

Institut Camille Jordan

Rapport de stage de M2

Responsable du Stage: Alessandra FRABETTI
Université Claude Bernard - Lyon 1

Algèbres de Hopf
dans les
Théories de champs scalaires

Nicolas MARIE

Résumé

On étudie la renormalisation dans le formalisme des algèbres de Hopf. On s'intéresse en particulier aux constructions algébriques sur les graphes de Feynman et à une reformulation de l'algorithme BPHZ. Après avoir établi certaines propriétés des opérateurs d'insertions sur les graphes de Feynman on étudie plus particulièrement la renormalisation de la théorie en ϕ_4^4 dans le schéma de régularisation dimensionnelle et de soustraction minimale en donnant une preuve de la localité des contretermes. Finalement on introduit le problème de la gravité en tant que théorie quantique des champs ainsi que des outils pour son étude.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Algèbre de Hopf des graphes de Feynman	2
2.1	Algèbre de Hopf de la renormalisation	2
2.2	Structure des moments	4
2.3	Caractères de l'algèbre	4
2.4	Opérations d'insertions	6
3	Renormalisation de la théorie en ϕ_4^4	9
3.1	L'algorithme BPHZ	9
3.2	Utilisation du groupe des caractères	10
3.3	Localité des contretermes	11
4	Algèbre de Hopf des graphes 1PI	12
4.1	Powercounting de la relativité générale	12
4.2	Core Hopf algebra	13
5	Conclusion	15
A	Algèbres de Hopf et schémas en groupes affines	16
A.1	Algèbres de Hopf	16
A.2	Schémas en groupes affines	16
	Bibliographie	19

1 Introduction

Partant d'une théorie quantique des champs les règles de Feynman nous permettent d'associer aux graphes de la théorie qui décrivent les processus physiques des intégrales appelées amplitudes de Feynman. Le problème du physicien est que ces intégrales, fonctions des moments conservés lors du processus, sont souvent divergentes. L'objectif de la renormalisation est alors de donner un sens à ces amplitudes en les transformant en des fonctions des moments bien définies, tout en préservant leur sens physique.

Une méthode permet d'opérer cette transformation en travaillant un par un sur chaque graphe donnant une amplitude divergente. C'est l'algorithme de Bogoliubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann qui nous permet, après avoir régularisé l'intégrale, c'est-à-dire lui avoir donné un sens mathématique, de construire ces amplitudes physiques. Ces opérations entraînent une modification des constantes de couplage de la théorie qui deviennent ainsi des séries en puissance des constantes de couplages nues. Un théorème de Zimmermann montre que la procédure BPHZ converge.

Dirk Kreimer et Alain Connes ont mis en évidence le fait que des structures d'algèbres de Hopf sont sous-jacentes à l'algorithme BPHZ. Ces structures sont construites directement sur les graphes de Feynman de la théorie et sont spécifiées par l'algèbre de Hopf de renormalisation qui exploite la décomposition d'un graphe de Feynman divergent en ses sous-graphes divergents. On va s'attacher à décrire cette construction dans le cas simple des théories de champs scalaires et plus particulièrement pour la théorie en ϕ_4^4 sur l'espace-temps euclidien (\mathbb{R}^4, δ) dont la densité lagrangienne est donnée par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4$$

On va ensuite étudier en détail les propriétés de l'opérateur d'insertion B_+ qui permet de décomposer les graphes une particule irréductible. On montre ici en particulier ses propriétés liées à la cohomologie de Hochschild de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Ceci nous permet de reformuler la procédure BPHZ pour calculer les facteurs de renormalisation de la théorie en ϕ_4^4 noté Z_g, Z_m et Z_ϕ tels que la densité lagrangienne renormalisée soit :

$$\mathcal{L}_r = \frac{Z_\phi}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{Z_m m^2}{2}\phi^2 - \frac{Z_g g}{4!}\phi^4$$

On termine en prouvant que les facteurs de renormalisation sont bien des constantes, c'est ce qu'on appelle la localité des contretermes.

Finalement, on explore le cas de la théorie du graviton pour lequel on montre que tous les graphes donnent des amplitudes divergentes. Ceci nous amène à considérer l'introduction d'une autre algèbre de Hopf dont l'objectif sera de traiter la renormalisation de la gravité d'un point de vue non perturbatif.

2 Algèbre de Hopf des graphes de Feynman

2.1 Algèbre de Hopf de la renormalisation

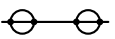
Les graphes de Feynman sont un outil extraordinairement puissant pour organiser les opérations de la théorie quantique des champs. On prend ici le parti d'explorer les structures sous-jacentes à ces graphes. Par souci de clarté nous allons nous concentrer sur les théories de champs scalaires dans l'espace des impulsions. L'espace-temps est l'espace euclidien de dimension 4. Du point de vu graphique nous ne considérons qu'un seul type de ligne, c'est-à-dire qu'un seul champ scalaire se propage. Tout nos exemples concernent la théorie en ϕ_4^4 .

Avant toute chose il nous faut définir ce que sont les graphes de Feynman d'une théorie. Pour cela on établit une correspondance entre les monômes de la densité lagrangienne d'une théorie et un ensemble de types de vertex appellés vertex d'interaction. Soit \mathcal{T} une théorie des champs, on note $\text{Mon}(\mathcal{T})$ l'ensemble des monômes de la densité lagrangienne associée et $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ l'ensemble des vertex d'interaction. On définit $\mathfrak{F} : \mathcal{I} \rightarrow \text{Mon}(\mathcal{T})$ l'application qui à un vertex d'interaction associe son monôme correspondant. On associe également à l'ensemble des champs de \mathcal{T} l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ des lignes de propagation. \mathfrak{F} correspond aux règles de Feynman de la théorie.


Pour la théorie en ϕ_4^4 on veut étudier la dynamique d'un champ $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ associé à l'unique élément de $\mathcal{P}(\phi_4^4) = \{ \text{---} \}$. La densité lagrangienne est composée des éléments de $\text{Mon}(\phi_4^4) = \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2, -\frac{m^2}{2}\phi^2, -\frac{g}{4!}\phi^4 \right\}$ auxquels correspondent les vertex d'interaction de $\mathcal{I}(\phi_4^4) = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array}, \begin{array}{c} \text{---} \\ (0) \end{array}, \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right\}$ par :

$$\mathfrak{F} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array} \right) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 \quad , \quad \mathfrak{F} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ (0) \end{array} \right) = -\frac{m^2}{2}\phi^2 \quad , \quad \mathfrak{F} \left(\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right) = -\frac{g}{4!}\phi^4$$

Définition - Graphes de Feynman. Un graphe de Feynman associé à une théorie \mathcal{T} est un graphe fini construit à partir des lignes de $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ avec les vertex de type $\mathcal{I}(\mathcal{T})$.

Par exemple pour la théorie en ϕ_4^4 :  .

Définition - Graphes 1PI. Un graphe est dit une particule irréductible, noté 1PI, si il reste connexe lorsqu'on lui enlève une ligne interne quelconque.

Par exemple :  .

L'essentiel de nos constructions utilise la notion de graphe une particule irréductible. Pour une théorie des champs donnée, on notera $1\text{PI}(\mathcal{T})$ l'ensemble des graphes de Feynman 1PI de la théorie. On notera également $1\text{PI}(\mathcal{P}(\mathcal{T}))$ l'ensemble des graphes une particule irréductible construit avec les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ sans contrainte sur les types de vertex autorisés. Cet ensemble nous permet de construire la core Hopf algebra (cf. §4).

On doit considérer deux opérations sur un graphe 1PI, prendre son résidu et contracter sa structure interne. Soit Γ un graphe 1PI et γ un sous graphe 1PI propre de Γ . La quantité $\text{Res}(\Gamma)$ désigne le graphe obtenu par contraction de l'ensemble de la structure interne de Γ et Γ/γ désigne le graphe obtenu par contraction du sous graphe γ de Γ . Illustrons cela avec des éléments de $1\text{PI}(\phi_4^4)$:

$$\text{Res}_i \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ (i) \end{array} \quad \text{Res} \left(\begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \times \end{array} \right) = \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} / \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} (1) \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} (0) \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} / \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \times \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Un graphe $\Gamma \in 1\text{PI}(\mathcal{T})$ est caractérisé par par son nombre de boucles $n_b(\Gamma)$, son nombre de lignes internes $n_{li}(\Gamma)$, son nombre de lignes externes $n_{le}(\Gamma)$ et son nombre de vertex de type $\iota \in \mathcal{I}(\mathcal{T})$ noté $n_{v\iota}(\Gamma)$.

On associe un poids à chaque type de ligne et à chaque type de vertex par une application $\Omega : \mathcal{P}(\mathcal{T}) \cup \mathcal{I}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{Q}$. Ces poids correspondent, pour chaque type de lignes et de vertex, à leur contributions en termes de variables dans les intgrales de Feynman. Pour la théorie en ϕ_4^4 on trouve $\Omega(\text{---}) = 2$, $\Omega(\begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array}) =$

$$0, \Omega(\underset{(0)}{\longrightarrow}) = 0 \text{ et } \Omega(\text{X}) = 0.$$

On définit le degré de divergence superficiel associé à Γ .

