Stage de Recherche — Master 2 de Physique Théorique
Ecole Normale Supérieure de Lyon / Université Claude Bernard Lyon 1

Etude de la renormalisabilité perturbative des théories de gravité et supergravité en espace plat

Quentin PIERRE

effectué à

l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques

et au

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies

sous la direction de

Pierre VANHOVE

7 avril - 31 juillet 2009

Résumé

Poussés par le désir de comprendre les phénomènes physiques se produisant aux très hautes énergies, et voulant trouver un cadre unificateur pour les *4* intéractions fondamentales, les physiciens théoriciens ont accordé depuis les années *1930* une place prépondérante à la recherche d'une ***description quantique de l'intéraction gravitationnelle***. Ces efforts, bien qu'ayant apporté des avancées considérables dans de nombreux domaines de la physique théorique et des mathématiques, n'ont pas encore abouti, et doivent être poursuivis.

Dans ce travail, nous nous proposons de synthétiser certaines étapes cruciales du développement de cette ***gravitation quantique perturbative***. Nous utilisons donc les outils de la ***théorie des champs***, notamment la théorie des perturbations et le concept de renormalisation, pour examiner le comportement ultraviolet de théories de la gravitation, en l'absence de matière (gravité *pure*) et lorsque l'espace de fond est *plat* (minkowskien). Plus précisément, nous verrons en premier lieu la ***relativité générale***, avec une approche basée sur la fonctionnelle d'Einstein-Hilbert. Une étude détaillée de cette dernière nous permettra de traiter la question de l'invariance sous l'action du groupe des difféomorphismes (et donc celle de la fixation de jauge) et d'extraire les règles de Feynman. Forts de ces informations, nous procèderons au comptage de puissances de la théorie, puis nous en examinerons les ***divergences*** aux premiers ordres en nombre de boucles. Notamment nous montrerons que la gravité pure, bien que renormalisable à une boucle, souffre de divergences non-renormalisables dès l'ordre de deux boucles. Ensuite nous montrerons que l'ajout de la ***supersymétrie*** permet d'améliorer le comportement quantique des théories de gravité. Enfin, la conclusion nous donnera l'occasion d'esquisser les avancées modernes du domaine.

Table des matières

1 Introduction : la quantification de la gravité **7**

2 Les divergences en Relativité Générale **7**
2.1 La Relativité Générale vue comme théorie des champs . . . 7
2.1.1 Cadre de travail . . . 7
2.1.2 L'action d'Einstein-Hilbert . . . 7
2.1.3 Développement perturbatif de l'action . . . 8
2.1.4 Fixation de la jauge et règles de Feynman . . . 12
2.2 Le comptage de puissances (*power counting*) de la Relativité Générale . . . 15
2.3 Divergences à l'ordre d'une boucle . . . 17
2.3.1 Forme a priori du lagrangien de contre-terme — Résultat fondamental . . . 17
2.3.2 Examen des graphes à deux et trois pattes externes . . . 18
2.4 Divergences à l'ordre de deux boucles . . . 22
2.4.1 Forme a priori du lagrangien de contre-terme . . . 22
2.4.2 Expression finale . . . 22

3 Les divergences en Supergravité **22**
3.1 Divergences à l'ordre d'une boucle . . . 23
3.2 Divergences à l'ordre de deux boucles . . . 23

4 Conclusion et perspectives **23**

5 Annexes **26**
5.1 Notations . . . 26
5.2 Conventions . . . 26
5.3 Notions de géométrie différentielle . . . 26
5.3.1 Qu'est-ce qu'une métrique ? . . . 26
5.3.2 Action du groupe des difféomorphismes sur Met($\mathscr{M}$) . . . 27
5.3.3 Action d'Einstein-Hilbert et groupe des difféomorphismes . . . 28
5.3.4 Quelques propriétés du tenseur de Riemann . . . 28

Remerciements **30**

1 Introduction : la quantification de la gravité

« *Car Dieu est le compactifié d'Alexandrov de l'univers.* »
Alexander Grothendieck

Dès la découverte de la relativité générale, les physiciens commencèrent à mentionner l'intérêt d'une détermination des ***corrections quantiques*** à la théorie d'Einstein. D'abord à l'état de conjectures basées sur des considérations qualitatives, les idées naissantes prirent corps quelques dizaines d'années plus tard grâce aux développements de la théorie quantique (et relativiste) des champs (notamment les concepts de régularisation et renormalisation), cette dernière permettant des calculs explicites. Les mauvais pressentiments à l'égard du comportement ultraviolet de la gravité einsteinienne trouvèrent alors confirmation.

A l'heure actuelle, en ce qui concerne la description quantique des intéractions faible, forte et électromagnétique, nous disposons du ***modèle standard***. L'autre pan de la physique fondamentale, la gravitation, semble résister aux physiciens. En effet, aucun des modèles développés par ces derniers depuis les années *70* (qui recèlent, certes, un nombre mirobolant de richesses physiques et mathématiques) ne donne une théorie satisaisante pour la gravitation quantique.

« *Quantum gravity makes no sense* », voilà l'une des attitudes que Duff envisage d'adopter ([1],*1981*) face à l'échec de la non-renormalisabilité de la gravité einsteinienne. Cette interrogation est toujours d'actualité : ***pourquoi quantifier la gravité ?*** ne pourrions-nous pas nous contenter des approximations (semi-)classiques ? Je liste ci-après quelques raisons en faveur d'une persévérance dans la recherche d'une telle théorie

(i) Appréhender les phénomènes cosmologiques se déroulant à échelle microscopique à la naissance de notre univers, ou même ceux qui sont sur le point de se produire au coeur du LHC, nécessite de comprendre les effets gravitationnels dans toute leur non-linéarité

(ii) On sait de toute façon que les théories de Yang-Mills qui constituent le modèle standard ne sont qu'une description *effective* des intéractions. Autrement dit, elles ne sont valables que dans une certaine fenêtre d'énergie (ou de longueur). [1] Toute théorie honnête visant à décrire les intéractions entre particules se doit de prendre en compte la gravité.

Cette brève énumération, qui pourrait aisément être enrichie de nombreux développements, montre donc combien il est important de poursuivre les efforts entrepris avec vigueur par la communauté physico-mathématique depuis presque 100 ans afin de décrire d'une manière cohérente la gravitation au niveau microscopique.

2 Les divergences en Relativité Générale

2.1 La Relativité Générale vue comme théorie des champs

2.1.1 Cadre de travail

La théorie avec laquelle nous travaillerons dans cette partie est celle de la relativité générale, i.e. la théorie de la gravitation associée au nom d'Einstein. Nous nous bornerons au cas de la ***gravité pure***, i.e. sans source de matière. Le parti pris est celui de la théorie des champs. Ainsi, nous voulons partir d'une métrique g qui est solution des équations du mouvement (on dit que c'est une *solution classique*), lesquelles sont déduites d'une action nommée ***action d'Einstein-Hilbert***, puis considérer des perturbations autour de celle-ci. Dans l'idée de la théorie des champs, le champ h décrivant cette perturbation, appelé le *champ quantique*, est généralement interprétété comme une particule bosonique, de masse nulle et de spin *2*, nommée ***graviton*** [2]. Ensuite, pour obtenir les règles de Feynman de notre théorie, il faut calculer le *développement* de l'action classique $\mathcal{S}$ autour du point de départ, i.e. le développement limité de $\mathcal{S}(g + \varepsilon h)$. Dans la littérature on nomme souvent cela la ***méthode du champ externe***.

2.1.2 L'action d'Einstein-Hilbert

On travaille sur une variété différentielle $\mathscr{M}$ supposée réelle, de dimension $D \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et de classe $\mathscr{C}^\infty$ (remarque : en relativité générale la dimension est supposée être $D = 4$). La restriction de $\mathrm{Met}(\mathscr{M})$ aux métriques

[1] Pour ne citer qu'un problème parmi d'autres, le modèle standard prédit une masse nulle pour le neutrino, résultat ayant été infirmé par les expériences.

[2] Cette particule n'a jamais été détectée, donc son existence reste hypothétique

lorentziennes, i.e. aux métriques de signature $(1,-1,\ldots,-1)$, sera notée $\mathrm{Lor}(\mathscr{M})$. L'action d'Einstein-Hilbert en D dimensions est alors la fonctionnelle définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} : \mathrm{Lor}(\mathscr{M}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & \mathcal{S}(g) := \varkappa_D^{-2} \displaystyle\int_{\mathscr{M}} \mathscr{R}(g)\, vol(g) = \varkappa_D^{-2} \int_{\mathscr{M}} \mathscr{R}(g) |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\, dx \end{array} \tag{2.1}$$

où $\varkappa_D := (16\pi G_D)^{\frac{1}{2}}$.
Comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction scalaire (le scalaire de courbure) avec la forme volume, la fonctionnelle considérée est ***invariante sous l'action du groupe des difféomorphismes*** (voir 5.3). On emploie alors le vocabulaire des théories de Yang-Mills en décrétant que la relativité générale est une théorie de jauge, dont le groupe de jauge est $\mathrm{Diff}(\mathscr{M})$ (tandis qu'il s'agit de $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}, \mathrm{U}_1 \times \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_3)$ dans le "modèle standard").

