bonne » fonction d'onde est celle qui donne la valeur de l'énergie la plus basse possible, se rappelant que l'énergie obtenue par la méthode variationnelle constitue une borne supérieure pour l'énergie propre. On discutera un peu plus tard des caractéristiques que doit avoir une fonction d'onde pour donner une bonne approximation de l'énergie, mais nous allons d'abord commencer par le cas scalaire pour pouvoir comparer avec les mesons.

3.1.1 Etude du cas scalaire

Pour l'étude qui va suivre, on va utiliser les coordonnées de Jacobi :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{2} \\ \mathbf{y} &= (2\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\sqrt{6} \\ \mathbf{R} &= (\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/\sqrt{3} \end{aligned}$$

\mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 et \mathbf{r}_3 étant les positions des 3 quarks. L'hamiltonien réduit s'écrit :

$$h = p_x^2 + p_y^2 + \mathbf{r}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{r}_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{r}_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (42)$$

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ et ainsi de suite.

Dans un cas comparable au méson (c'est à dire dans le cas d'une matrice scalaire, pas de dépendance angulaire des fonctions d'ondes) on s'attend à avoir [2] :

$$Ep(qqq) = \frac{3}{2}Ep(qq\bar{q}) \quad (43)$$

Ep étant l'énergie potentielle.

On choisit pour commencer la fonction d'onde suivante :

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp \left[-(x, y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \quad (44)$$

où x est la norme du vecteur \mathbf{x} et de même pour y . Il n'y a pas de dépendance angulaire car on peut facilement vérifier que :

$$x^2 + y^2 = \mathbf{r}_{12}^2 + \mathbf{r}_{13}^2 + \mathbf{r}_{23}^2 \quad (45)$$

En adaptant légèrement la formule pour l'énergie avec une fonction d'onde scalaire, (30), on trouve :

$$E(a) = 3a + \frac{3}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} = 3a + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} = 3a + \frac{3}{2}Ep(qq\bar{q}) \quad (46)$$

On va maintenant regarder le cas où l'on fait une somme de gaussiennes. Pour l'instant nous sommes dans le cas scalaire, mais autant établir directement les formules dans le cas de matrices symétriques quelconques :

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \exp \left\{ -(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) A_i \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ y_3 \end{pmatrix} \right\} = \sum_i \exp\{-a\mathbf{x}^2 - b\mathbf{y}^2 - c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\} \quad (47)$$

où A_i est une matrice 2x2 symétrique quelconque. Après diagonalisation de la matrice A_i les matrices énergie cinétique et de normalisation sont calculables analytiquement et on trouve :

$$Ek_{ij}(a) = \text{facteur} \times \text{Trace} \left\{ \frac{[A_i^{-1} + A_j^{-1}]^{-1}}{2} \right\} / \text{Det} \left[\frac{A_i + A_j}{2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (48)$$

$$En_{ij}(a) = \frac{\text{facteur}}{\text{Det} \left[\frac{A_i + A_j}{2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (49)$$

On rappelle que a dénote l'ensemble des paramètres. Pour la matrice énergie potentielle il faut en plus faire une rotation pour orienter l'argument du potentiel selon l'un des axes du référentiel :

$$V(\mathbf{R}) \rightarrow V'(\mathbf{R}') \quad \mathbf{R}' = \mathbf{x}' \quad (50)$$

On peut alors intégrer et on trouve :

$$Ep_{ij}(a) = \sum_k \alpha'_k \frac{1}{\text{Det} \left[\frac{A_i + A_j}{2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (51)$$

$$\alpha'_k = (\alpha_k, \beta_k) \left[\frac{A_i + A_j}{2} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad (52)$$

où (α_k, β_k) sont les coefficients dans le potentiel :

$$V = r_{12} + r_{13} + r_{23} = |\mathbf{x}| + \left| \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y} \right| + \left| \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y} \right| \quad (53)$$

$$(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0) \quad (54)$$

$$(\alpha_2, \beta_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (55)$$

$$(\alpha_3, \beta_3) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (56)$$

Revenons au cas scalaire, on utilise donc que des matrice du type $A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$. On choisit les n paramètres a_i de la même façon que pour les mésons, on ne fera donc la minimisation que sur a_1 et a_n . Comme avant, il ne reste donc plus qu'à résoudre l'équation aux valeurs propres généralisée (34).