Définition - Degré de divergence superficiel. Le degré de divergence superficiel de $\Gamma \in 1PI(\mathcal{T})$ est :

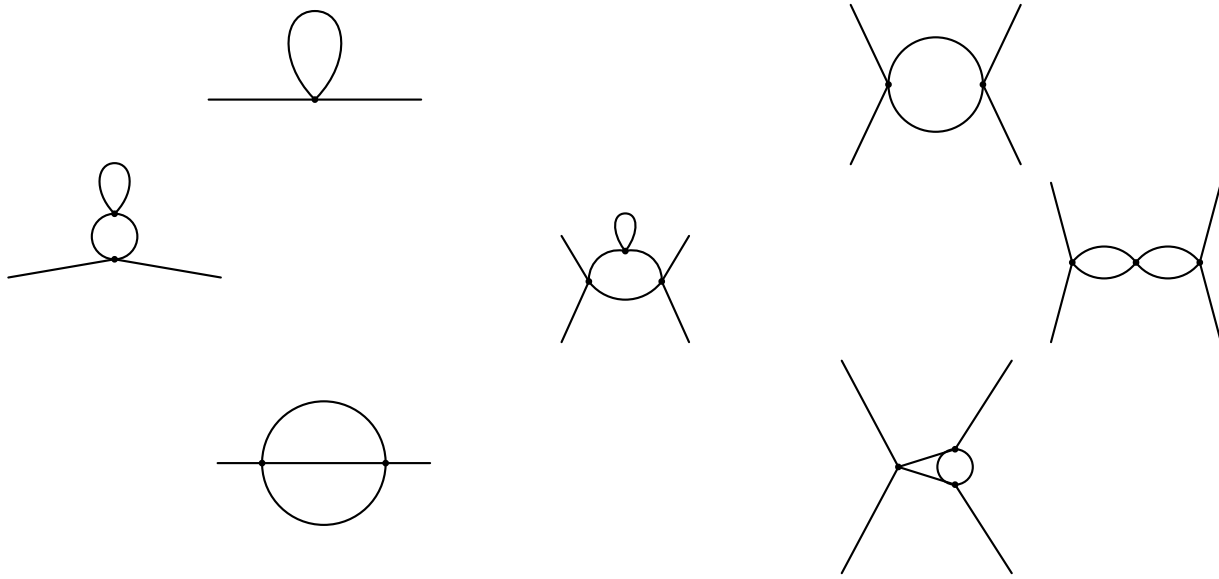
$$\omega(\Gamma) = 4n_b(\Gamma) - n_{li}(\Gamma)\Omega(li) - \sum_{\iota \in \mathcal{I}(\mathcal{T})} n_{v\iota}(\Gamma)\Omega(\iota)$$

Quand $\omega(\Gamma) \geq 0$ on dit que Γ est un graphe divergent. Identifions les graphes divergents de ϕ_4^4 . Pour cela on peut réécrire le degré de divergence superficiel.

Proposition. Le degré de divergence superficiel de $\Gamma \in 1PI(\phi_4^4)$ s'écrit $\omega(\Gamma) = 4 - n_{le}(\Gamma)$.

Preuve. Par définition $\omega(\Gamma) = 4n_b(\Gamma) - 2n_{li}(\Gamma)$. Or pour les graphes de la théorie en ϕ_4^4 les vertex d'interaction à quatre lignes nous donne $4n_{v4}(\Gamma) = n_{le}(\Gamma) + 2n_{li}(\Gamma)$. De plus la conservation des impulsions aux vertex se traduit par la relation $n_b(\Gamma) = n_{li}(\Gamma) - (n_{v4}(\Gamma) - 1)$. En substituant dans la définition on trouve $\omega(\Gamma) = 4 - n_{le}(\Gamma)$. \square

Le degré superficiel de divergence ne dépend dans ce cas que du nombre de lignes externes du graphe. Les éléments divergents de $1PI(\phi_4^4)$ sont donc ceux possédant $n_{le}(\Gamma) \in \{2, 4\}$ donc ceux dont le résidu est dans $\mathcal{I}(\mathcal{T})$. En les classant par nombre de boucles on peut en exhiber quelques-uns :



On peut munir l'ensemble des graphes de Feynman une particule irréductible d'une structure d'algèbre de Hopf qui organise l'aspect combinatoire de la renormalisation [CK1, CK2].

Théorème - Algèbre de Hopf de renormalisation. Soit H_r^T l'algèbre unitale commutative libre sur \mathbb{C} engendrée par les éléments de $1PI(\mathcal{T})$ dont le résidu appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{T})$. Son produit est l'union disjointe des graphes noté Π et son unité est le graphe vide noté $\mathbf{1}$. Alors le coproduit, la co-unité et l'antipode définis ci-dessous sur les générateurs font de H_r^T une algèbre de Hopf :

$$\Delta_r \Gamma = \Gamma \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \Gamma + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} \gamma \otimes \Gamma/\gamma,$$

$$\epsilon_r(\Gamma) = 1 \text{ si } \Gamma = \mathbf{1} \text{ et } 0 \text{ sinon,}$$

$$S_r(\Gamma) = -\Gamma - \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} S_r(\gamma)\Gamma/\gamma,$$

Où $D_r = \{\gamma = \Pi_i \gamma_i \mid \gamma \neq \mathbf{1} \gamma_i \text{ sous graphe de } \Gamma \text{ et } \omega(\gamma_i) \geq 0\}$. On appelle H_r^T algèbre de Hopf de renormalisation de la théorie \mathcal{T} .

L'algèbre de Hopf de renormalisation est graduée par le nombre de boucles des graphes. Parmi les éléments de H_r^T on distingue l'ensemble des éléments primitifs $\text{Prim}(H_r^T)$ c'est-à-dire tels que $\Delta_r \Gamma = \Gamma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Gamma$. Les générateurs primitifs de $H_r^{\phi_4^4}$ correspondent aux divergences primitives de ϕ_4^4 car par définition du coproduit ce sont ceux qui ne possèdent pas de sous-divergences. Donnons quelques calculs de coproduits :

$$\begin{aligned} \Delta_r \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \text{diagram} \\ \Delta_r \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \text{diagram} + \text{diagram} \otimes \text{diagram}^{(1)} + \text{diagram} \otimes \text{diagram}^{(0)} \\ \Delta_r \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \text{diagram} + 2 \text{diagram} \otimes \text{diagram} \\ \Delta_r \left(\text{diagram} \right) &= \text{diagram} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \text{diagram} + \text{diagram} \otimes \text{diagram} \end{aligned}$$

2.2 Structure des moments

Pour que les graphes une particule irréductible représentent effectivement des processus physiques élémentaires on doit leur associer les nombres quantiques conservés au cours de la réaction ainsi décrite. On ajoute donc des labels aux lignes externes des graphes 1PI. Ceux-ci forment ce qu'on appelle la structure externe du graphe. Le cas particulier des théories de champs scalaire est très simple, les seuls nombres quantiques conservés au cours d'un processus sont les moments externes. Attachons nous donc à décrire cette structure des moments.

A chaque ligne externe d'un graphe 1PI on associe un moment dans \mathbb{R}^4 tel que ces moments soient globalement conservés. Avec pour convention que les moments sont entrant au graphe, la conservation équivaut à imposer que leur somme est nulle. La structure externe de $\Gamma \in \text{1PI}(\mathcal{T})$ est donc l'ensemble des moments conservés qui n'est autre que l'hyperplan :

$$E_\Gamma = \left\{ \mu_\Gamma = (p_1, \dots, p_{n_{\text{Ie}}(\Gamma)}) \in \mathbb{R}^{4n_{\text{Ie}}(\Gamma)} \mid \sum_{i=0}^{n_{\text{Ie}}(\Gamma)} p_i = 0 \right\}.$$

Un processus élémentaire est donc spécifié par le choix d'un couple (Γ, μ_Γ) . On aimerait pouvoir parler de l'espace total des (Γ, μ_Γ) formés par un élément de l'algèbre de Hopf de renormalisation et de ses moments associés. Pour ce faire, considérons $E = \coprod_{\Gamma \in \text{1PI}(\mathcal{T})} E_\Gamma$ et la projection $\pi : E \rightarrow H_r^T$, $\mu_\Gamma \mapsto \Gamma$ qui envoie un multiplet de moments vers le graphe auquel il est associé. Pour rendre E compatible avec la structure d'algèbre de H_r^T on le munit d'un produit $\tilde{m} : E \times E \rightarrow E$, $\mu_{\Gamma_1} \times \mu_{\Gamma_2} \mapsto \mu_{\Gamma_1 \Gamma_2} = \mu_{\Gamma_1} \mu_{\Gamma_2}$ tel que le diagramme ci-dessous commute :





$$\begin{array}{ccc} E \times 2 & \xrightarrow{\tilde{m}} & E \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ H_r^T \otimes 2 & \xrightarrow{\Pi} & H_r^T \end{array}$$

L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur E est noté $C^\infty(E)$, c'est une algèbre sur \mathbb{C} pour le produit usuel des fonctions $(fg)(\mu_\Gamma) = f(\mu_\Gamma)g(\mu_\Gamma)$.