Remarque sur les dimensions
En théorie des champs on est amené à considérer des intégrales de chemin de la forme

$$\int_{\mathrm{Maps}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \mathscr{G}(\varphi)\, \mathrm{e}^{i\mathcal{S}(\varphi)}\, \mathcal{D}\varphi, \tag{2.2}$$

ce qui impose que l'action $\mathcal{S}$ soit adimensionnée. Vérifions cela :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\mathcal{S}(g)) &= (\mathscr{D}(\varkappa_D))^{-2} \cdot \mathscr{D}\left(\int_{\mathscr{M}} \mathscr{R}(g) |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\, dx \right) \\ &= (\mathscr{D}(G_D))^{-1} \cdot \mathscr{D}(\mathscr{R}(g)) \cdot \mathscr{D}(dx) \\ &= (\mathrm{M}^{2-D})^{-1} \cdot \mathrm{M}^2 \cdot \mathrm{M}^{-D} \\ &= \mathrm{M}^0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\diamondsuit$

2.1.3 Développement perturbatif de l'action

On perturbe la métrique g en considérant $\bar{g} := g + \varepsilon h$[3], où h est un élément de $\mathrm{Met}(\mathscr{M})$ à ***support compact***. Le développement à l'ordre n de l'action $\mathcal{S}$ s'écrit :

$$\mathcal{S}(\bar{g}) = \mathcal{S}(g + \varepsilon h) = \mathcal{S}_0 + \varepsilon \mathcal{S}_1 + \cdots + \varepsilon^n \mathcal{S}_n + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}) \tag{2.4}$$

où

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(g) \quad \text{et} \quad \forall \ell \in \{1,\ldots,n\}, \quad \mathcal{S}_\ell = \tfrac{d^\ell}{d\theta^\ell}\big|_0\, \mathcal{S}(g + \theta h) \tag{2.5}$$

Remarques

(i) *Quelques notations*
On note ∇ et $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, respectivement, la connexion de Levi-Civita et les symboles de Christoffel associés à la métrique de fond g. De même, $\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_{\mu\nu}$ et $\mathscr{R}$ désigneront respectivement les composantes du tenseur de Riemann, les composantes du tenseur de Ricci et le scalaire de courbure, associés à la métrique de fond g. Enfin, les indices seront levés et abaissés à l'aide de cette même métrique.
En revanche, toutes les quantités barrées supérieurement se référeront à $g + \varepsilon h$, soit :

$$\forall \mathscr{A}, \quad \overline{\mathscr{A}} := \mathscr{A}(g + \varepsilon h) \tag{2.6}$$

(ii) *Au sujet des dérivées totales*
On écrit souvent les résultats modulo des termes additifs de "dérivée totales" [4]. Dans notre cas, ces termes sont de la forme $|\det(g)^{\frac{1}{2}}|(\nabla_\alpha X)^\alpha$. En effet :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = |\det(g)|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu (|\det(g)|^{\frac{1}{2}}), \tag{2.7}$$

donc, pour tout $X \in \Gamma(\mathscr{T}_{\mathscr{M}})$,

[3]On se contentera parfois de la version non-rigoureuse de cette expression, i.e. $\bar{g} = g + h$, où h sera lui-même supposé "infinitésimal"

[4]Remarque : on utilisera parfois le signe $\equiv$ pour indiquer que deux quantités sont égales modulo ce genre de terme additif

$$
\begin{aligned}
|\det(g)|^{\frac{1}{2}}(\nabla_\alpha X)^\alpha &= |\det(g)|^{\frac{1}{2}}(\partial_\alpha X^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}X^\mu) \\
&= |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\partial_\alpha X^\alpha + \left(\partial_\mu(|\det(g)|^{\frac{1}{2}})\right) X^\mu \\
&= \partial_\alpha(|\det(g)|^{\frac{1}{2}} X^\alpha)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Ainsi les intégrales des termes de cette forme s'écrivent :

$$
\int_{\mathscr{M}} (\nabla_\alpha X)^\alpha \; vol(g) = \int_{\mathscr{M}} (\nabla_\alpha X)^\alpha |\det(g)|^{\frac{1}{2}} \; dx = \int_{\mathscr{M}} \partial_\alpha(|\det(g)|^{\frac{1}{2}} X^\alpha) \; dx \tag{2.9}
$$

Ce sont donc des termes de bord. Dans notre cas, le champ vectoriel X sera toujours à support compact, et ces termes seront donc nuls. $\diamondsuit$

Avant de procéder au développement détaillé, on peut déjà se donner une idée de la forme des termes. La densité lagrangienne est

$$
\mathscr{L}(g) = \varkappa_D^{-2}|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\mathscr{R}(g) = \varkappa_D^{-2}|\det(g)|^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}\mathscr{R}^\sigma{}_{\alpha\beta\sigma} \tag{2.10}
$$

En injectant $g \mapsto \bar{g} = g + \varepsilon h$ on voit que le déterminant et l'inverse de la métrique ne donnent que des puissances de h, tandis que le tenseur de Riemann donne des dérivées de h. Schématiquement, si j'utilise les notations génériques D (dérivation) et Γ (symboles de Christoffel), ce tenseur s'écrit

$$
\mathrm{Riem}(g) \simeq \mathrm{D}\Gamma + \Gamma^2 \simeq \mathrm{D}(g^{-1}\mathrm{D}g) + (g^{-1}\mathrm{D}g)^2 \tag{2.11}
$$

mais (en oubliant les dérivées totales et les facteurs numériques)

$$
\mathrm{D}(g^{-1}\mathrm{D}g) = \mathrm{D}(g^{-1})\mathrm{D}g + g^{-1}\mathrm{D}^2 g \equiv g^{-1}(\mathrm{D}g)g^{-1}\mathrm{D}g + \mathrm{D}(g^{-1})\mathrm{D}g \equiv (g^{-1}\mathrm{D}g)^2, \tag{2.12}
$$

d'où (en supposant $\mathrm{D}g = 0$, i.e. $\forall(\mu,\alpha,\beta)\;\; \partial_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, ce qui sera notre cas par la suite)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Riem}(g+\varepsilon h) &= \mathrm{Riem}(\bar{g}) \\
&\equiv (\bar{g}^{-1}\mathrm{D}\bar{g})^2 \\
&\equiv (g+\varepsilon h)^{-2}(\varepsilon \mathrm{D}h)^2 \\
&\equiv \varepsilon^2 g^{-2}(1+\varepsilon g^{-1}h)^{-2}(\mathrm{D}h)^2 \\
&\equiv \varepsilon^2 g^{-2}(1 - 2\varepsilon g^{-1}h + 3\varepsilon^2(g^{-1}h)^2 + \cdots)(\mathrm{D}h)^2,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

et donc $\mathscr{L}$ a bien une structure de type

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(g+\varepsilon h) &\simeq (a_0 + a_1\varepsilon h + a_2\varepsilon^2 h^2 + \cdots)\varepsilon^2(\mathrm{D}h)^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m \varepsilon^{m+2} h^m (\mathrm{D}h)^2
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Ceci mérite déjà une remarque capitale : dans les théories de Yang-Mills (groupe de symétrie $G = \mathrm{SU}_n$ par exemple), la densité lagrangienne $\mathscr{L}_{YM}$ de la théorie libre (*pure Yang-Mills*) fait intervenir le carré de la ***field-strengh*** :

$$
\mathscr{L}_{YM} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}_G\left(\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\mathcal{F}_{\alpha\beta}\right)^a\left(\mathcal{F}^{\alpha\beta}\right)^a \quad (a \in \{1,\ldots,\dim(G)\}), \tag{2.15}
$$

qui est elle-même d'ordre 1 et 2 dans le champ $\mathcal{A}$:

$$
\left(\mathcal{F}_{\alpha\beta}\right)^a = \partial_\alpha\mathcal{A}^a_\beta - \partial_\beta\mathcal{A}^a_\alpha + \mathsf{g}\, C^{abc}\mathcal{A}^b_\alpha\mathcal{A}^c_\beta, \tag{2.16}
$$

de sorte que le développement de $\mathscr{L}_{YM}$ ne contient que des termes quadratiques, cubiques et quartiques. Autrement dit, on a des vertex à *2*, *3* et *4* points seulement ; tandis qu'ici, la somme est infinie et on a des vertex à nombre quelconque de points ! De ce point de vue, la gravité pose donc des problèmes inédits, et se détache des autres théories connues des physiciens des particules.

Ensuite, chaque terme de cette somme contient exactement ***deux dérivées***.
Notamment, le terme quadratique, i.e. le terme libre, est une somme de termes de la forme $\mathscr{L}_2 \simeq (\mathrm{D}h)(\mathrm{D}h)$, i.e. de la forme $h\mathrm{D}^2h$, ce qui donne k^2h^2 en transformée de Fourier : on peut donc déjà affirmer que la fonction à deux points, i.e. le ***propagateur***, est en $\frac{1}{k^2}$, caractéristique d'une théorie sans masse.