On souhaite maintenant comparer ces résultats à ceux obtenu par raccordement. On fait exactement les mêmes étapes que pour les mésons en résolvant numériquement l'équation :

$$-u''(r) + v(r)u(r) = 0 \quad (57)$$

et en utilisant le wronskien. $v(r)$ est le potentiel qui a été moyenné angulairement. On obtient alors le tableau suivant :

Méthode	Energie
5 gaussiennes avec minimisation sur le niveau i	3.8647 ; 5.3280 ; 6.6224
raccordement	3.8646 ; 5.3280 ; 6.6223

L'égalité entre les résultats indique que les formules utilisées pour Ek_{ij} , Ep_{ij} et En_{ij} semblent être bonnes.

3.1.2 Cas général et recherche de la bonne symétrie

Le but est de trouver quelle est la fonction d'onde test qui donne l'énergie la plus basse. On pourrait faire la somme de plusieurs termes avec des matrices symétriques quelconques, minimiser sur tout les paramètres et voir ce que l'on obtient. Mais en minimisant sur $3*n$ paramètres, n étant le nombre de termes, on risque vite d'avoir des instabilités numériques.

En étudiant les symétries, il est possible d'orienter les recherche et de comprendre les résultats obtenu. Dans notre cas on a 3 quarks identiques, la fonction d'onde totale $\psi_{spatiale} \otimes \psi_{spin} \otimes \psi_{couleur}$ doit donc être antisymétrique. On sait que la fonction d'onde de couleur est antisymétrisante et que pour $S = 0$ la fonction d'onde de spin est symétrique ($E_0 \rightarrow l = S = 0$). On en déduit donc que la fonction d'onde spatiale doit être globalement symétrique. Si on prenait un $\psi_{spatiale}$ globalement antisymétrique, alors on se rapprocherait d'un état excité (par exemple $l = 1$) et malgré la minimisation et le nombre de termes utilisés, la valeur de l'énergie resterait bien trop élevée. Insistons sur le fait que la symétrie demandée est globale, ce qui signifie que la fonction d'onde spatiale est invariante sous $r_1 \leftrightarrow r_2 \leftrightarrow r_3$ mais pas forcément chaque termes (de la fonction d'onde) indépendamment. En effet on va voir qu'une telle fonction d'onde donne une meilleur valeur de l'énergie qu'une somme de gaussiennes scalaires (où cette fois chaque terme est symétrique). ce point a été très important dans l'étude de l'hydrogène.

Finalement, une autre façon de raisonner et qui sera utilisée pour le tetraquark est de dire que l'état d'énergie la plus basse est celui qui possède les même symétries que le potentiel. Dans notre cas, le potentiel agissant de façon identique entre toutes les particules, il est logique que dans l'état fondamental, toutes les particules jouent le même rôle et donc que l'on ai une fonction d'onde spatiale symétrique.

On force la symétrisation en choisissant une fonction d'onde avec les 3 matrices suivantes :

$$\left(A_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, A_2 = O\left(\frac{2\pi}{3}\right)A_1O^t\left(\frac{2\pi}{3}\right), A_3 = O\left(-\frac{2\pi}{3}\right)A_1O^t\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) \quad (58)$$

où $O(\theta)$ est une matrice de rotation. On obtient alors les résultats suivants :

Energie	vecteur propres
3.867	$c_1 = c_2 = c_3$
5.5 dégénéré 2x	$c_1 = 0, c_2 = -c_3$

On va maintenant comparer les résultats d'une fonction d'onde globalement symétrique avec ceux pour une fonction d'onde où chaque terme est symétrique.

type	énergie fondamentale
globalement symétrique (6 termes)	3.8631
gaussiennes scalaire (6 termes)	3.8646

Comme on l'avait affirmé un peu avant, la fonction d'onde globalement symétrique donne une meilleure valeur de l'énergie. La différence entre les 2 fonctions d'onde sont les termes d'interférence.

Remarque : Ajouter beaucoup de termes améliore la valeur de l'énergie de quelques centièmes, voir quelques dixièmes, tandis que passer d'une symétrie à l'autre peu changer la valeur de quelques unités. Pour le tetraquark, il sera donc clairement plus important de commencer par chercher la bonne symétrie (ce qui sera plus compliqué car le potentiel est assez particulier) avant de sommer beaucoup de termes.