2.3 Caractères de l'algèbre

Les règles de Feynman sont un ensemble de prescriptions qui nous permettent d'associer à un graphe de Feynman une fonction de ses moments externes. Elles correspondent à l'application \mathfrak{F} exprimée dans l'espace des

moments. Pour un graphe de la théorie en ϕ_4^4 ces prescriptions sont les suivantes :

- i) à chaque ligne  on associe rien si c'est une ligne externe et $1/(p^2 + m^2)$ si c'est une ligne interne.
- ii) à chaque vertex  on associe une constante de couplage g et une loi de conservation $\delta(\sum_{i=1}^4 q_i)$.
- iii) à chaque vertex  on associe une masse m^2 .
- iv) à chaque vertex  on associe une impulsion p^2 .
- v) on intègre sur les impulsions et on divise par le facteur de symétrie du graphe qui est le cardinal du groupe des automorphismes de ce dernier.

L'amplitude associée à $\Gamma \in 1\text{PI}$ s'écrit donc de manière générale :

$$\varphi_\Gamma(\mu_\Gamma) = \frac{g^{n_v(\Gamma)}}{\text{Sym}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}^{4n_i(\Gamma)}} \prod_{i=1}^{n_i(\Gamma)} \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4} \prod_{j=1}^{n_v(\Gamma)} \delta \left(\sum_{q \in \text{Val}(v_j)} q \right) \prod_{l=1}^{n_i(\Gamma)} \frac{1}{q_l^2 + m^2}$$

On a par exemple :

$$\varphi \text{---} \underline{\mathbf{0}} = g \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2}$$

$$\varphi \text{---} \text{---} \text{---} (p) = \frac{g^2}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m^2)((q+p)^2 + m^2)}$$

C'est ici que se pose le problème de la renormalisation. Le degré de divergence superficiel nous indique quand les règles de Feynman associent à un graphe 1PI une intégrale divergente. Le but de la renormalisation est d'extraire une partie finie de ces amplitudes qui ait un sens physique indépendamment de la procédure utilisée. Cette procédure se déroule essentiellement en deux étapes : la régularisation et la renormalisation.

L'étape de régularisation consiste à donner un sens à l'intégrale divergente le plus souvent par l'introduction d'un paramètre qui va caractériser le type de divergence dans une certaine limite. Ce faisant l'amplitude devient une fonction des moments externes et dépend également d'un paramètre. Ici nous faisons le choix particulier de la régularisation dimensionnelle. Elle consiste à prolonger la dimension de l'espace-temps dans le plan complexe en posant $D = 4 - \epsilon$, les intégrales étant divergentes dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Les amplitudes sont alors des séries en ϵ et des polynômes ϵ^{-1} comme on peut le constater sur les versions régularisées des exemples ci-dessous :

$$\varphi^\epsilon \text{---} \underline{\mathbf{0}} = g\mu^{-\epsilon} m^{2-\epsilon} \frac{2\pi^{2-\epsilon/2}}{\epsilon(2\pi)^{4-\epsilon}} + \text{partie finie}(\epsilon)$$

$$\varphi^\epsilon \text{---} \text{---} \text{---} (p) = \frac{2(g\mu^{-\epsilon})^2}{\epsilon\Gamma(2)(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2 + x(1-x)p^2)^{\epsilon/2}} + \text{partie finie}(\epsilon)$$

On peut formaliser cette procédure en regardant l'étape de régularisation comme le fait d'associer à un élément de l'algèbre de Hopf de renormalisation une fonction des moments externes à valeur dans une certaine algèbre associative que l'on notera \mathcal{A}^{reg} . Pour la théorie en ϕ_4^4 avec le choix de la régularisation dimensionnelle les amplitudes régularisées appartiennent à $C^\infty(E) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]]$ où l'algèbre de régularisation est celle des polynômes de Laurent ayant un nombre fini de pôles.

Les amplitudes de Feynman ont la propriété supplémentaire d'être multiplicatives pour l'union disjointe des graphes $\varphi(\Gamma_1 \amalg \Gamma_2) = \varphi(\Gamma_1)\varphi(\Gamma_2)$ ce qui revient à dire que l'application qui à un graphe de Feynman associe son amplitude régularisée est un caractère de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Notons $\mathcal{G} = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Alg}}(H_r^T, C^\infty(E) \otimes \mathcal{A}^{reg})$ l'ensemble de ces caractères. Cet ensemble a la particularité de former un groupe pour une loi reliée au coproduit de la renormalisation.

Proposition - Groupe des caractères. *L'ensemble \mathcal{G} forme un groupe pour :*

- i) *Le produit de convolution \star définit pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}$ par $\varphi_1 \star \varphi_2 = m_{\mathcal{A}}(\varphi_1 \otimes \varphi_2)\Delta_r$.*
- ii) *Le neutre est la co-unité.*
- iii) *L'inverse de φ est $\varphi^{-1} = \varphi \circ S_r$.*

Preuve. Le fait que H_r^T soit une algèbre de Hopf commutative nous assure qu'elle représente un schéma en groupe affine (cf. App.A) et que par conséquent \mathcal{G} possède une structure de groupe. Vérifions par exemple que \mathcal{G} est stable pour la loi de groupe proposée.

Cette propriété est une conséquence essentiellement du fait que le coproduit Δ_r est un morphisme d'algèbre. En effet, par hypothèse φ_1, φ_2 et Δ_r sont des morphismes de \mathbb{C} -algèbre, c'est-à-dire que :

$$\Delta_r \circ m_H = m_{H \otimes H} \circ (\Delta_r \otimes \Delta_r)$$

$$\varphi_i \circ m_H = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi_i \otimes \varphi_i)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \varphi_1 \star \varphi_2 \circ m_H &= m_{\mathcal{A}}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \Delta_r \circ m_H = m_{\mathcal{A}}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ m_{H \otimes H} \circ (\Delta_r \otimes \Delta_r) \\ &= m_{\mathcal{A}} [(m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2)) \otimes (m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2))] \circ (\Delta_r \otimes \Delta_r) \\ &= m_{\mathcal{A}} [(m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta_r) \otimes (m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \circ \Delta_r)] \\ &= m_{\mathcal{A}} \circ [\varphi_1 \star \varphi_2 \otimes \varphi_1 \star \varphi_2] \end{aligned}$$

L'élément $\varphi_1 \star \varphi_2$ est donc encore un morphisme d'algèbre d'où la stabilité.

Il est aisé de vérifier les autres propriétés de groupe. Celles-ci découlent immédiatement des propriétés de l'antipode pour l'inverse et de la co-unité pour le neutre. \square

Pour $\varphi \in \mathcal{G}$ le caractère qui à un graphe Γ associe son amplitude de Feynman, on note $\varphi(\Gamma) = \varphi_{\Gamma}(\mu_{\Gamma})$.

2.4 Opérations d'insertions et cohomologie de Hochschild

Chaque graphe de Feynman d'une théorie se décompose par un processus d'insertion de graphes simples les uns dans les autres de manière à obtenir n'importe quel élément de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Le maillon essentiel de cette construction est l'opérateur d'insertion défini ci-dessous dont nous allons donner les principales propriétés.

Définition - Opérateur d'insertion. Pour tout $\gamma \in \text{Prim}(H_r^T)$ on définit $B_+^{\gamma} : H_r^T \rightarrow H_r^T$ par :

$$B_+^{\gamma}(X) = \sum_{Y \in \text{Span}(H_r^T)} n_+(\gamma \curvearrowright X|Y)Y,$$

et $n_+(\gamma \curvearrowright X|Y)$ est le nombre de manières d'obtenir le graphe Y par insertion de X dans γ . Quand X s'exprime comme l'union disjointe de plusieurs graphes le nombre d'insertion est calculée en distribuant ces insertions de toutes les manières possibles sur l'ensemble des graphes de l'union.

Pour la théorie en ϕ_4^4 on a par exemple :

$$\begin{aligned} B_+^{\curvearrowright} \left(\text{---} \text{---} \right) &= 2 \text{---} \text{---} \\ B_+^{\text{---}} \left(\text{---} \text{---} \right) &= \text{---} \text{---} \\ B_+^{\curvearrowright} \left(\text{---} \text{---} \right) &= 2 \text{---} \text{---} \end{aligned}$$

Proposition. Pour tout Γ générateur de H_r^T il existe $\gamma \in \text{Prim}(H_r^T)$ et $X \in H_r^T$ tels que $\Gamma = B_+^{\gamma}(X)$.

Preuve. Prenons un graphe 1PI quelconque Γ , puisqu'il est dans l'algèbre de Hopf de renormalisation son résidu est dans $\mathcal{I}(\mathcal{T})$ et il existe donc un élément primitif γ tel que $\text{Res}(\gamma) = \text{Res}(\Gamma)$. L'opérateur d'insertion s'écrit donc B_+^{γ} . Reste à trouver un élément de l'algèbre de Hopf de renormalisation qui inséré dans le graphe primitif nous donne Γ . Or il existe toujours un X tel que $n_+(\gamma \curvearrowright X|\Gamma) \neq 0$. On obtient donc Γ en insérant le X correspondant multiplié si nécessaire par un facteur combinatoire. \square

Ce résultat nous permet de décomposer n'importe quel graphe générateur de l'algèbre de Hopf de renormalisation en les éléments primitifs qui le composent. En effet $\Gamma = B_+^{\gamma_1}(X_1)$ mais comme $X_1 \in H_r^T$ il s'écrit lui même $X_1 = B_+^{\gamma_2}(X_2)$ et comme nos graphes sont finis il existe un multiplet $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ d'éléments primitifs tel que :

$$\Gamma = B_+^{\gamma_1} \circ B_+^{\gamma_2} \circ \dots \circ B_+^{\gamma_n}(\mathbb{1})$$

Etudions maintenant la cohomologie de Hochschild de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Celle-ci nous renseigne sur l'invariance de jauge dans le cas des théories de jauge et de manière générale nous permet d'établir certaines propriétés des opérateurs d'insertion utile à la renormalisation.