Par ailleurs, le terme d'intéraction d'ordre le plus bas, i.e. la ***fonction à trois points*** ou ***vertex***, est de la forme $h(\mathrm{D}h)^2$, i.e., en transformée de Fourier, k^2h^3. La règle de Feynman pour le vertex est donc quadratique dans les moments (internes ou externes). Comme nous le verrons par la suite, c'est ce résultat qui est à l'origine de la non-renormalisabilité de la gravité pure.

Cela dit, il existe un autre moyen de s'apercevoir rapidement du comportement de la théorie : en faisant le changement de fonction

$$\mathsf{h} := \frac{\varepsilon}{\varkappa_D} h, \quad \text{qui donne} \quad \bar{g} = g + \varkappa_D \mathsf{h} = g + (16\pi G_D)^{\frac{1}{2}} \mathsf{h}, \tag{2.17}$$

et en considérant h comme le nouveau champ quantique, le facteur du terme cinétique $(\mathrm{D}\mathsf{h})^2$ se retrouve adimensionné. On interprète alors le facteur du terme d'ordre 3 comme la ***constante de couplage***.
Dans la théorie en $\lambda\varphi^4$ on a

$$\mathrm{M}^D = \mathscr{D}((\mathrm{D}\varphi)^2) = \mathscr{D}(\lambda\varphi^4), \tag{2.18}$$

(où D dénote toujours une dérivée première quelconque)
d'où

$$\mathscr{D}(\varphi) = \mathrm{M}^{\frac{D-2}{2}} \quad \text{et donc} \quad \mathscr{D}(\lambda) = \mathrm{M}^{4-D} \tag{2.19}$$

Donc en dimension *4* la constante de couplage est adimensionnée et la théorie est renormalisable.
En électrodynamique on a

$$\mathrm{M}^D = \mathscr{D}((\mathrm{D}A)^2) = \mathscr{D}(\bar{\psi}\mathrm{D}\psi) = \mathscr{D}(e\bar{\psi}A^\alpha\gamma_\alpha\psi), \tag{2.20}$$

d'où

$$\mathscr{D}(A) = \mathrm{M}^{\frac{D-2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}(\psi) = \mathrm{M}^{\frac{D-1}{2}} \quad \text{et donc} \quad \mathscr{D}(e) = \mathrm{M}^{\frac{4-D}{2}} \tag{2.21}$$

Ici aussi, en dimension 4 la constante de couplage (la charge électrique en l'occurence) est adimensionnée et la théorie est renormalisable.
En gravité pure, le facteur est $\varkappa_D$ (à un facteur adimensionné près) et on a

$$\mathscr{D}(\varkappa_D) = (\mathscr{D}(G_D))^{\frac{1}{2}} = \mathrm{M}^{\frac{2-D}{2}} \tag{2.22}$$

Notamment, en dimension *4* :

$$\mathscr{D}(\varkappa_4) = \mathrm{M}^{-1} = \mathrm{L} \tag{2.23}$$

La constante de couplage a la dimension d'une longueur, i.e. une dimension de masse négative. Ainsi, chaque ordre de correction nécessite un contre-terme présentant deux dérivées supplémentaires (pour garder un lagrangien de dimension D), et qui n'est donc pas de la forme du lagrangien initial : la gravité pure est donc manifestement non-renormalisable.

Remarque : à partir de maintenant, nous omettrons la plupart du temps le facteur $\varkappa_D^{-2}$, i.e. que nous supposerons que $\varkappa_D = 1$. $\diamondsuit$

Ecrivons le développement détaillé de l'action avec une métrique de fond g quelconque

$$\mathcal{S}(\bar{g}) = \mathcal{S}(g + \varepsilon h) = \int_{\mathscr{M}} \overline{\mathscr{R}} |\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}} \, dx \tag{2.24}$$

Nous nous limiterons à l'ordre deux, et n'obtiendrons donc pas la forme explicite de la règle de Feynman pour le vertex (qui, cela dit, a été calculée, et contient une centaine de termes). Nous nous contenterons des considérations qualitatives faites plus haut.
Nous avons déjà :

$$\begin{aligned}
\det(g + \varepsilon h) &= \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\ln(g+\varepsilon h))} \\
|\det(g + \varepsilon h)|^{\frac{1}{2}} &= |\det(g)|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \varepsilon(\tfrac{1}{2}h^\alpha_\alpha) + \varepsilon^2(-\tfrac{1}{4}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{8}(h^\alpha_\alpha)^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \\
(g + \varepsilon h)^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu} + \varepsilon^2 h^\mu_\alpha h^{\alpha\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha \overline{\Gamma}^\mu_{\nu\beta} + \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\beta}\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\sigma} - \partial_\beta \overline{\Gamma}^\mu_{\nu\alpha} - \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\alpha}\overline{\Gamma}^\mu_{\beta\sigma} \\
&= \mathscr{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta} + \varepsilon\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}) + \varepsilon^2\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
\overline{\mathscr{R}}_{\mu\nu} &= \overline{\mathscr{R}}^\alpha{}_{\mu\nu\alpha} = \mathscr{R}_{\mu\nu} + \varepsilon\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}_{\mu\nu}) + \varepsilon^2\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
\overline{\mathscr{R}} &= \bar{g}^{\alpha\beta}\overline{\mathscr{R}}_{\alpha\beta} = \mathscr{R} + \varepsilon\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}) + \varepsilon^2\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} &= \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \varepsilon\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) + \varepsilon^2\mathcal{C}_2(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

On obtient facilement

$$\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) - h^\alpha_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

que l'on peut mettre sous la forme plus compacte

$$\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}((\nabla_\mu h)_{\sigma\nu} + (\nabla_\nu h)_{\sigma\mu} - (\nabla_\sigma h)_{\mu\nu}), \tag{2.27}$$

Remarque : ceci montre que les $\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta})$ sont les composantes d'un *tenseur* , que l'on notera Γ_1. Une autre manière d'obtenir ce résultat [5] est de dire que $\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta})$ n'est autre que $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_0 \overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$, puis de remarquer que cette dérivée est essentiellement la différence de deux symboles de Christoffel. Or la différence de deux connexions est un tenseur, d'où le résultat. ♢

En calculant, d'une part, $\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta})$ en fonction des $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ et des $\mathcal{C}_1(\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}) \left(= (\Gamma_1)^\mu_{\alpha\beta}\right)$, et d'autre part, la différence $(\nabla_\alpha \Gamma_1)^\mu_{\beta\nu} - (\nabla_\beta \Gamma_1)^\mu_{\alpha\nu}$, on montre facilement que ces deux quantités sont les mêmes, ce qui permet d'exprimer $\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta})$ en fonction de h :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}) &= (\nabla_\alpha \Gamma_1)^\mu_{\beta\nu} - (\nabla_\beta \Gamma_1)^\mu_{\alpha\nu} \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}((\nabla_\alpha \nabla_\beta h)_{\sigma\nu} - (\nabla_\beta \nabla_\alpha h)_{\sigma\nu} \\
&+ (\nabla_\alpha \nabla_\nu h)_{\sigma\beta} - (\nabla_\alpha \nabla_\sigma h)_{\beta\nu} - (\nabla_\beta \nabla_\nu h)_{\sigma\alpha} + (\nabla_\beta \nabla_\sigma h)_{\alpha\nu})
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Mais par calcul direct on montre que

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta h)_{\sigma\nu} - (\nabla_\beta \nabla_\alpha h)_{\sigma\nu} = h_{\mu\sigma} \mathscr{R}^\mu{}_{\nu\beta\alpha} + h_{\mu\nu} \mathscr{R}^\mu{}_{\sigma\beta\alpha}, \tag{2.29}$$

de sorte que

$$\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}) = (\mathscr{R}_1)^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h^\mu_\sigma \mathscr{R}^\sigma{}_{\nu\beta\alpha} + h^\sigma_\nu \mathscr{R}^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} + (\nabla_\alpha \nabla_\nu h)^\mu_\beta - (\nabla_\alpha \nabla^\mu h)_{\beta\nu} - (\nabla_\beta \nabla_\nu h)^\mu_\alpha + (\nabla_\beta \nabla^\mu h)_{\alpha\nu}) \tag{2.30}$$

Ainsi :

$$\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}((\nabla_\beta \nabla_\alpha h)^\sigma_\sigma + (\nabla_\sigma \nabla^\sigma h)_{\beta\alpha} - (\nabla_\sigma \nabla_\beta h)^\sigma_\alpha - (\nabla_\sigma \nabla_\alpha h)^\sigma_\beta) \tag{2.31}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}) &= g^{\alpha\beta} \mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}_{\alpha\beta}) - h^{\alpha\beta} \mathscr{R}_{\alpha\beta} \\
&= (\nabla^\alpha \nabla_\alpha h)^\beta_\beta - (\nabla_\alpha \nabla^\beta h)^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \mathscr{R}_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