3.2 Potentiel en Y

On peut maintenant appliquer au potentiel en Y le formalisme précédent. Pour les matrices $E_{k_{ij}}$ et $E_{n_{ij}}$ les formules sont identiques, par contre, avec le potentiel en Y, on ne peut plus utiliser la formule pour $E_{p_{ij}}$ et on va être obligé de faire l'intégration numériquement. Plusieurs possibilités s'offrent à nous : on peut soit utiliser la formule exacte du potentiel (7,8) soit faire une minimisation sur 3 variables pour trouver le point S.

Nous ferons ces tests uniquement dans le cas simple des fonctions d'onde scalaires.

3.2.1 Test et comparaison des deux méthodes

Pour faire les tests, on choisit la position des quarks en prenant 3 points au hasard. La première méthode consiste à choisir $S = (X, Y, Z)$, de calculer les distances aux trois quarks et de faire une minimisation par rapport aux 3 variables X , Y et Z . L'avantage de cette méthode est qu'il n'y a pas besoin de prendre en compte les cas particuliers. Si on fait une boucle (sous mathematica) où l'on calcule le potentiel et que l'on imprime la valeur des angles, la position des 3 quarks et celle de S, on voit (comme on s'y attendait) que la condition pour les angles supérieurs à 120° est automatiquement respectée. De plus on connaît les coordonnées du point S, ce qui est une tâche plus difficile que de connaître la valeur du potentiel (pour le calcul exacte), mais dans notre cas ce ne sera pas nécessaire.

La seconde méthode consiste à utiliser la formule exacte, mais dans ce cas là, il faut programmer les cas particuliers, c'est à dire lorsque l'arbre de Steiner est dégénéré. On utilise alors un potentiel de ce genre :

$$If[a^2 + b^2 - c^2 \leq -bc, b + c, (7)] \quad (59)$$

La première partie de la condition « if » évalue la valeur de l'angle et choisit ensuite d'utiliser soit la formule pour l'arbre dégénéré, soit la formule (7) pour le cas non dégénéré. L'avantage de cette technique est sa rapidité. Concernant les valeurs numériques, les deux méthodes sont équivalentes.

3.2.2 Calcul de l'énergie

On va calculer l'énergie en utilisant la formule exacte, qui est plus rapide. Pour éviter les problèmes d'intégration numérique, on va utiliser les coordonnées hypersphériques qui donnent de très bons résultats.

$$\mathbf{x} = r \cos(k_1) \{\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)\} \quad (60)$$

$$\mathbf{y} = r \sin(k_1) \{1, 0, 0\} \quad (61)$$

on laisse de coté les 2 angles de rotation globale du système. Ce jeu de coordonnées permet de mettre r en facteur dans les intégrants et de pouvoir faire l'intégrale sur cette variable analytiquement. Les 3 matrices à calculer sont donc celles de l'énergie cinétique (48), de l'énergie de normalisation (49) et de l'énergie potentielle :

$$E_{p_{ij}} = \int \psi_i(r, k_1, \theta, \phi) V(r, k_1, \theta, \phi) \psi_j(r, k_1, \theta, \phi) d^6r \quad d^6r = r^5 dr \cos^2(k_1) \sin^2(k_1) dk_1 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (62)$$

Comme précédemment, on commence par une fonction d'onde avec une seule gaussienne scalaire.

$$\psi(a) = \exp\left\{-\frac{a}{2}(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{a}{2}r^2\right\} \quad (63)$$

Après intégration, on trouve l'énergie suivante :

$$E(a) = 3a + \frac{15\sqrt{\pi}}{16\sqrt{a}} \neq 3a + \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{a}} \quad (64)$$

Après minimisation, on trouve les valeurs suivantes que l'on compare avec celles pour le potentiel à 2 corps :

$$E_{var}(Y) = 4.1217 \quad a \rightarrow 0.457 \quad (65)$$

$$E_{var}(\text{interaction 2 corps}) = 3.8711 \quad a \rightarrow 0.430 \quad (66)$$

Pour le cas d'une fonction d'onde scalaire, la valeur de l'énergie donnée par le potentiel en Y est supérieure à celle pour le potentiel à 2 corps. Comme on pouvait l'espérer, les valeurs ne sont pas très différentes (on ne veut pas trop changer la spectroscopie des baryons qui marche plutôt bien). Il serait intéressant de voir lequel de ces deux modèles correspond le mieux aux valeurs expérimentales, mais pour ça il faudrait utiliser un potentiel plus réaliste comme (5) et fixer les constantes.