On définit l'ensemble des n -cochaines $C^n = \{L : H_r^T \rightarrow H_r^T | L \text{ application linéaire}\}$. On pose

$$C^\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C^n \quad \text{avec } C^0 = H_r^T$$

On définit l'opération de cobord $b : C^n \rightarrow C^{n+1}$ pour $L(\Gamma) = \Gamma_1 \otimes \dots \otimes \Gamma_n \in H_r^T$ par :

$$bL(\Gamma) = (id \otimes L)\Delta_r \Gamma + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Gamma_1 \otimes \dots \otimes \Delta_r \Gamma_i \otimes \dots \otimes \Gamma_n + (-1)^{n+1} L(\Gamma) \otimes \mathbb{1}$$

Proposition. *L'opérateur de cobord $b : C^\bullet \rightarrow C^\bullet$ est une codifférentielle i.e. $b^2 = 0$.*

Preuve. On se place sur une portion du complexe différentiel :

$$\dots \rightarrow C^n \xrightarrow{b_n} C^{n+1} \xrightarrow{b_{n+1}} \dots$$

Soit $L \in C^n$, on pose la notation :

$$b_n L = (id \otimes L)\Delta_r + \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{ri} L + (-1)^{n+1} (L \otimes \mathbb{1})$$

Par définition on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (b_{n+1} \circ b_n)L &= (id \otimes b_n L)\Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \Delta_{rj} b_n L + (-1)^{n+2} (b_n L \otimes \mathbb{1}) \\ &= [id \otimes (id \otimes L)\Delta_r]\Delta_r + \left[id \otimes \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{ri} L \right] \Delta_r + (-1)^{n+1} [id \otimes (L \otimes \mathbb{1})]\Delta_r \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \Delta_{rj} (id \otimes L)\Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{rj} \Delta_{ri} L + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \Delta_{rj} (L \otimes \mathbb{1}) \\ &\quad + (-1)^{n+2} [(id \otimes L)\Delta_r \otimes \mathbb{1}] + \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+2} \Delta_{ri} L \right) \otimes \mathbb{1} + (-1)^{2n+3} [(L \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1}] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -[(L \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1}] + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \Delta_{rj} (L \otimes \mathbb{1}) &= -[(L \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1}] + \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n+1} \Delta_{rj} (L \otimes \mathbb{1}) + L \otimes \Delta_r \mathbb{1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+n+1} \Delta_{rj} L \right) \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Donc

$$-[(L \otimes \mathbb{1}) \otimes \mathbb{1}] + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \Delta_{rj} (L \otimes \mathbb{1}) + \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+2} \Delta_{ri} L \right) \otimes \mathbb{1} = 0$$

De plus

$$(-1)^{n+2} [(id \otimes L)\Delta_r \otimes \mathbb{1}] + (-1)^{n+1} [id \otimes (L \otimes \mathbb{1})]\Delta_r = (-1)^{n+1} [(id \otimes L)\Delta_r \otimes \mathbb{1} - (id \otimes L)\Delta_r \otimes \mathbb{1}] = 0$$

Tout ceci nous permet de réécrire une première fois :

$$(b_{n+1} \circ b_n)L = [id \otimes (id \otimes L)\Delta_r]\Delta_r + \left[id \otimes \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{ri} L \right] \Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \Delta_{rj} (id \otimes L)\Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{rj} \Delta_{ri} L$$

Or

$$\left[id \otimes \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{ri} L \right] \Delta_r = \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{r,i+1} (id \otimes L) \Delta_r = \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{j-1} \Delta_{rj} (id \otimes L) \Delta_r$$

Donc

$$\left[id \otimes \sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta_{ri} L \right] \Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \Delta_{rj} (id \otimes L) \Delta_r = -\Delta_{r1} (id \otimes L) \Delta_r$$

Ceci nous permet de nouveau de simplifier l'expression :

$$(b_{n+1} \circ b_n)L = [id \otimes (id \otimes L) \Delta_r] \Delta_r - \Delta_{r1} (id \otimes L) \Delta_r + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{rj} \Delta_{ri} L$$

Considérons le terme $\sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{rj} \Delta_{ri} L$. La coassociativité du coproduit implique que cette somme est nulle. En effet, prenons le cas $n = 1$:

$$\sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} \Delta_{rj} \Delta_{r1} L = \Delta_{r1} \Delta_{r1} L - \Delta_{r2} \Delta_{r1} L$$

Or la coassociativité du coproduit implique la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H_r^T & \xrightarrow{L} & H_r^T & \xrightarrow{\Delta_r} & H_r^T \otimes 2 \\ \downarrow L & & & & \downarrow \Delta_{r2} = id \otimes \Delta_r \\ H_r^T & & & & \\ \downarrow \Delta_r & & & & \\ H_r^T \otimes 2 & \xrightarrow{\Delta_{r1} = \Delta_r \otimes id} & & & H_r^T \otimes 3 \end{array}$$

Ceci équivaut à la relation $\Delta_{r1} \Delta_{r1} L - \Delta_{r2} \Delta_{r1} L = 0$. Ceci se généralise sans difficulté au cas n quelconque. On arrive donc à :

$$(b_{n+1} \circ b_n)L = [id \otimes (id \otimes L) \Delta_r] \Delta_r - \Delta_{r1} (id \otimes L) \Delta_r$$

Encore une fois la coassociativité nous permet de conclure. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} H_r^T & \xrightarrow{\Delta_r} & H_r^T \otimes 2 & \xrightarrow{id \otimes L} & H_r^T \otimes n+1 \\ \downarrow \Delta_r & & & & \downarrow \Delta_r \otimes id^n \\ H_r^T \otimes 2 & & & & \\ \downarrow \Delta_r \otimes id \text{ ou } id \otimes \Delta_r & & & & \\ H_r^T \otimes 3 & \xrightarrow{id^{\otimes 2} \otimes L} & & & H_r^T \otimes n+2 \end{array}$$

Ce qui équivaut à dire que $(id^{\otimes 2} \otimes L) \circ (\Delta_r \otimes id) \Delta_r = (\Delta_r \otimes id^{\otimes n}) \circ (id \otimes L) \Delta_r$. D'où $b_{n+1} \circ b_n = 0$. \square

Le complexe différentiel (C^\bullet, b) nous donne la cohomologie de Hochschild :

$$HH^\bullet(H_r^T) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} HH^n(H_r^T),$$

Avec $Z^n = \{L \in C^n \mid bL = 0, b : C^n \rightarrow C^{n+1}\}$ l'ensemble des cocycles, $B^n = \{L \in C^n \mid L = bM, M \in C^{n-1}, b : C^{n-1} \rightarrow C^n\}$ l'ensemble des cobords et $HH^n(H_r^T) = Z^n / B^n$.

On peut caractériser l'ensemble des 1-cocycles qui ne sont pas des cobords.

Proposition - Caractérisation des 1-cocycles. *Les éléments de $HH^1(H_r^T)$ vérifient pour tout $\Gamma \in H_r^T$ la relation :*

$$\Delta_r L(\Gamma) = (id \otimes L) \Delta_r \Gamma + L(\Gamma) \otimes \mathbb{1}.$$

Preuve. Considérons $L \in C^1$. Alors lui appliquer l'opérateur de cobord nous donne pour tout $\Gamma \in H_r^T$:

$$bL(\Gamma) = (id \otimes L)\Delta_r\Gamma - \Delta_r L(\Gamma) + L(\Gamma) \otimes \mathbb{1}.$$

Or, si $L \in HH^1(H_r^T)$, on a $bL = 0$ car L est un 1-cocycle. D'où

$$\Delta_r L(\Gamma) = (id \otimes L)\Delta_r\Gamma + L(\Gamma) \otimes \mathbb{1}.$$

□

Proposition. Pour tout $\gamma \in \text{Prim}(H_r^T)$ l'application $B_+^\gamma \in HH^1(H_r^T)$.

Preuve. La preuve de cette proposition nécessite l'introduction d'outils combinatoires qui ne font pas l'objet de ce travail. On trouvera l'idée de cette démonstration dans [KR]. □

Notons que cet opérateur d'insertion se relève au niveau des amplitudes de Feynman de la façon suivante :

Définition - Insertion d'amplitudes. L'opération $\hat{\bullet}$ qui permet d'insérer l'amplitude d'un sous-graphe dans le graphe auquel il appartient est définie pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Prim}(H_r^T)$ par :

$$\varphi(\gamma_1) \hat{\bullet} \varphi(\gamma_2) = \varphi(B_+^{\gamma_1}(\gamma_2))$$

Par conséquent l'amplitude de n'importe quel graphe une particule irréductible se décompose en «amplitudes primitives» de la manière suivante :

$$\varphi_\Gamma(\mu_\Gamma) = \varphi(\Gamma) = \varphi(\gamma_1) \hat{\bullet} \varphi(\gamma_2) \hat{\bullet} \dots \hat{\bullet} \varphi(\gamma_n)$$

3 Renormalisation de la théorie en ϕ_4^4

3.1 L'algorithme BPHZ

On présente ici un bref résumé de l'algorithme de Bogolioubov–Parasiuk–Hepp–Zimmermann qui permet de calculer l'amplitude renormalisée d'un graphe une particule irréductible divergent. Pour plus de détails on pourra consulter [CR] et [ZR]. Notre but étant de décrire de manière schématique la procédure nous allons employer des notations parlantes mais non définies précisément.