On est désormais en mesure d'écrire le terme linéaire complet :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}} \overline{\mathscr{R}}) &= |\det(g)|^{\frac{1}{2}}((\nabla_\alpha \nabla^\alpha h)^\beta_\beta - (\nabla_\alpha \nabla_\beta h)^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \mathscr{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathscr{R} h^\alpha_\alpha) \\
&\equiv |\det(g)|^{\frac{1}{2}}(-h^{\alpha\beta} \mathscr{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathscr{R} h^\alpha_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Pour ce qui est de la partie quadratique, les symboles de Christoffel subissent le même type de réécriture que pour la partie linéaire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_2(\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\mu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} h^\alpha_\gamma h^{\beta\gamma}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta}((\nabla_\mu h)_{\beta\nu} + (\nabla_\nu h)_{\beta\mu} - (\nabla_\beta h)_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Ce sont là aussi les composantes d'un tenseur, qu'on note Γ_2.
On montre ensuite aisément que

$$\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}) = (\nabla_\alpha \Gamma_2)^\mu_{\nu\beta} - (\nabla_\beta \Gamma_2)^\mu_{\nu\alpha} + (\Gamma_1)^\gamma_{\nu\beta}(\Gamma_1)^\mu_{\alpha\gamma} - (\Gamma_1)^\gamma_{\nu\alpha}(\Gamma_1)^\mu_{\beta\gamma} \tag{2.35}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}_{\nu\alpha}) &= \mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}^\mu{}_{\nu\alpha\mu}) \\
&= \nabla_\alpha(-\frac{1}{2} h^{\mu\gamma}(\nabla_\nu h)_{\mu\gamma}) \\
&- \nabla_\beta \left(-\frac{1}{2} h^{\beta\gamma}((\nabla_\nu h)_{\gamma\alpha} + (\nabla_\alpha h)_{\gamma\nu} - (\nabla_\gamma h)_{\nu\alpha})\right) \\
&+ \frac{1}{4}((\nabla_\mu h)^\gamma_\nu + (\nabla_\nu h)^\gamma_\mu - (\nabla^\gamma h)_{\mu\nu})((\nabla_\alpha h)^\mu_\gamma + (\nabla_\gamma h)^\mu_\alpha - (\nabla^\mu h)_{\alpha\gamma}) \\
&- \frac{1}{4}(\nabla_\gamma h)^\mu_\mu((\nabla_\nu h)^\gamma_\alpha + (\nabla_\alpha h)^\gamma_\nu - (\nabla^\gamma h)_{\nu\alpha}),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

[5] nous ne tenons pas ici compte de la rigueur, seulement de l'idée

ce qui permet d'obtenir la partie quadratique du scalaire de courbure en fonction de quantitées déjà toutes calculées :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}) &= \mathcal{C}_2(\bar{g}^{\nu\alpha}\overline{\mathscr{R}}_{\nu\alpha}) \\ &= g^{\nu\alpha}\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}_{\nu\alpha}) + \mathcal{C}_1(\bar{g}^{\nu\alpha})\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}_{\nu\alpha}) + \mathcal{C}_2(\bar{g}^{\nu\alpha})\mathscr{R}_{\nu\alpha} \qquad (2.37)\end{aligned}$$

Le terme quadratique complet s'écrit donc

$$\mathcal{C}_2(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}}\overline{\mathscr{R}}) = \mathcal{C}_0(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}})\mathcal{C}_2(\overline{\mathscr{R}}) + \mathcal{C}_1(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}})\mathcal{C}_1(\overline{\mathscr{R}}) + \mathcal{C}_2(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}})\mathcal{C}_0(\overline{\mathscr{R}}) \qquad (2.38)$$

Les résultats finaux, écrits sous la forme $\mathcal{S}_\ell = \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}_\ell \, dx$, sont donc :

$$\begin{aligned}\textit{terme linéaire : } \mathscr{L}_1 &\equiv -|\det(g)|^{\frac{1}{2}} h^{\alpha\beta}(\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\mathscr{R}g_{\alpha\beta}) \\ \textit{terme quadratique : } \mathscr{L}_2 &\equiv |\det(g)|^{\frac{1}{2}}(-\tfrac{1}{4}(\nabla_\gamma h)^{\alpha\beta}(\nabla^\gamma h)_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{4}(\nabla_\gamma h)^\alpha_\alpha(\nabla^\gamma h)^\beta_\beta \\ &+ \tfrac{1}{2}(\nabla_\gamma h)^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha h)^\gamma_\beta - h^\alpha_\gamma h^{\gamma\beta}\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}(\nabla_\gamma h)^\alpha_\alpha(\nabla_\beta h)^{\gamma\beta} \\ &+ \tfrac{1}{2}h^\gamma_\gamma h^{\alpha\beta}\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{8}((h^\gamma_\gamma)^2 - 2h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta})\mathscr{R}) \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Dans le terme linéaire $\mathscr{L}_1$ on reconnaît bien entendu le tenseur d'Einstein dont l'écriture en coordonnées locales est $\mathscr{G}_{\alpha\beta} = \mathscr{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathscr{R}g_{\alpha\beta}$. Donc exiger que g soit un point critique de $\mathcal{S}$, i.e. exiger pour tout h l'annulation de $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_0 \mathcal{S}(g+\varepsilon h)$, revient à exiger l'annulation du tenseur d'Einstein, i.e. :

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\mathscr{R}g_{\alpha\beta} = 0, \qquad (2.40)$$

dont la contraction avec $g^{\alpha\beta}$ nous donne

$$\mathscr{R} = 0 = \mathscr{R}_{\alpha\beta} \qquad (2.41)$$

Comme attendu, on retrouve bien les ***équations d'Einstein dans le vide***.

Considérons le cas où la métrique de fond est η, la métrique de Minkowski, i.e. celle dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^D$ est $\mathrm{diag}(1,-1,\ldots,-1)$. On a $0 = \mathscr{R} = \mathscr{R}_{\mu\nu} = \mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$. Ecrivons alors la forme que prennent certaines quantités importantes pour la suite :

$$\begin{aligned}\textit{lagrangien quadratique : } \mathscr{L}_2 &\equiv \tfrac{1}{4}(\partial_\gamma h^\alpha_\alpha)(\partial^\gamma h^\beta_\beta) - \tfrac{1}{4}(\partial_\gamma h^{\alpha\beta})(\partial^\gamma h_{\alpha\beta}) \\ &+ \tfrac{1}{2}(\partial_\gamma h^{\alpha\beta})(\partial_\alpha h^\gamma_\beta) - \tfrac{1}{2}(\partial_\gamma h^\alpha_\alpha)(\partial_\beta h^{\gamma\beta}) \\ \textit{tenseur de Riemann linéarisé : } (\mathscr{R}_1)^\mu{}_{\nu\alpha\beta} &\equiv \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\nu h^\mu_\beta - \partial_\alpha\partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\beta\partial_\nu h^\mu_\alpha + \partial_\beta\partial^\mu h_{\alpha\nu}) \qquad (2.42)\end{aligned}$$

2.1.4 Fixation de la jauge et règles de Feynman

Pour connaître le comportement de notre théorie, il nous faut calculer les ammplitudes de probabilité associées à des processus physiques. En choisissant la méthode des graphes de Feynman, nous sommes donc ramenés à devoir trouver les ***règles de Feynman***, ce que nous ferons "en transformée de Fourier". La règle de Feynman associée à la fonction à *2* points est donnée par le propagateur, qui n'est autre que l'inverse de l'opérateur des équations du mouvement ; ce dernier étant lui-même défini comme l'opérateur $\mathcal{O}_{\mu\nu\alpha\beta}$ intervenant dans l'écriture sous la forme $\frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$ de la partie quadratique du lagrangien.
Dans notre cas, après élimination des termes de dérivées totales, on arrive à montrer que :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_2 &= \tfrac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta} \\ \text{avec} \quad \mathcal{O}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\partial^2 + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta \qquad (2.43)\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}h^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h^{\alpha\beta} &= h^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\mu\nu} \\ &= (-1)^2 h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \quad \text{(+total derivative)} \\ &\equiv \tfrac{1}{2}h^{\mu\nu}(\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta)h^{\alpha\beta} \qquad (2.44)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h^{\mu\nu}\eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta h^{\alpha\beta} &= h^{\nu\mu}\eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha h^{\beta\alpha} \\ &= h^{\mu\nu}\eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha h^{\alpha\beta} \\ &= \tfrac{1}{2}h^{\mu\nu}(\eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta + \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha)h^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.45}$$

et donc on a aussi $\mathscr{L}_2 = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$, avec

$$\mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left((\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\partial^2 + \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - \eta_{\mu\alpha}\partial_\beta\partial_\nu - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\right), \tag{2.46}$$

opérateur qui possède les symétries $\mathcal{O}'_{\alpha\beta\mu\nu} = \mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta}$ et $\mathcal{O}'_{\nu\mu\beta\alpha} = \mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta}$.