Ajouter plus de fonctions d'onde scalaires augmenterait légèrement la précision, mais ce n'est pas l'objectif ici. On a résolu le problème à 3 corps pour le potentiel arbre de Steiner et on obtient des valeurs voisines de celles obtenues pour des modèles plus classiques, on peut donc passer à l'étape suivante

4 Tetraquark

Le but de cette section est de voir si le potentiel (arbre de Steiner+flip-flop) (10) permet d'obtenir un tetraquark stable pour des masses égales. Après quelques tests sur les potentiels, on fera les calculs en 2D (plus facile d'avoir un état lié) puis en 3D.

4.1 Quelques tests

Les buts de ces tests sont de vérifier si les potentiels sont bien programmés mais aussi d'étudier leur contribution respective pour l'énergie. Pour 4 particules, le potentiel arbre de Steiner possède 2 points de Steiner S_1 et S_2 et il doit toujours vérifier la condition d'angle pour les triangles $r_1r_2S_2$ et $r_3r_4S_1$. On rappelle également que le flip-flop crée une liaison en choisissant celle des deux configurations qui minimise l'énergie. Pour des quarks (et antiquarks) de masses identiques, ces configurations doivent être équiprobables.

Après avoir vérifié que la condition d'angle est bien respectée pour l'arbre de Steiner, on fait un test en choisissant 4 points au hasard pour comparer arbre de Steiner et flip-flop. On vérifie alors deux choses : la première est que les deux configurations pour le flip-flop, interviennent autant l'une que l'autre et la seconde est que l'arbre de Steiner n'intervient que pour environ 1.3% de l'énergie potentielle. On pourra donc commencer les simulations en ne considérant que le flip-flop.

Le dernier test est dans le but de simplifier la simulation de l'arbre de Steiner. l'une des raisons qui rend l'évaluation de ce potentiel compliquée est le fait qu'il y ai beaucoup de cas particuliers. On fait donc un test pour voir si l'une des configurations, dégénérée ou non dégénérée, intervient plus que l'autre. Ce n'est pas le cas et lors de la simulation on devra donc prendre les deux en compte.

4.2 En 2 dimensions

Pour le cas en 2 dimensions, on ne va considérer que le potentiel flip-flop. Comme on va le voir, ce sera déjà suffisant pour obtenir un état lié. On a un état lié sous la condition suivante :

$$E_{var} \lesssim 2E_{exacte}(mésón) \quad (67)$$

La première chose à faire est donc de calculer (en 2D) la valeur de l'énergie de liaison. On a toujours l'équation opératorielle suivante :

$$(\mathbf{p}^2 + r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (68)$$

Mais la valeur du laplacien change en 2D et on obtient donc l'équation radiale :

$$-u''(r) + \left(r - \frac{1}{4r^2}\right)u(r) = Eu(r) \quad (69)$$

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} \quad (70)$$

L'équation (69) n'a plus pour solutions les fonctions de Airy et on ne connaît donc pas la valeur exacte du seuil. On peut cependant calculer le seuil en utilisant les techniques habituelles de raccordement ou de gaussiennes. On utilise donc 10 gaussiennes scalaires (l'avantage étant que l'on peut estimer facilement l'erreur en regardant le cas 3D) et on obtient alors pour l'énergie seuil :

$$E_{seuil} = 3.474 \quad (71)$$

On peut commencer l'évaluation de l'énergie variationnelle à 4 corps avec une gaussienne scalaire et on obtient une énergie de $E_{var} = 3.611$. C'est largement insuffisant, ce n'est même pas a peine

de faire une somme de gaussiennes scalaires, car on a déjà vu que cela améliorerait l'énergie que de quelques centièmes.