Soit Γ un graphe 1PI divergent. On note $\varphi(\Gamma)$ son amplitude régularisée, fonction des moments externes. Notre objectif est d'obtenir une amplitude dite renormalisée $R(\Gamma)$ qui consiste en une quantité finie quand on passe à la limite de régularisation. On veut mettre cette amplitude sous la forme :

$$R(\Gamma) = \varphi(\Gamma) + S(\Gamma)$$

Deux cas sont alors possibles. Le graphe Γ ne possède qu'une divergence superficielle ou il possède également des sous-divergences c'est-à-dire des sous graphes divergents. Dans le cas de la seule divergence superficielle, on note T l'opérateur qui nous permet d'extraire la partie divergente de $U(\Gamma)$ et qui définit le contreterme associé $C(\Gamma)$. Il ne reste alors plus qu'à soustraire cette divergence à l'amplitude non renormalisée pour obtenir la quantité renormalisée :

$$\begin{aligned} C(\Gamma) &= -T \circ \varphi(\Gamma) \text{ contreterme,} \\ R(\Gamma) &= \varphi(\Gamma) + C(\Gamma) \text{ terme renormalisé.} \end{aligned}$$

Si maintenant le graphe contient des sous-divergences il faut s'occuper d'elles en premier. On introduit l'opérateur Bog, dit opérateur de Bogolioubov, qui soustrait à l'amplitude divergente les contretermes correspondants aux sous-divergences :

$$\text{Bog}(\Gamma) = \varphi(\Gamma) + \sum_{\gamma} C(\gamma)\varphi(\Gamma/\gamma)$$

La somme porte sur tous produits de sous-graphes une particule irréductible divergents de Γ . L'application de l'opérateur de Bogolioubov nous permet donc de nous ramener au cas précédent. Pour obtenir l'expression renormalisée de l'amplitude on soustrait le contreterme correspondant à $\text{Bog}(\Gamma)$:

$$R(\Gamma) = \text{Bog}(\Gamma) - T \circ \text{Bog}(\Gamma) = \varphi(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma} C(\gamma)\varphi(\Gamma/\gamma)$$

L'algorithme BPHZ est donc un processus récursif dont la convergence est assurée par des résultats de Zimmermann qui donnent une formule pour résoudre la récurrence.

3.2 Utilisation du groupe des caractères

Les opérations effectuées au cours du processus de renormalisation sont codées dans le formalisme des algèbres de Hopf. Le choix d'un schéma de régularisation a été fait quand on a fixé l'algèbre de régularisation dans l'espace cible des caractères de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Pour la théorie en ϕ_4^4 nous considérons ici la régularisation dimensionnelle, l'algèbre de régularisation est donc celle des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]]$. On se place également dans le schéma de soustraction minimale qui consiste, pour renormaliser une amplitude, à lui soustraire sa partie en pôle. On notera $\text{Pôl} : C^\infty(E) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]] \longrightarrow C^\infty(E) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]$ l'opérateur qui à une amplitude lui associe sa partie en pôle, cas particulier de l'opérateur T .

Considérons maintenant un graphe $\Gamma \in \text{1PI}(\phi_4^4)$ divergent. Son amplitude régularisée est $\varphi(\Gamma) = \varphi_\Gamma^\epsilon(\mu_\Gamma)$. On commence par évaluer dans le schéma de soustraction minimale les contretermes de Γ qui proviennent d'une part de la divergence globale du graphe et d'autre part des sous-graphes divergents :

$$S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma) = -\text{Pôl} \circ \varphi(\Gamma) - \text{Pôl} \circ \left(\sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} S_{\text{Pôl}}^\varphi(\gamma) \varphi(\Gamma/\gamma) \right) = -\text{Pôl} \circ \text{Bog}(\Gamma)$$

Proposition. *L'application $S_{\text{Pôl}}^\varphi : H_r^{\phi_4^4} \longrightarrow C^\infty(E) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]]$ est un élément du groupe \mathcal{G} .*

Preuve. La seule partie intéressante de cette démonstration est la preuve de la multiplicativité de $S_{\text{Pôl}}^\varphi$. On prouve cette assertion par récurrence sur la graduation de l'algèbre de Hopf de renormalisation. Le cas des graphes à une boucle correspond aux graphes primitifs et est immédiat. Pour la suite, on a simplement besoin d'utiliser le fait que l'opérateur Pôl satisfait à l'équation de Rota–Baxter, i.e. pour tout $f, g \in C^\infty(E) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon, \epsilon^{-1}]]$:

$$\text{Pôl}(fg) + \text{Pôl}(f)\text{Pôl}(g) = \text{Pôl}(f\text{Pôl}(g)) + \text{Pôl}(\text{Pôl}(f)g)$$

Considérons Γ_1 et Γ_2 deux éléments de l'algèbre de Hopf de renormalisation différents du graphe vide. En supposant l'hypothèse de récurrence vraie au rang n (multiplicativité) un simple calcul déjà détaillé dans [CK1] nous donne la propriété de multiplicativité $S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma_1\Gamma_2) = S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma_1)S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma_2)$ comme conséquence immédiate de l'équation de Rota–Baxter au rang $n+1$. \square

On obtient donc l'amplitude renormalisée en soustrayant les contretermes à l'amplitude divergente. Cette amplitude renormalisée s'exprime comme :

$$S_{\text{Pôl}}^\varphi \star \varphi(\Gamma) = \varphi(\Gamma) + S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma) + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} S_{\text{Pôl}}^\varphi(\gamma) \varphi(\Gamma/\gamma)$$

Proposition. *L'opérateur de Bogoliubov s'écrit $\text{Bog}(\Gamma) = m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ P) \circ \Delta_r \Gamma$ et vérifie l'équation :*

$$\text{Bog} \circ B_+^\gamma(X) = \varphi(\gamma) \hat{\bullet} (id - \text{Pôl}) \circ \text{Bog}(X)$$

Preuve. Par définition l'opérateur de Bogoliubov est tel que :

$$\text{Bog}(\Gamma) = \varphi(\Gamma) + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} S_{\text{Pôl}}^\varphi(\gamma) \varphi(\Gamma/\gamma)$$

Or P étant le projecteur dans l'idéal d'augmentation de l'algèbre de Hopf de renormalisation il vérifie $P(\mathbb{1}) = 0$ et $P(\Gamma) = \Gamma$ pour $\Gamma \neq \mathbb{1}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ P) \circ \Delta_r \Gamma &= m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ P) \left[\Gamma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Gamma + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} \gamma \otimes \Gamma/\gamma \right] \\ &= 0 + 1 \varphi(\Gamma) + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_r} S_{\text{Pôl}}^\varphi(\gamma) \varphi(\Gamma/\gamma) \\ &= \text{Bog}(\Gamma) \end{aligned}$$

On va maintenant exploiter le fait que $B_+^\gamma \in HH^1(H_r^{\phi_4^4})$ en lui appliquant l'opérateur de Bogoliubov :

$$\begin{aligned}
\text{Bog} \circ B_+^\gamma(X) &= m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ P) \circ \Delta_r B_+^\gamma(X) = m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ P) [B_+^\gamma(X) \otimes \mathbb{1} + (id \otimes B_+^\gamma) \Delta_r X] \\
&= m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi \circ B_+^\gamma) \left[X \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes X + \sum_{X \neq x \in D_r} x \otimes X/x \right] \\
&= S_{\text{Pôl}}^\varphi(X) \varphi(B_+^\gamma(\mathbb{1})) + \varphi(B_+^\gamma(X)) + \sum_{X \neq x \in D_r} S_{\text{Pôl}}^\varphi(x) \varphi(B_+^\gamma(X/x)) X/x \\
&= \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} \varphi(\mathbb{1}) S_{\text{Pôl}}^\varphi(X) + \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} \varphi(X) + \sum_{X \neq x \in D_r} \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} \varphi(X/x) S_{\text{Pôl}}^\varphi(x) \\
&= \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} (S_{\text{Pôl}}^\varphi \star \varphi)(X)
\end{aligned}$$

Or on peut facilement relié $S_{\text{Pôl}}^\varphi \star \varphi$ à l'opérateur de Bogoliubov :

$$\begin{aligned}
S_{\text{Pôl}}^\varphi \star \varphi(X) &= m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_r X = m \circ (S_{\text{Pôl}}^\varphi \otimes \varphi) \left[X \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes X + \sum_{X \neq x \in D_r} x \otimes X/x \right] \\
&= S_{\text{Pôl}}^\varphi(X) + \text{Bog}(X) = -\text{Pôl} \circ \text{Bog}(X) + \text{Bog}(X) \\
&= (id - \text{Pôl}) \text{Bog}(X)
\end{aligned}$$

En substituant cette dernière relation on obtient l'identité voulue, $\text{Bog} \circ B_+^\gamma(X) = \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} (id - \text{Pôl}) \circ \text{Bog}(X)$. \square