<u>INTERLUDE : Equations du mouvement pour h et ondes gravitationnelles</u>

Au passage, nous pouvons maintenant écrire les ***équations du mouvement*** pour h

$$\mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta} = 0, \tag{2.47}$$

sous la forme explicite

$$\partial^2 h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h^\alpha_\alpha - \partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha_\mu - \partial_\alpha\partial_\mu h^\alpha_\nu + \eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \partial^2 h^\alpha_\alpha) = 0 \tag{2.48}$$

dans ce contexte, on dit que h décrit la propagation d'***ondes gravitationnelles***.
En anticipant sur la suite du texte je construis, à partir de h, un nouveau champ $\widetilde{h}$:

$$\widetilde{h} := h - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_\eta(h)\eta, \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_\eta(h)\eta_{\alpha\beta} \tag{2.49}$$

avec $\mathrm{tr}_\eta(h) := \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h^\sigma_\sigma$.
De manière à obtenir une équation sur $\widetilde{h}$ au lieu de h, nous calculons

$$\mathrm{tr}_\eta(\widetilde{h}) = \mathrm{tr}_\eta(h) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_\eta(h)\mathrm{tr}_\eta(\eta) = \tfrac{2-D}{2}\mathrm{tr}_\eta(h) \tag{2.50}$$

(ce qui donne notamment : $\mathrm{tr}_\eta(\widetilde{h})\big|_{D=4} = -\mathrm{tr}_\eta(h)$).
Ainsi $h = \widetilde{h} + \frac{1}{2-D}\mathrm{tr}_\eta(\widetilde{h})\eta$. Après remplacement, on obtient :

$$\partial^2\widetilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\widetilde{h}^{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\mu\widetilde{h}^\alpha_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu\widetilde{h}^\alpha_\mu + \tfrac{1+1-2}{2-D}(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)\left(\mathrm{tr}_\eta(\widetilde{h})\right) = 0, \tag{2.51}$$

ce qui donne une équation plus compacte :

$$\partial^2\widetilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\widetilde{h}^{\alpha\beta} - \partial_\alpha\partial_\mu\widetilde{h}^\alpha_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu\widetilde{h}^\alpha_\mu = 0 \tag{2.52}$$

Il est instructif, à ce stade, de se référer à l'électrodynamique : dans cette théorie, le lagrangien libre s'écrit

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{ED} &= -\tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}A^\mu(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu \quad \text{(+total derivative)}, \quad \text{donc} \\ \mathcal{O}^{ED}_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu \end{aligned} \tag{2.53}$$

L'invariance de jauge s'exprime par

$$\forall\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^4), \quad A^\alpha \sim A^\alpha + \partial^\alpha\varphi \tag{2.54}$$

et l'application de l'opérateur des équations du mouvement à la variation du champ $\delta A^\nu = \partial^\nu\varphi$ donne

$$\forall\mu, \quad (\mathcal{O}^{ED}\cdot\delta A)_\mu = \mathcal{O}^{ED}_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi = \partial^2\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\partial^2\varphi = 0, \tag{2.55}$$

ce qui montre que le noyau de $\mathcal{O}^{ED}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et qu'il s'agit dont d'un opérateur non-inversible.

Dans notre cas, qui est la relativité générale, on sait que le lagrangien[6] total est invariant sous la transformation de "jauge"

$$\bar{g}_{\mu\nu} \mapsto \bar{g}'_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{g}_{\mu\alpha}\partial_\nu X^\alpha + \bar{g}_{\nu\alpha}\partial_\mu X^\alpha + X^\alpha \partial_\alpha \bar{g}_{\mu\nu}, \tag{2.56}$$

ici écrite de manière infinitésimale.
En décomposant selon $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ et en gardant fixe la métrique de fond $g_{\mu\nu}$, cette loi de transformation s'écrit pour h :

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + (g_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})\partial_\nu X^\alpha + (g_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha})\partial_\mu X^\alpha + X^\alpha \partial_\alpha (g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= h_{\mu\nu} + (\nabla_\mu X)_\nu + (\nabla_\nu X)_\mu + h_{\mu\alpha}(\nabla_\nu X)^\alpha + h_{\nu\alpha}(\nabla_\mu X)^\alpha + X^\alpha (\nabla_\alpha h)_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.57}$$

(où les indices sont toujours levés et abaissés avec la métrique de fond $g_{\mu\nu}$)
Mais nous travaillons avec une métrique de fond $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, donc

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu + h_{\mu\alpha}\partial_\nu X^\alpha + h_{\nu\alpha}\partial_\mu X^\alpha + X^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} \tag{2.58}$$

On ne sera donc pas étonnés de trouver que, pour tout champ vectoriel $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$,

$$\mathcal{O}'_{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial^\alpha X^\beta = 0 \tag{2.59}$$

Cet opérateur des équations du mouvement n'est donc, lui non plus, pas inversible. On a alors l'idée de modifier le lagrangien dont on est parti, le lagrangien d'Einstein-Hilbert, en lui ajoutant un terme dit de ***fixation de jauge***.
En électrodynamique, on sait qu'il est toujours possible d'imposer $\partial \cdot A = \partial_\alpha A^\alpha = 0$: autrement dit, pour tout champ A il existe un champ $\tilde{A}$ qui lui équivalent (au sens des transformations de jauge), tel que $\partial \cdot \tilde{A} = 0$; ou encore : pour tout champ A il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$ telle que, en notant $A_\varphi = A + d\varphi$ ou encore $(A_\varphi)^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \varphi$, on ait $\partial \cdot A_\varphi = 0$. En effet, si $\partial \cdot A$ n'est pas nul, alors il s'agit de résoudre $0 = \partial \cdot A_\varphi = \partial_\alpha (A_\varphi)^\alpha = \partial \cdot A + \Box\varphi$: il sufit de prendre $\varphi = -\Box^{-1}(\partial \cdot A)$.
On aimerait faire de même ici : on aimerait fixer les degrés de liberté de jauge et ainsi garantir l'existence d'un inverse pour $\mathcal{O}$, i.e. garantir la finitude des quantités physiques. L'idée qui vient à l'esprit naturellement est de regarder si l'on peut imposer une condition analogue à $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, où A^α est remplacé par une quantité scalaire de notre théorie.
L'idée qui vient naturellement est donc d'imposer la relation

$$\partial_\alpha \left(|\det(\bar{g})|^{\frac{1}{2}} \bar{g}^{\alpha\beta} \right) = 0 \tag{2.60}$$

Cette jauge est dite ***jauge harmonique*** ou de ***De Donder***.
En écrivant $\bar{g} = \eta + \varepsilon h$ et en appliquant membre à membre l'opérateur $\frac{d}{d\varepsilon}|_0$, on obtient

$$\partial_\alpha \tilde{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.61}$$

(on a fait usage de $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_0 \det(\mathrm{id} + \varepsilon \mathbb{A}) = \mathrm{tr}(\mathbb{A})$).
La question qui se pose maintenant est de savoir si, moyennant une transformation $h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu}$, on peut toujours annuler la quantité $\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu}$. Supposons donc que $\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} \neq 0$ et considérons la transformation infinitésimale $h_{\mu\nu} \mapsto h_{\mu\nu} + \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$. On veut que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (h'^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h'^\alpha_\alpha) \\ &= \partial_\mu \left(\partial^\mu X^\nu + \partial^\nu X^\mu + h^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(2\partial \cdot X + h^\alpha_\alpha) \right) \\ &= \partial^2 X^\nu + \partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.62}$$

et il suffit donc de prendre

$$X^\nu = -\Box^{-1}(\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu}) \tag{2.63}$$

Dans le cas de l'électrodynamique, le lagrangien de fixation de jauge construit à partir de la quantité invariante de jauge $\partial \cdot A$ est choisi comme étant proportionnel au carré de celle-ci (ainsi on n'ajoute pas d'intéraction) :

$$\mathscr{L}^{ED}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \tag{2.64}$$

Par analogie, nous introduirons en gravité la fixation de jauge

[6] ou plutôt la *densité lagrangienne*

$$\mathscr{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}C^2 = -\frac{1}{2\alpha}C_\nu C^\nu \quad \text{avec} \quad C^\nu = \partial_\mu \widetilde{h}^{\mu\nu} \tag{2.65}$$

Après développement, on peut écrire

$$\mathscr{L}_{gf} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}^{gf}_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta} \tag{2.66}$$

avec

$$\mathcal{O}^{gf}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\xi}(\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\partial^2 + \eta_{\nu\beta}\partial_\mu\partial_\alpha - \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu) \tag{2.67}$$

et le lagrangien quadratique total s'écrit

$$\mathscr{L}_2^{tot} = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_{gf} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}^{tot}_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta} \tag{2.68}$$

avec

$$\mathcal{O}^{tot}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} + (\frac{1}{2\xi}-1)\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)\partial^2 + (1-\frac{1}{\xi})(\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\partial_\beta) \tag{2.69}$$

En transformée de Fourier, ceci s'écrit (on garde, de manière abusive, la même notation) :

$$\mathcal{O}^{tot}_{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} + (\frac{1}{2\xi}-1)\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)k^2 - (1-\frac{1}{\xi})(\eta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta - \eta_{\alpha\nu}k_\mu k_\beta) \tag{2.70}$$