Comme discuté dans le cas des baryons, le plus important est de trouver la fonction d'onde avec la bonne symétrie, c'est à dire celle du potentiel. On rappelle que le potentiel flip-flop correspond à $\min \left\{ \begin{array}{c} q \quad \bar{q} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \\ \bar{q} \quad q \end{array}, \begin{array}{c} q \leftrightarrow \bar{q} \\ \bar{q} \leftrightarrow q \end{array} \right\}$. On va donc choisir une fonction d'onde type molécule, qui aura deux termes, un pour chaque configuration mais en ajoutant un lien entre les deux mésons. Schématiquement, on choisit donc :

$$\psi(r) = \exp \left\{ \begin{array}{c} q \quad \quad \bar{q} \quad q \leftrightarrow \bar{q} \\ b \updownarrow \longleftrightarrow \updownarrow + c \quad \updownarrow \\ \bar{q} \quad \quad q \quad \bar{q} \leftrightarrow q \end{array} \right\} \quad (72)$$

L'amélioration est immédiate et on obtient une énergie de $E_{var} = 3.420$. Une fonction d'onde de ce type est donc suffisante pour avoir un état lié. Le cas 2D était un test, le fait que l'on obtienne une liaison ne veut pas dire qu'il y en a une en 3D, mais si on ne l'avait pas obtenu alors on aurait eu peu de chance d'en avoir une 3D. Ayant la liaison, on ne souhaite pas approfondir et on passe directement au cas 3D.

Remarque : ici et dans les cas suivants, la minimisation sur les paramètres a n'est pas faite numériquement car cela prend trop de temps. On minimise manuellement en faisant un tableau pour différentes valeurs des paramètres.

4.3 En 3 dimensions

Comme pour le cas 2D on commence par donner l'énergie seuil, qui cette fois est calculable exactement :

$$E_{seuil} = 4.676 \quad (73)$$

Pour le potentiel flip-flop et la fonction d'onde molécule (72) on trouve l'énergie variationnelle :

$$E_{var} = 4.671 \quad (74)$$

ce qui montre déjà une liaison, bien que comme on s'y attendait pour la 3D, l'effet soit beaucoup plus faible. L'étape suivante est d'évaluer l'énergie en prenant en compte le potentiel arbre de Steiner et de voir son influence sur l'énergie. Il existe plusieurs façons de faire, par exemple, dans l'article [5], une formule est donnée pour réduire la minimisation de 6 (les 2 points de Steiner) à 2 variables. Par simplicité et parce que l'on ne cherche pas à pousser le calcul trop loin, on va utiliser la méthode qui consiste à paramétriser les positions de S_1 et S_2 par 6 variables. On fait ensuite une intégrale numérique où à chaque point d'intégration la valeur du potentiel est donnée par (9).

On est obligé de mettre beaucoup de points de calcul pour éviter les instabilités numériques, après environ 2H30 on trouve :

$$E_{var} = 4.497 \quad (75)$$

ce qui correspond à une amélioration de l'énergie totale d'environ 3.3% ce qui est de l'ordre de ce que l'on attendait. En utilisant le potentiel (10) on trouve donc un état a 3D qui est clairement lié.

5 Conclusion

La partie linéaire d'un potentiel (arbre de Steiner + flip-flop) permet donc d'avoir un tetraquark stable. L'étape suivante serait de chercher à expliquer les pics récemment trouvés par les physiciens des particules, mais pour ça, beaucoup de choses resteraient à faire. Il faudrait fixer les constantes de la théorie et surtout utiliser un potentiel plus réaliste, mais tout les termes à ajouter au potentiel ne sont pas forcément attractifs et c'est pour cette raison que dans un cas plus réaliste le tetraquark avec masses égales n'est plus stable (il l'est par contre quand il y a une grande inégalité entre la masse des quarks et des antiquarks).

Le tetraquark serait donc un moyen d'expliquer les états récemment observés dans les collisionneurs, d'un autre côté, la physique des quarks lourds n'est pas encore très bien connue, et on pourra peut être expliquer les pics observés en approfondissant les connaissances en QCD et sur les potentiels utilisés pour les mésons et baryons. Les expériences ne permettent pas, ni de confirmer ni de rejeter le tetraquark, mais le potentiel en arbre de Steiner semble assez compliqué, et il est d'usage d'utiliser le principe de simplicité, ce qui peut être un argument pour étudier les théories plus « classique ». Un des futurs objectifs pourrait donc être de travailler sur les observables de la théorie des multiquarks pour pouvoir enfin l'accepter ou la rejeter.