Maintenant que l'on sait calculer le contreterme associé à un graphe particulier de la théorie on peut s'attaquer à l'évaluation des contretermes des monômes de la densité lagrangienne. Pour cela nous devons évaluer les contretermes pour l'ensemble des corrections quantiques à un type de vertex d'interaction. On introduit donc les éléments de $H_r^{\phi_4^4}[[g]]$ correspondants à ces corrections quantiques :

$$\begin{aligned}
\Gamma \begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array} &= \mathbb{1} + \sum_{\Gamma \in H_r^{\phi_4^4} \text{ tq. Res}(\Gamma)=\begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array}} g^{n_b(\Gamma)} \frac{\Gamma}{\text{Sym}(\Gamma)} \\
\Gamma \begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array} &= \mathbb{1} + \sum_{\Gamma \in H_r^{\phi_4^4} \text{ tq. Res}(\Gamma)=\begin{array}{c} \text{---} \\ (0) \end{array}} g^{n_b(\Gamma)} \frac{\Gamma}{\text{Sym}(\Gamma)} \\
\Gamma \begin{array}{c} \text{---} \\ (0) \end{array} &= \mathbb{1} + \sum_{\Gamma \in H_r^{\phi_4^4} \text{ tq. Res}(\Gamma)=\begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array}} g^{n_b(\Gamma)} \frac{\Gamma}{\text{Sym}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

Dans le schéma de régularisation dimensionnelle et de soustraction minimale, on obtient alors les contretermes aux monômes de la densité lagrangienne comme étant :

$$Z_g = S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma \begin{array}{c} \diagup \\ \times \\ \diagdown \end{array}) \quad Z_m = S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma \begin{array}{c} \text{---} \\ (0) \end{array}) \quad Z_\phi = S_{\text{Pôl}}^\varphi(\Gamma \begin{array}{c} \text{---} \\ (1) \end{array})$$

3.3 Localité des contretermes

Pour que la théorie soit effectivement considérée comme étant renormalisable il faut maintenant vérifier que les facteurs de renormalisation sont indépendants des moments affins qu'ils interviennent dans la densité lagrangienne comme de simples constantes.

De manière naturelle on peut organiser les séries des corrections quantiques aux vertex en fonction du nombre de boucles. Les propriétés des opérateurs d'insertion nous permettent d'affirmer qu'il existe une famille $\{X_\gamma\}$ d'éléments de $H_r^{\phi_4^4}$ indexés par les graphes primitifs telle que pour $\iota \in \mathcal{I}(\phi_4^4)$ les séries précédentes se

réécrivent :

$$\Gamma_l = \mathbb{1} + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \sum_{\substack{\gamma \in \text{Prim}(H_r^{\phi_4^4}) \\ n_b(\gamma)=l, \text{Res}(\gamma)=l}} \frac{B_+^\gamma(X_\gamma)}{\text{Sym}(\gamma)}$$

On pourra donc montrer la localité des contretermes en nous préoccupant uniquement de chaque $B_+^\gamma(X_\gamma)$.

Théorème - Localité des contretermes. *Les contretermes sont locaux, i.e. Z_g, Z_m et Z_ϕ sont indépendants des moments externes.*

Schéma de preuve. Travaillons sur un terme général Γ_l . Comme on le voit ci-dessus il nous suffit de nous préoccuper de l'action de $S_{\text{Pôl}}^\varphi$ sur les $B_+^\gamma(X_\gamma)$. C'est l'opérateur de Bogoliubov qui nous assure de la localité des contretermes. En effet on connaît la relation de récurrence pour Bog :

$$\text{Bog} \circ B_+^\gamma(X_\gamma) = \varphi(\gamma) \widehat{\bullet} (id - \text{Pôl}) \circ \text{Bog}(X_\gamma)$$

Il existe donc une famille d'éléments primitifs $\{\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ telle que :

$$\text{Bog} \circ B_+^\gamma(X_\gamma) = \varphi(\gamma_1) \widehat{\bullet} (id - \text{Pôl}) \varphi(\gamma_2) \widehat{\bullet} \dots (id - \text{Pôl}) \text{Bog}(\gamma_n)$$

Il faut donc commencer par vérifier que la localité est vraie pour les graphes primitifs. C'est le théorème de Weinberg qui nous assure de ce résultat. Le théorème de Weinberg nous renseigne sur le comportement asymptotique des amplitudes renormalisées dans la limite où les moments tendent vers l'infini.

Théorème de Weinberg. *Soient Γ un graphe une particule irréductible et $\varphi_\Gamma^r(\mu_\Gamma)$ son amplitude renormalisée fonction des moments externes. Soit μ_Γ^λ un sous-ensemble des moments externes de la forme $\mu_\Gamma^\lambda = \lambda(p_1, \dots, p_n)$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha = \max\{\omega(\gamma) | \gamma \text{ sous-graphe de } \Gamma\}$. Alors :*

$$\varphi_\Gamma^r(\mu_\Gamma) \sim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^\alpha \ln^\beta(\lambda)$$

L'opération $\widehat{\bullet} (id - \text{Pôl})$ ne modifie pas la structure des moments, elle préserve donc la localité. Les contretermes sont donc locaux. \square

4 Algèbre de Hopf des graphes 1PI

4.1 Powercounting de la relativité générale

La relativité générale peut être interprétée comme une théorie de champs. Pour celà, on se donne une variété Riemannienne (\mathcal{M}, g) pour laquelle on écrit la métrique comme $g = \delta + \epsilon h$ où δ désigne la métrique euclidienne et h est un champ tensoriel sur \mathcal{M} symétrique et définit positif. Le paramètre ϵ est considéré comme une quantité infinitésimale que l'on peut physiquement poser comme étant \sqrt{G} avec G la constante de gravitation. On introduit les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda i} (g_{\mu i, \nu} + g_{\nu i, \mu} - g_{\mu\nu, i})$, le tenseur de courbure de Riemann $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda = \Gamma_{\mu\rho, \nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu, \rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda$, le tenseur de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\rho} = \mathcal{R}_{\mu\lambda\rho}^\lambda$ et la courbure scalaire $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$. La dynamique du champ h , que l'on appellera champ du graviton, est imposée par l'action de Einstein–Hilbert :

$$\mathcal{S}_{EH}(h) = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{\det(g(x))} \mathcal{R}(x).$$

Formellement l'action d'Einstein–Hilbert est un développement en le paramètre ϵ pour lequel on appellera \mathcal{L}_n le terme d'interaction à n -gravitons (car n puissances de h sont présentent dans ce terme) :

$$\mathcal{S}_{EH}(h) = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathcal{L}_n(x).$$


Pour mettre l'action d'Einstein–Hilbert sous cette forme on écrit le développement en série des champs tensoriels :

$$\sqrt{\det(g)} = \sqrt{1 + \epsilon \text{tr}(h) + O(\epsilon^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n \text{tr}(h)^n}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - j\right),$$

$$g^{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n (h^{\mu\nu})^n, \text{ où } (h^{\mu\nu})^n = \delta^{\mu\nu} \text{ si } n=0 \text{ et } (h^{\mu\nu})^n = h^{\mu\alpha_1} h^{\alpha_1\alpha_2} \dots h^{\alpha_n\nu} \text{ sinon.}$$

On effectue ensuite les produits de Cauchy de toutes les séries qui apparaissent dans l'action pour la mettre sous la forme voulue. En intégrant par parties on obtient schématiquement une densité lagrangienne de la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon^2}{2} \partial h \partial h + \frac{\epsilon^3}{3!} \partial h \partial h h + \frac{\epsilon^4}{4!} \partial h \partial h h h + \dots + \frac{\epsilon^n}{n!} \partial h \partial h \underbrace{h h \dots h}_{n-2 \text{ fois}} + \dots$$

Les types de vertex d'interaction classés par nombre de gravitons en interaction sont regroupés dans $\mathcal{I}(\text{RG}) = \left\{ \begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \dots \\ \text{~~~~~} \\ \dots \end{array} \right\}$. On associe également le champs tensoriel h au type de ligne . En faisant le choix particulier de la jauge de Hilbert on obtient le propagateur d'un graviton portant une impulsion k comme étant :

$$\tilde{P}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{k^2} (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta})$$

Pour effectuer le powercounting on regarde l'ordre en les dérivations d'espace-temps de chaque terme. On voit immédiatement que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = O(\partial)$ ce qui implique que $\Gamma_{\mu\rho,\nu}^\lambda = O(\partial^2)$ et $\Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = O(\partial^2)$ d'où $\mathcal{R}_{\mu\nu} = O(\partial^2)$. Un terme d'interaction à n -gravitons sera donc pour $n > 0$ d'ordre 2 en les dérivations. Le terme \mathcal{L}_n contribue donc en k^2 pour les impulsions. Sachant que le propagateur contribue en $1/k^2$ on a le résultat suivant :

Proposition - Powercounting. *Le degré superficiel de divergence d'un graphe 1PI de la relativité générale Γ est :*

$$\omega(\Gamma) = 2(n_b(\Gamma) + 1)$$

Preuve. On peut donner deux preuves de ce résultat. Concentrons nous ici sur la preuve ayant le plus de sens physique.