Le choix de jauge $\xi = 1$ permet de ne garder que la partie en ∂^2 :

$$\mathcal{O}^{tot}_{\mu\nu\alpha\beta}\big|_{\xi=1} = \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)\partial^2, \tag{2.71}$$

i.e., en transformée de Fourier,

$$\mathcal{O}^{tot}_{\mu\nu\alpha\beta}\big|_{\xi=1} = -\frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)k^2 \tag{2.72}$$

La partie "opérateur différentiel" est donc facile à inverser : on voit immédiatement que le propagateur contiendra un facteur $\frac{1}{k^2}$, typique d'un champ de masse nulle. Quant à la partie matricielle : considérons

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) \tag{2.73}$$

et calculons le produit $\mathcal{P}\cdot\mathcal{O}^{tot}\big|_{\xi=1}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta}\,(\mathcal{O}^{tot})^{\alpha\beta\sigma\zeta}\big|_{\xi=1} &= \frac{1}{4}\frac{k^2}{k^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})(2\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\zeta} - \eta^{\alpha\beta}\eta^{\sigma\zeta}) \\
&= \frac{1}{4}(2\delta^\sigma_\mu\delta^\zeta_\nu + 2\delta^\zeta_\mu\delta^\sigma_\nu + \frac{2D-4-2(D-2)}{D-2}\eta^{\sigma\zeta}\eta_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}(\delta^\sigma_\mu\delta^\zeta_\nu + \delta^\zeta_\mu\delta^\sigma_\nu) \\
&= \mathbf{1}^{\sigma\zeta}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Nous avons donc exhibé l'opérateur inverse de l'opérateur des équations du mouvement, i.e. le propagateur. En dimension $D = 4$, et écrit en transformée de Fourier, il s'agit de :

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) \tag{2.75}$$

Cette forme pour le propagateur du graviton est nommée ***propagateur de De Donder***.

2.2 Le comptage de puissances (*power counting*) de la Relativité Générale

Nous allons dans cette partie regarder le ***degré de divergence superficiel*** ω des graphes de Feynman intervenant en gravité pure. Mais avant cela, établissons une relation topologique sur les graphes.

A priori, le nombre de moments internes est I. Mais pour ne garder que les moments indépendants , on doit retrancher à cela le nombre de relations entre ces moments. Pour chaque vertex, on doit imposer la conservation $0 =$ somme des moments entrants. On a V vertex, donc V relations de cette sorte. (Remarque : ces relations font intervenir des moments internes aussi bien qu'externes).

En plus de cela, on a la conservation globale : $0 =$ somme des moments entrants externes. Le système linéaire écrit précedemment est donc de rang $V-1$. Le nombre de moments indépendants est donc $I-(V-1)$. Mais ceci n'est autre que le nombre de boucles L, d'où

$$L = I - V + 1 \tag{2.76}$$

Nous sommes en mesure d'écrire l'amplitude associée à un graphe typique. On a vu que, en gravité pure, chaque vertex donne des termes en moment^2, et chaque propagateur est en $\frac{1}{\text{moment}^2}$. L'amplitude associée à un graphe à L boucles, V vertex et I lignes internes est donc

$$\mathcal{A} \propto \int_{(\mathbb{R}^D)^L} \frac{(k^2)^V}{(k^2)^I}\, dq_1 \cdots dq_L \tag{2.77}$$

(où la lettre k désigne ici un moment quelconque, interne ou externe).
Mettons, pour simplifier, que l'on soit en métrique euclidienne. Alors en notant $|\cdot|$ la norme euclidienne et en ne se préoccupant pas des parties angulaires, on écrit pour chaque ℓ : $dq_\ell = |q_\ell|^{D-1} d|q_\ell|$, ce qui donne

$$\omega = (D-1)L + 2(V-I) + L = DL + 2(V-I) \tag{2.78}$$

Mais $V - I = 1 - L$ et donc $\omega = DL + 2(1-L) = (D-2)L + 2$.

$$\omega = (D-2)L + 2 \tag{2.79}$$

Pour voir en quoi ce résultat est singulier, prenons un exemple bien connu : la théorie en $\lambda\varphi^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$). Dans ce cas, la règle de Feynman pour le vertex est simplement λ, et si on ne se préoccupe que des divergences UV le propagateur est $\propto \frac{1}{k^2-m^2} \sim \frac{1}{k^2}$, de sorte que

$$\mathcal{A}\big|_{\lambda\varphi^n} \propto \int_{(\mathbb{R}^D)^L} \frac{\lambda^V}{(k^2)^I}\, dq_1 \cdots dq_L, \tag{2.80}$$

d'où

$$\omega\big|_{\lambda\varphi^n} = (D-1)L - 2I + L = DL - 2I \tag{2.81}$$

On utilise maintenant la relation traduisant le fait que les intéractions sont à n particules, à savoir :

$$nV = E + 2I, \tag{2.82}$$

qui donne

$$I = \frac{nV-E}{2} = \frac{n(I+1-L)-E}{2}, \quad \text{i.e.} \quad I = \frac{n-nL-E}{2-n} \tag{2.83}$$

On reporte ça dans ω :

$$\omega\big|_{\lambda\varphi^n} = DL - 2\frac{n-nL-E}{2-n} = (D - \frac{2n}{n-2})L - 2\frac{E-n}{n-2} \tag{2.84}$$

Le degré de divergence superficiel de la théorie en φ^n est donc une fonction décroissante du nombre de pattes externes, et dès que ce dernier est strictement supérieur à la valeur critique $n + (\frac{n-2}{2}D - n)L$, on a $\omega\big|_{\lambda\varphi^n} < 0$, i.e. que le graphe est ***superficiellement convergent*** (n'implique pas la convergence). Cette dépendance en E est donc bénéfique.

En gravité pure, on a vu que ω ne dépend pas du nombre de pattes externes, donc on a aucune chance d'améliorer la convergence en considérant des graphes à nombre croissant de pattes externes. On voit même immédiatement que ω est toujours strictement positif, et donc tous les graphes sont superficiellement divergents, donc divergents. On dit que la gravité pure est ***non-renormalisable par comptage de puissance***.

Remarque importante
En dimension $D = 4$ on a $\omega = 2(L+1)$, i.e. qu'une amplitude typique $\mathcal{A}$ a pour dimension physique $\mathscr{D}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{2(L+1)}$. Si on note $\mathcal{R}$ une quantité de courbure générique, on a $\mathscr{D}(\mathcal{R}) = 2$ et donc $\mathscr{D}(\mathcal{A}) = \mathscr{D}(\mathcal{R}^{L+1})$. Ainsi, pour une amplitude à L boucles, le lagrangien de contre-terme que l'on doit ajouter au lagrangien initial est de la forme

$$\mathscr{L}_{ct} \sim \mathcal{R}^{L+1} \tag{2.85}$$

$\diamondsuit$

2.3 Divergences à l'ordre d'une boucle

2.3.1 Forme a priori du lagrangien de contre-terme — Résultat fondamental

A une boucle on a, d'après le paragraphe précédent, $\omega = D$. En dimension *4*, ω vaut *4* et il va donc falloir un contre-lagrangien de dimension physique *4*. Comme ce contre-terme doit aussi être invariant sous transformation de jauge, i.e. sous difféomorphisme, il est nécessairement de la forme

$$\mathscr{L}_{ct} = |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\,\phi, \quad \text{avec} \quad \phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}) \tag{2.86}$$

Or, les seuls scalaires de dimension physique *4* pouvant être construits à partir de la métrique seule sont des "carrés" des quantités de courbure (conformément à 2.85), à savoir $\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathscr{R}^{\mu\nu\alpha\beta}$, $\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}$ et $\mathscr{R}^2$:

$$\mathscr{L}_{ct} = |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\,(a\,\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathscr{R}^{\mu\nu\alpha\beta} + b\,\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu} + c\,\mathscr{R}^2) \tag{2.87}$$

Mais pour les variétés de dimension paire il existe un résultat, le ***théorème de Gauss-Bonnet-Chern***, liant une quantité géométrique à un invariant topologique de la variété nommé caractéristique d'Euler-Poincaré et noté $\chi(\mathscr{M})$. Pour $D = 4$ il prend la forme particulière suivante :

$$\chi(\mathscr{M}) = \frac{3}{4\pi^2}\int_{\mathscr{M}} (\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathscr{R}^{\mu\nu\alpha\beta} - 4\,\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu} + \mathscr{R}^2)|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\;dx \tag{2.88}$$

Le contre-terme ajouté à $\mathcal{S}$ est donc

$$\mathcal{S}_{ct} = \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}_{ct}\;dx = \frac{4\pi^2 a}{3}\;\chi(\mathscr{M}) + \int_{\mathscr{M}} \left((b+4a)\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu} + (c-a)\mathscr{R}^2\right)|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\;dx \tag{2.89}$$

Le terme proportionnel à $\chi(\mathscr{M})$ ne modifiant pas les équations du mouvement de la théorie, nous pouvons l'omettre, de sorte que le contre terme prend la forme :

$$\mathcal{S}_{ct} \equiv \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}'_{ct}\;dx \quad \text{où} \quad \mathscr{L}'_{ct} = |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\,(b'\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu} + c'\mathscr{R}^2) \tag{2.90}$$