6 Annexes

6.1 Loi d'échelle

On va montrer que l'énergie et la fonction d'onde sont des fonctions connues des paramètres μ (masse réduite) et λ (constante de couplage). Dans ce cas il suffit de résoudre une fois l'équation de Schrödinger pour une valeur donnée des paramètres (par exemple $\mu = \lambda = 1$) pour connaître les solutions quelque soit la valeur des paramètres.

On va faire la démonstration dans un cas légèrement plus général, en partant avec l'hamiltonien suivant :

$$\left\{h = \frac{p^2}{\mu} + \lambda r^\beta\right\}u(r, \mu, \lambda) = E(\mu, \lambda)u(r, \mu, \lambda) \quad (76)$$

Puis on fait une dilatation spatiale $r \rightarrow r_0 r$, l'équation devient alors :

$$\frac{p^2}{\mu r_0^2} + \lambda r_0^\beta r^\beta u(r_0 r, \mu, \lambda) = E(\mu, \lambda)u(r_0 r, \mu, \lambda) \quad (77)$$

On choisit r_0 en imposant :

$$\frac{1}{\mu r_0^2} = \lambda r_0^\beta = \lambda^{\frac{2}{2+\beta}} \mu^{-\frac{\beta}{\beta+2}} \quad (78)$$

On peut donc réécrire l'équation de la façon suivante :

$$(p^2 + r^\beta)u(r_0 r, \mu, \lambda) = E(\mu, \lambda)\lambda^{-\frac{2}{2+\beta}} \mu^{\frac{\beta}{\beta+2}} u(r_0 r, \mu, \lambda) \quad (79)$$

Or l'opérateur dans la partie gauche de l'équation est celui correspondant au cas $\mu = 1$ et $\lambda = 1$. On a donc :

$$u(r_0 r, \mu, \lambda) = u(r, 1, 1) \quad (80)$$

$$E(\mu, \lambda) \lambda^{-\frac{2}{2+\beta}} \mu^{\frac{\beta}{\beta+2}} = E(1, 1) \quad (81)$$

soit en inversant les équations précédentes :

$$u(r, \mu, \lambda) = u\left(\frac{r}{r_0}, 1, 1\right) \quad (82)$$

$$E(\mu, \lambda) = E(1, 1) \lambda^{-\frac{2}{2+\beta}} \mu^{\frac{\beta}{\beta+2}} \quad (83)$$

D'où la généralité du hamiltonien réduit (16).

6.2 Théorème de l'énergie variationnelle

On va montrer que dans le cas où l'énergie variationnelle est stationnaire, elle correspond à l'énergie propre, et les fonctions d'onde u , sont les fonctions propres du hamiltonien H .

$$E(u) = \frac{\langle u | H | u \rangle}{\langle u | u \rangle} = \frac{\int u H u^*}{\int u u^*} \quad (84)$$

On fait une variation infinitésimale de la fonction test

$$u = u + \delta u \quad (85)$$

en utilisant les 2 équations précédentes on a :

$$\delta E(u) \int u u^* + E(u) \int u \delta u^* + E(u) \int \delta u u^* = \int u H \delta u^* + \int \delta u H u^* \quad (86)$$

On pose la condition de stationnarité $\delta E(u) = 0$ et on obtient :

$$\int \delta u (H - E(u)) u^* + \int u (H - E(u)) \delta u^* = 0 \quad (87)$$

et donc :

$$H u = E u \quad (88)$$

ce qui est bien l'équation aux valeurs propres pour H .

Références

- [1] « Physics of atoms and molecules » : B.H.Bransden and C.J.Joachain
- [2] « The nonrelativistic three-body problem for baryons » : J-M.Richard
- [3] « Quarks & leptons » : F.Halzen & A D.Martin
- [4] « Gaussian Expansion Method for Few-Body Systems » : E.Hiyama, Y.Kino and M.Kamimura

- [5] « Stability of asymmetric tetraquarks in the minimal-path linear potential » : C.Ay, J-M.Richard and H.Rubinstein
- [6] « Tetraquark spectroscopy : A symmetry analysis » : J.Vijande and A.Valcarce