Le degré superficiel d'un graphe est évalué directement par rapport aux contributions données dans les amplitudes par les règles de Feynman. C'est la différence de l'ordre en les moments du numérateur et du dénominateur dans l'intégrale de Feynman correspondante :

$$\omega(\Gamma) = \text{Ordre}(k)[\text{num}] - \text{Ordre}(k)[\text{den}] = 4n_b(\Gamma) + 2n_v(\Gamma) - 2n_{li}(\Gamma)$$

Or par conservation des impulsions aux vertex $n_b(\Gamma) = n_{li}(\Gamma) - (n_v(\Gamma) - 1)$. D'où par substitution $\omega(\Gamma) = 2(n_b(\Gamma) + 1)$. \square

Le degré superficiel de divergence est donc toujours positif. Par conséquent tous les graphes 1PI de la relativité générale sont divergents. C'est ce qui pose des problèmes à sa renormalisabilité par les méthodes perturbatives. En effet, il nous faudrait traiter un nombre infini de facteurs de renormalisation.

Pour étudier ce type de théorie qui contient un nombre infini de termes dans sa densité lagrangienne on introduit une nouvelle algèbre de Hopf.

4.2 Core Hopf Algebra

On introduit une nouvelle algèbre de Hopf que nous appellerons «core Hopf algebra» [KR1]. C'est une algèbre de Hopf qui contient l'algèbre de Hopf de renormalisation. Elle est construite de la même manière que cette dernière en relâchant simplement les conditions sur les résidus des générateurs et sur les divergences des sous-graphes intervenant dans le coproduit et l'antipode.

Définition - Algèbre de Hopf des graphes 1PI. L'algèbre de Hopf des graphes 1PI notée $H_c^{\mathcal{P}(\mathcal{T})}$ est l'algèbre commutative libre sur \mathbb{C} engendrée par l'ensemble des graphes $1\text{PI}(\mathcal{P}(\mathcal{T}))$. Son produit est l'union disjointe des graphes et son unité est le graphe vide. Son coproduit, sa co-unité et son antipode sont donnés sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} \Delta_c \Gamma &= \Gamma \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Gamma + \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_c} \gamma \otimes \Gamma/\gamma, \\ \epsilon_c(\Gamma) &= 1 \text{ si } \Gamma = \mathbb{1} \text{ et } 0 \text{ sinon,} \\ S_c(\Gamma) &= -\Gamma - \sum_{\Gamma \neq \gamma \in D_c} S_c(\gamma) \Gamma/\gamma, \end{aligned}$$

où $D_c = \{\gamma = \amalg_i \gamma_i \mid \gamma \neq \mathbb{1} \text{ et } \gamma_i \in 1\text{PI}(\mathcal{P}(\mathcal{T})) \text{ sous graphes de } \Gamma\}$.

Les graphes de l'algèbre de renormalisation de la théorie en ϕ_4^4 se trouvent donc dans une «core Hopf algebra» de champs scalaires. Donnons quelques exemples du nouveau coproduit en partant des graphes de la théorie en ϕ_4^4 , afin de bien noter la différence entre les coproduits Δ_r et Δ_c :

$$\begin{aligned} \Delta_c \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} + 2 \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \Delta_c \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \overset{(1)}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \overset{(0)}{\text{---} \bigcirc \text{---}} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \Delta_c \left(\text{---} \bigcirc \text{---} \right) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \bigcirc \text{---} \end{aligned}$$

Dans l'intérêt de l'étude des propriétés de la relativité générale en tant que théorie renormalisable d'un point de vue non perturbatif, remarquons le résultat suivant :

Proposition. *Pour la relativité générale, supposée non perturbativement renormalisable, l'algèbre de Hopf de renormalisation est la «core Hopf algebra».*

Idée de preuve. Pour montrer ce résultat on peut remarquer que les générateurs et le coproduit sont identiques dans les deux cas. En effet, l'action de Einstein–Hilbert se développe en une série infinie en puissance de ϵ ce qui correspond à dire que d'un point de vue graphique l'ensemble des vertex autorisés est :

$$\mathcal{I}(\text{RG}) = \left\{ \text{---} \text{---} \text{---} , \text{---} \text{---} \text{---} , \text{---} \text{---} \text{---} , \dots , \text{---} \text{---} \text{---} , \dots \right\}$$

Les types de vertex de la relativité générale n'ont pas de restriction sur le nombre de lignes externes. Par conséquent, les générateurs de H_r^{RG} correspondent aux générateurs de $H_c^{\mathcal{P}(\text{RG})}$ puisque le fait d'autoriser l'ensemble des vertex possibles équivaut à retirer la contrainte des résidus. De plus le powercounting de la relativité générale nous assure que tous les graphes de la théorie sont divergents. D'où l'égalité :

$$D_r = \{ \gamma = \amalg_i \gamma_i \mid \gamma \neq \mathbf{1} \text{ et } \omega(\gamma_i) \geq 0 \text{ sous graphes de } \Gamma \} = \{ \gamma = \amalg_i \gamma_i \mid \gamma \neq \mathbf{1} \text{ et } \gamma_i \in \text{1PI sous graphes de } \Gamma \} = D_c$$

Ceci nous assure que le coproduit et la co-unité des deux algèbres coïncident. \square

Comprendre les propriétés de $H_c^{\mathcal{P}(\mathcal{T})}$ dans des cas plus simples que celui de la gravité peut donc faire avancer notre compréhension des problèmes de renormalisation de la relativité générale.

5 Conclusion

L'introduction des algèbres de Hopf en théorie quantique des champs permet de donner des bases algébriques solides à la théorie de la renormalisation. Nous avons montré que la procédure récursive de l'algorithme BPHZ se formule dans ce cadre et qu'elle aboutit à des contretermes locaux du fait des propriétés de l'opérateur d'insertion vis-à-vis de la cohomologie de Hochschild.

Cependant les méthodes introduites ici nous permettent bien plus. La formule de Zimmermann qui résoud la récurrence de BPHZ trouve son équivalent dans ce formalisme. Les symétries de jauge, qui ne sont pas apparentes ici du fait de notre limitation à l'étude des champs scalaires, qui donnent lieu aux identités de Ward ou de Slavnov–Taylor se traduisent par l'existence d'idéaux de l'algèbre de Hopf de renormalisation encore une fois contraints par la cohomologie de Hochschild. On peut également réécrire l'équation de Dyson–Schwinger de manière combinatoire directement sur les graphes de Feynman et mettre au point de nouvelles méthodes de résolutions utilisant les propriétés de l'opérateur d'insertion. En bref, on peut faire de la théorie quantique des champs en se passant des méthodes fonctionnelles.

Le prochain défi lancé à ces méthodes algébriques est la compréhension de la gravité en tant que théorie quantique des champs et la mise en place de méthodes non perturbatives dans l'étude de ses fonctions de corrélations. Dans l'immédiat ceci passe par une meilleure vision des «core Hopf algebras » et par un travail sur la combinatoire des graphes de Feynman de la gravitation.

Remerciements : je remercie Alessandra Frabetti pour son enthousiasme dans l'étude mathématique de la théorie quantique des champs et pour sa rigueur dans la rédaction ainsi que Dirk Kreimer pour ses observations concernant la gravité.

A Algèbres de Hopf et schémas en groupes affines

A.1 Algèbres de Hopf commutatives

On donne ici quelques notions de bases sur les algèbres de Hopf commutative et les schémas en groupe affine [WW, CM]. Une algèbre de Hopf commutative est simplement une bigèbre unitale munie d'un antipode et telle que les différentes opérations soient compatibles. Rendons tout ceci plus précis.

Soit k un corps de caractéristique nulle. On considère une algèbre unitale sur k notée (H, m, u) où $m : H \otimes H \rightarrow H$ est la multiplication de l'algèbre, u correspond à l'élément neutre de l'anneau. On note $id_H : H \rightarrow H$ l'application identité $id_H(h) = uh = h$.

Définition - Algèbre de Hopf commutative. Une algèbre de Hopf commutative H est une algèbre associative commutative unitale sur k , munie d'un coproduit $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$, d'une co-unité $\epsilon : H \rightarrow k$ et d'un antipode $S : H \rightarrow H$ tels que :

- (i) Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbre, S est un antimorphisme d'algèbre.
- (ii) $(\Delta \otimes id_H)\Delta = (id_H \otimes \Delta)\Delta$, i.e. Δ est coassociatif
- (iii) $(id_H \otimes \epsilon)\Delta = id_H = (\epsilon \otimes id_H)\Delta$
- (iv) $m(id_H \otimes S)\Delta = u\epsilon = m(S \otimes id_H)\Delta$

On parlera de l'algèbre de Hopf H pour désigner $(H, m, u, \Delta, \epsilon, S)$.

On dira que H est graduée si il existe une famille d'espaces vectoriels $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $H = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i$ avec :

$$H_0 = ku \quad , \quad H_i H_j \subset H_{i+j} \quad , \quad \Delta H_k \subset \bigoplus_{i+j=k} H_i \otimes H_j ,$$

$$\epsilon(u) = 1_k \quad , \quad \Delta u = u \otimes u ,$$

$$\text{et } \epsilon \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i \right) = 0 \text{ signifie que } H \text{ est connexe.}$$

On appelle idéal d'augmentation $ker(\epsilon)$ le noyau de la co-unité. On lui associe le projecteur $P : H \rightarrow ker(\epsilon)$ défini par $P = id_H - u\epsilon$.