Remarque
Le résultat précis a été obtenu pour la première fois par 't Hooft et Veltman [8]. En régularisation dimensionnelle de paramètre $\epsilon = \frac{4-D}{2}$, il s'écrit comme suit :

$$\mathscr{L}'_{ct} = \frac{15}{2\pi^2}\;\epsilon^{-1}|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\,(42\,\mathscr{R}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu} + \mathscr{R}^2) \tag{2.91}$$

◇

Le tenseur de Riemann étant maintenant absent, injecter les équations du mouvement $0 = \mathscr{R}_{\alpha\beta}$ a pour effet d'***annuler le contre-terme*** :

$$\mathscr{L}'_{ct}\big|_{on\ shell} = 0 \tag{2.92}$$

Dans cette situation particulière, deux remarques s'imposent :

(i) On peut absorber le lagrangien de contre-terme dans celui de départ par une redéfinition du champ. Montrons ce résultat dans un cas générique, où on se donne une densité lagrangienne $\mathscr{L}$ dont les arguments typiques sont ϕ (un ensemble de champs quelconques ϕ_ℓ) et $\mathrm{D}\phi$ (l'ensemble de leurs dérivées $\partial_\alpha\phi_\ell$). Les équations du mouvement sont les équations d'Euler-Lagrange :

$$\forall \ell, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\ell} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_\ell)} = 0 \tag{2.93}$$

Si la fonction $\mathscr{L}_{ct}$ s'annule lorsque cette condition est satisfaite, c'est qu'il existe des applications $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}_\ell(\varphi, \mathrm{D}\varphi)$ telles que

$$\mathscr{L}_{ct} = \sum_\ell \mathcal{F}_\ell \cdot \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\ell} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_\ell)}\right) \tag{2.94}$$

Mais

$$\mathscr{L}(\varphi + \varepsilon\mathcal{F}) \equiv \mathscr{L}(\varphi) + \varepsilon\sum_\ell \mathcal{F}_\ell \cdot \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\ell} - \partial_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_\ell)}\right)(\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{2.95}$$

donc

$$\mathscr{L}(\varphi + \varepsilon\mathcal{F}) = \mathscr{L}(\varphi) + \varepsilon\mathscr{L}_{ct}(\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.96}$$

On remarque ensuite que $\mathscr{L} + \varepsilon \mathscr{L}_{ct}$ est justement le lagrangien corrigé $\mathscr{L}_{tot}$, et on introduit le nouveau champ $\tilde{\varphi} = \mathscr{A}(\varphi) = \varphi + \varepsilon \mathfrak{F}$, ce qui permet d'écrire

$$\mathscr{L}_{tot}(\varphi) = \mathscr{L}(\mathscr{A}(\varphi)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.97}$$

Donc, à l'ordre 1 en ε, la correction effectuée se résume à une redéfinition des champs $\varphi \mapsto \mathscr{A}(\varphi)$

(ii) Les quantités physiques peuvent toutes êtres calculées à partir d'une fonctionnelle génératrice de la forme

$$\mathcal{Z}(\mathcal{J}) = \frac{\int_{\mathrm{Maps}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \mathrm{e}^{i(\mathcal{S}(\varphi)+\langle \mathcal{J},\varphi\rangle)}\ \mathcal{D}\varphi}{\int_{\mathrm{Maps}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} \mathrm{e}^{i\mathcal{S}(\varphi)}\ \mathcal{D}\varphi} \tag{2.98}$$

et ne dépendent donc pas d'une redéfinition quelconque des champs de la théorie

Les infinis mentionnés plus haut n'ont donc aucune sinification physique : ***à une boucle, la gravité pure est renormalisable***. C'est le résultat fondamental obtenu par 't Hooft et Veltman [8].

Remarque
Nous devons ici insister sur le fait que ce résultat n'est valable que pour la gravité *pure*, i.e. en l'absence de matière. Mettons qu'on ajoute au modèle des particules de Klein-Gordon, i.e. des champs scalaires φ_ℓ, de sorte que l'action devienne

$$(g,\varphi) \longmapsto \mathcal{S}_{new}(g,\varphi) := \varkappa_D^{-2} \int_{\mathscr{M}} \left(\mathscr{R}(g) + \sum_{\ell} \tfrac{1}{2} (\partial_\alpha \varphi_\ell)\ g^{\alpha\beta}\ (\partial_\beta \varphi_\ell) \right)\ |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\ dx \tag{2.99}$$

On peut démontrer que le lagrangien de contre-terme devient

$$\mathscr{L}_{ct,new} = \tfrac{203}{1280\pi^2}\ \epsilon^{-1} |\det(g)|^{\frac{1}{2}} \mathscr{R}^2 \tag{2.100}$$

Mais les équations d'Einstein en présence de matière sont

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\mathscr{R} g_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\varkappa_D^2 \mathscr{T}_{\alpha\beta}, \tag{2.101}$$

où $\mathscr{T}$, qui est fonction de φ, est le tenseur d'énergie-impulsion.
On a donc $\mathscr{R} = \frac{\varkappa_D^2}{2-D}\ \mathrm{tr}_g(\mathscr{T})$, et le scalaire de courbure n'a donc aucune raison de s'annuler :

$$\mathscr{L}_{ct,new}\big|_{on\ shell} \neq 0 \tag{2.102}$$

On est en présence d'une véritable divergence physique : cette théorie n'est pas renormalisable. $\diamondsuit$

2.3.2 Examen des graphes à deux et trois pattes externes

Regardons plus précisément le comportement de la gravité pure en calculant explicitement les amplitudes associées à certains graphes simples.

Remarques préliminaires
Soit $\mathcal{A}$ l'amplitude associée à un graphe donné.

(i) $\mathcal{A}$ est écrite à l'aide des règles de Feynman en représentation de Fourier

(ii) $\mathcal{A}$ est une fonction scalaire (aucune structure tensorielle) qui dépend des (transformées de Fourier des) polarisations externes $\widehat{h}^{(\ell)} = \left(\widehat{h}^{(\ell)}_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ et des impulsions entrantes $p^{(\ell)}$ ($\ell \in \{1,\ldots,E\}, E$=nombre de gravitons externes).

(iii) $\mathcal{A}$ est une quantité ***invariante sous transformation de jauge***. $\diamondsuit$

Traitement du diagramme à deux gravitons

D'après les règles de Feynman énoncées précédemment, l'amplitude associée au diagramme à trois pattes externes prend la forme

$$\mathcal{A} = \widehat{h}^{(1)}_{\alpha\beta}[p^{(1)}]\ \widehat{h}^{(2)}_{\mu\nu}[p^{(2)}] \int_{q\in\mathbb{R}^D} \tfrac{\mathscr{E}^{\alpha\beta\mu\nu}(q,p)}{q^2(q-p)^2}\ dq \tag{2.103}$$

(la conservation globale de l'impulsion donnant $p^{(1)} = p^{(2)} = p$).
En ce qui concerne les moments, chacun des deux vertex de ce diagramme contribue quadratiquement, de sorte que le numérateur $\mathscr{E}^{\alpha\beta\mu\nu}$ est d'ordre *4* : il se développe comme somme de termes de la forme $q^4p^0, q^3p, q^2p^2, qp^3$

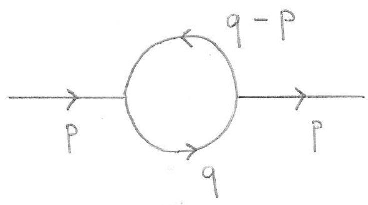

FIG. 1 – Le diagramme à une boucle et deux gravitons

et q^0p^4 (où la notation k^n désigne ici l'ensemble des produits du type $k^{\alpha_1}k^{\alpha_2}\cdots k^{\alpha_n}$).