Regardons l'exemple des fonctions sur un groupe topologique. Soit G un groupe topologique et k un corps notons $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des applications de G dans k . C'est une algèbre sur k pour le produit usuel des fonctions. Pour tout $g \in G$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G)$ il est tel que $(f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$. Il est alors aisé de vérifier que pour le coproduit, la co-unité et l'antipode définis ci-dessous $\mathcal{F}(G)$ est bien une algèbre de Hopf. On définit donc le coproduit comme $\Delta : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}(G)$ et $g_1, g_2 \in G$:

$$\Delta f(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$$

La co-unité est définie par $\epsilon : \mathcal{F}(G) \rightarrow k$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}(G)$ et e le neutre du groupe :

$$\epsilon(f) = f(e)$$

Finalement l'antipode est définie par $S : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}(G)$ et $g \in G$:

$$S(f)(g) = f(g^{-1})$$

A.2 Schémas en groupes affines

Pour comprendre un peu mieux l'idée derrière la structure d'algèbre de Hopf on va construire le lien entre les schémas en groupe affine et les algèbres de Hopf commutatives.

Définition - Foncteur représentable. Soit \mathcal{C} une catégorie. La représentation d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ est la donnée d'une paire $(R, \tilde{\phi})$ où R est un objet de \mathcal{C} et $\tilde{\phi} : F(\cdot) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(R, \cdot)$ est un isomorphisme naturel. Si un tel couple existe, on dit que R représente F .

Définition - Schéma en groupe affine. Un schéma en groupe affine est un foncteur représentable de $k\text{-Alg}$ vers Grp .

Etant donné un foncteur représentable $F : k\text{-Alg} \rightarrow \text{Set}$, pour obtenir un schéma en groupe affine $G : k\text{-Alg} \rightarrow \text{Grp}$ on doit réparer l'oubli de la structure de groupe sur les ensembles. Le foncteur G est tout simplement $(F, \tilde{\mu}, \tilde{y}, \tilde{\eta})$ avec $\tilde{\mu}, \tilde{y}$ et $\tilde{\eta}$ les applications naturelles correspondants aux lois de groupe telles que pour toutes k -algèbres A et B avec $\phi \in \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B)$ qui induit $F(\phi) : F(A) \rightarrow F(B)$ les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 F(A)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu_A} & F(A) \\
 F(\phi) \otimes F(\phi) \downarrow & & \downarrow F(\phi) \\
 F(B)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu_B} & F(B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{e\} & \xrightarrow{y_A} & F(A) \\
 & \searrow y_B & \downarrow F(\phi) \\
 & & F(B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & F(A) \\
 F(\phi) \downarrow & & \downarrow F(\phi) \\
 F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & F(B)
 \end{array}$$

Ces applications sont définies pour tout objet E de Set , $\mu : E \otimes E \rightarrow E$ (produit), $y : \{e\} \rightarrow E$ (fixation du neutre) et $\eta : E \rightarrow E$ (inversion) telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 E^{\otimes 3} & \xrightarrow{id \otimes \mu} & E^{\otimes 2} \\
 \mu \otimes id \downarrow & & \downarrow \mu \\
 E^{\otimes 2} & \xrightarrow{\mu} & E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \{e\} \otimes E & \xrightarrow{y \otimes id} & E^{\otimes 2} \\
 & \searrow & \downarrow \mu \\
 & & E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 E^{\otimes 2} & \xrightarrow{\eta \otimes id} & E^{\otimes 2} \\
 proj \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \{e\} & \xrightarrow{y} & E
 \end{array}$$

La seule chose qui reste à se demander est la manière dont l'ajout de ses applications naturelles modifie la représentation de notre foncteur. La réponse nous est donnée par le lemme de Yoneda.

Lemme de Yoneda. Soit \mathcal{C} une catégorie et C un objet de \mathcal{C} , on considère les deux foncteurs de \mathcal{C} dans Set , F et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot)$. Alors l'application $\beta : \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot), F) \rightarrow F(C)$, $\tilde{\phi} \mapsto \phi_C(id_C)$ établie une bijection entre les transformations naturelles $\tilde{\phi} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot) \rightarrow F$ et les éléments de $F(C)$:

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot), F) \cong F(C).$$

Preuve. Commençons par montrer que β est une application injective. Pour tout objet A de \mathcal{C} , $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ et $\tilde{\eta} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot) \rightarrow F$ une transformation naturelle, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, f)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \\
 \eta_C \downarrow & & \downarrow \eta_A \\
 & \begin{array}{ccc} id_C & \xrightarrow{\quad} & f \circ id_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \eta_C(id_C) & \xrightarrow{\quad} & \eta_A(f) \end{array} & \\
 F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(A)
 \end{array}$$

Donc $\eta_A(f) = F(f) \circ \eta_C(id_C) = F(f) \circ \beta(\tilde{\eta})$. Considérons alors deux de ces transformations naturelles, $\tilde{\phi}$ et $\tilde{\psi}$. D'après l'égalité précédente $\beta(\tilde{\phi}) = \beta(\tilde{\psi})$ implique que pour tout $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ on a $\phi_A(f) = \psi_A(f)$. Donc $\tilde{\phi} = \tilde{\psi}$ c'est-à-dire que β est injective.

Il ne reste donc maintenant qu'à montrer la surjectivité. Pour cela considérons x un élément de $F(C)$. Pour tout $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ l'application ϕ_A définie par $\phi_A(f) = F(f)(x)$ est telle que $\phi_A(id_C) = F(id_C)(x) = x$. Pour tout objet B de \mathcal{C} et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, g)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \\
 \phi_A \downarrow & & \downarrow \phi_B \\
 F(A) & \xrightarrow{F(g)} & F(B)
 \end{array}$$

Or $\phi_B(g \circ f) = F(g \circ f)(x) = F(g)F(f)(x)$ et $F(g) \circ \phi_A(f) = F(g)F(f)(x)$. Le diagramme ci-dessus est donc commutatif ce qui entraîne que l'application $\phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \cdot) \rightarrow F$ définie pour tout $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ par $\phi_A(f) = F(f)(x)$ où $x \in F(C)$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, est une transformation naturelle.

A tout élément de $F(A)$ on fait donc correspondre une transformation naturelle, ce qui prouve la surjectivité. L'application β est donc bien une bijection. \square

Une conséquence immédiate de ce lemme nous permet de comprendre ce qui se passe dans le cas de nos foncteurs représentables.

Corollaire. Soient F et G deux foncteurs représentés par les objets A et B respectivement. Les transformations naturelles $F \mapsto G$ sont en bijection avec les morphismes $B \rightarrow A$.

Preuve. Soient $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ sont représentés par $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ signifie que ces foncteurs sont naturellement isomorphes à $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \cdot)$ respectivement. Nous sommes dans le cas particulier du lemme de Yoneda :

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \cdot)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

□

Par conséquent un schéma en groupe affine $G = (F, \tilde{\mu}, \tilde{y}, \tilde{\eta})$ voit sa représentation munie de manière naturelle, du fait de la bijection exhibée ci-dessus, des morphismes suivants : pour tout A algèbre sur k et $F(A) = \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(R, A)$

$$F(A) \otimes F(A) \xrightarrow{\mu^A} F(A) \implies R \otimes R \xleftarrow{\Delta} R, \text{ le coproduit.}$$

$$\{e\} \xrightarrow{y^A} F(A) \implies k \xleftarrow{\epsilon} R, \text{ la co-unité.}$$

$$F(A) \xrightarrow{\eta^A} F(A) \implies R \xleftarrow{S} R, \text{ l'antipode.}$$

Les propriétés de ces opérations sont alors déduites de celles de (μ, y, η) par reversement des flèches :

$$\begin{array}{ccccc}
 R^{\otimes 3} & \xleftarrow{id \otimes \Delta} & R^{\otimes 2} & & k \otimes R & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & R^{\otimes 2} & & R^{\otimes 2} & \xleftarrow{S \otimes id} & R^{\otimes 2} \\
 \Delta \otimes id \uparrow & & \uparrow \Delta & & \parallel & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta \\
 R^{\otimes 2} & \xleftarrow{\Delta} & R & & & & R & & k & \xleftarrow{\epsilon} & R
 \end{array}$$

On reconnaît alors que de cette manière R est munie d'une structure d'algèbre de Hopf. C'est une algèbre commutative par construction. On a donc une correspondance entre les schémas en groupe affine sur un corps k et les algèbres de Hopf commutatives sur k .

Références

- [KR] Dirk Kreimer, *Anatomy of a gauge theory*, Annals Phys. vol. 321, p2757-2781, 2006.
- [KR1] Dirk Kreimer, *The core Hopf algebra*, Clay Mathematics Proceedings vol. 10, 2008.
- [CK1] Alain Connes et Dirk Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem I*, Commun. Math. Phys. 210, p249-273, 2000.
- [CK2] Alain Connes et Dirk Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem II*, Commun. Math. Phys. 216, p215-241, 2001.
- [WW] William Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1979.
- [CM] Alain Connes et Matilde Marcolli, *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, American Mathematical Society, 2007.
- [CR] John C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1985.
- [ZR] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov’s method of renormalization in momentum space*, Commun. Math. Phys. 15, p208-234, 1969.