Il existe un argument qui réduit drastiquement les choix possibles : pour que $\mathcal{A}$ soit invariante de jauge, le tenseur de Riemann linéarisé doit nécessairement être présent. Rappelons l'expression de ce dernier, en transformée de Fourier :

$$(\widehat{\mathscr{R}}_1)^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(k) = \tfrac{1}{2}\left(-k_\alpha k_\nu \widehat{h}^{\mu}_{\beta}(k) + k_\alpha k^\mu \widehat{h}_{\beta\nu}(k) + k_\beta k_\nu \widehat{h}^{\mu}_{\alpha}(k) - k_\beta k^\mu \widehat{h}_{\alpha\nu}(k)\right) \tag{2.104}$$

On vérifie immédiatement qu'il est invariant de jauge en regardant l'effet du changement $h \mapsto \delta h$ avec $(\delta h)_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$:

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathscr{R}}_1)^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}(k) &\mapsto \tfrac{1}{2}i(-k_\alpha k_\nu(k^\mu \widehat{X}_\beta(k) + k_\beta \widehat{X}^\mu(k)) + k_\alpha k^\mu(k_\nu \widehat{X}_\beta(k) + k_\beta \widehat{X}_\nu(k)) \\ &+ k_\beta k_\nu(k^\mu \widehat{X}_\alpha(k) + k_\alpha \widehat{X}^\mu(k)) - k_\beta k^\mu(k_\nu \widehat{X}_\alpha(k) + k_\alpha \widehat{X}_\nu(k))) \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.105}$$

Puisqu'il est quadratique dans les moments, il faut (pour en construire deux) des termes du type q^0p^4 ; et notre amplitude est de la forme

$$\mathcal{A} \propto (\mathscr{R}_1^{(1)})_{\mu\nu\alpha\beta}[p^{(1)}]\ (\mathscr{R}_1^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta}[p^{(2)}] \int_{\mathbb{R}^D} \frac{1}{q^2(q-p)^2}\, dq \tag{2.106}$$

Mais, pour les grands moments, l'intégrand est de la forme $|q|^{-4}|q|^{D-1}d|q|$, donc pour $D = 4$ cette intégrale diverge et nous allons la régulariser en choisissant la ***régularisation dimensionnelle*** de paramètre ϵ, avec $\epsilon = 2 - \frac{D}{2} \longrightarrow 0$, i.e. $D = 4 - 2\epsilon \longrightarrow 4$.
La formule de Feynman $(AB)^{-1} = \int_0^1 (Ax + (1-x)B)^{-2}\, dx$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{\mathbb{R}^D} (q^2(q-p)^2)^{-1}\, dq \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} dq \int_0^1 dx\ ((1-x)q^2 + x(q-p)^2)^{-2}, \quad \text{puis } k := q - px \text{ donne} \\ \mathcal{I} &= \int_0^1 dx \int_{\mathbb{R}^D} dk\ (k^2 + x(1-x)p^2)^{-2}\end{aligned} \tag{2.107}$$

Mais on a

$$\int_{\mathbb{R}^D} (k^2 + a)^{-\alpha}\, dk = (-1)^{\frac{D}{2}} \pi^{\frac{D}{2}} i \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} a^{-(\alpha - \frac{D}{2})}, \tag{2.108}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (-1)^{2-\epsilon}\pi^{2-\epsilon} i\Gamma(\epsilon) \int_0^1 (x(1-x)p^2)^{-\epsilon}\, dx \\ &= i\pi^2(1 - \epsilon\ln\pi + \mathcal{O}(\epsilon^2))\left(\epsilon^{-1} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right)\left(1 - \epsilon\int_0^1 \ln\left(x(1-x)p^2\right)\, dx + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= i\pi^2\left(\epsilon^{-1} - \ln\pi - \gamma - \int_0^1 \ln\left(x(1-x)p^2\right)\, dx\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned} \tag{2.109}$$

d'où

$$\mathcal{A} \propto (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(1)})_{\mu\nu\alpha\beta}[p^{(1)}]\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta}[p^{(2)}] \left(\epsilon^{-1} - \ln\pi - \gamma - \int_0^1 \ln\left(x(1-x)p^2\right)\ dx + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \tag{2.110}$$

Dans le schéma de régularisation dimensionnelle, on obtient donc une ***divergence en*** ϵ^{-1} pour l'amplitude associée au diagramme à une boucle et *2* gravitons ; ce qui est en accord avec 2.91.

Remarque
Considérons, en électrodynamique quantique, le diagramme à *1* boucle et *4* photons, pour lequel le comptage de puissances prévoit une divergence logarithmique. Son amplitude doit être invariante sous transformation de jauge, et est donc proportionnelle à un produit de quatre tenseurs de Faraday (ce dernier remplace ici le tenseur de Riemann linéarisé). L'intégrale restant en facteur est finalement convergente, et l'amplitude est donc finie. Ceci est une illusration supplémentaire de la puissance de l'argument d'invariance de jauge. ♢

Traitement du diagramme à trois gravitons

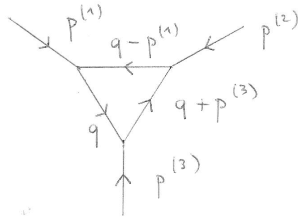

Fig. 2 – Le diagramme à une boucle et trois gravitons

D'après les règles de Feynman énoncées précédemment, l'amplitude associée au diagramme à trois pattes externes prend la forme

$$\mathcal{A} = \widehat{h}^{(1)}[p^{(1)}]\ \widehat{h}^{(2)}[p^{(2)}]\ \widehat{h}^{(3)}[p^{(3)}] \int_{q\in\mathbb{R}^D} \tfrac{\mathscr{E}'(q,p^{(1)},p^{(2)},p^{(3)})}{q^2(q+p^{(3)})^2(q-p^{(1)})^2}\ dq, \tag{2.111}$$

où les produits non définis désignent des contractions tensorielles que l'on se doit de préciser.

Remarque pour la suite
On se placera sur la couche de masse (*on mass shell*), de sorte que $\forall \ell,\ (p^{(\ell)})^2 = 0$. Mais comme on a aussi la conservation globale de l'impulsion $0 = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}$, on a $0 = (p^{(1)})^2 = (-p^{(2)} - p^{(3)})^2 = (p^{(2)})^2 + (p^{(3)})^2 + 2p^{(2)} \cdot p^{(3)}$, i.e. $p^{(2)} \cdot p^{(3)} = 0$; finalement, tous les produits scalaires sont nuls :

$$\forall \ell_1, \ell_2 \in \{1,2,3\}, \quad p^{(\ell_1)} \cdot p^{(\ell_2)} = 0 \tag{2.112}$$

♢

Etant donné $\mathscr{D}(\mathcal{A}) = 4$, on présume que

$$\mathcal{A} \sim \widehat{h}\ (\widehat{\mathscr{R}}_1)^2 \tag{2.113}$$

Par invariance de Bose (invariance de $\mathcal{A}$ sous permutation des polarisations externes), je peux choisir de singulariser la polarisation *(1)* et d'écrire ainsi

$$\mathcal{A} \sim \widehat{h}^{(1)}\ \widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)}\ \widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)} \tag{2.114}$$

Puisqu'il y a trois vertex, le numérateur $\mathscr{E}'$ est d'ordre 6 dans les moments $q_\alpha, p_\beta^{(1)}, p_\gamma^{(2)}$ et $p_\delta^{(3)}$. Pour obtenir $\widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)}\ \widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)}$ il faut déjà extraire des termes du type $(p^{(2)})^2(p^{(3)})^2$, de sorte que le numérateur devient $\mathscr{E}'' \sim$ moment^2 : il se développe comme somme de termes de la forme $q_\alpha q_\beta, q_\alpha p_\beta^{(\ell)}$ et $p_\alpha^{(\ell_1)} p_\beta^{(\ell_2)}$. Mais pour les deux derniers termes, l'intégrand varie comme $|q|^{-2}d|q|$ et $|q|^{-3}d|q|$ (resp.), et l'intégrale converge. Les seuls termes véritablement divergents sont ceux pour lesquels le numérateur est quadratique dans le moment interne q, et cela nous laisse avec des intégrands de la forme

$$\tfrac{q_\alpha q_\beta}{q^2(q+p^{(3)})^2(q-p^{(1)})^2}\ dq\ (q \in \mathbb{R}^D), \quad \text{i.e.} \quad \tfrac{1}{(q+p^{(3)})^2(q-p^{(1)})^2}\ dq \quad (\text{pour} \quad |q| \longrightarrow \infty) \tag{2.115}$$

On est dans le cas précédent, et on voit donc au passage que la divergence est une fois de plus en ϵ^{-1}.
Il s'agit maintenant d'expliciter une contraction de type $\widehat{h}^{(1)}\ \widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)}\ \widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)}$ qui soit invariante sous transformation de jauge. Montrons que

$$\mathscr{V} := (\widehat{h}^{(1)})^{\mu\nu}\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)})_{\mu\alpha\beta\gamma}\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)})_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} \tag{2.116}$$

jouit de cette propriété.
On va donc montrer que sous la transformation $h^{(1)} \mapsto \delta h^{(1)}$ (avec $\left(\delta h^{(1)}\right)_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu$), $\mathscr{V}$ s'annule.

$$\mathscr{V}\big|_{h^{(1)}\mapsto\delta h^{(1)}} = (\delta\mathscr{V})_1 + (\delta\mathscr{V})_2 \tag{2.117}$$

où

$$\begin{aligned}
(\delta\mathscr{V})_1 &= ip_\mu^{(1)}\widehat{X}_\nu[p^{(1)}]\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)})^{\mu\alpha\beta\gamma}\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)})^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} \\
&= \tfrac{1}{4} ip_\mu^{(1)}\widehat{X}_\nu[p^{(1)}] \\
&\cdot \ [(p^{(2)})^\mu(p^{(2)})^\beta(\widehat{h}^{(2)})^{\alpha\gamma} + (p^{(2)})^\alpha(p^{(2)})^\gamma(\widehat{h}^{(2)})^{\mu\beta} \\
&- \ (p^{(2)})^\alpha(p^{(2)})^\beta(\widehat{h}^{(2)})^{\mu\gamma} - (p^{(2)})^\mu(p^{(2)})^\gamma(\widehat{h}^{(2)})^{\alpha\beta}] \\
&\cdot \ [(p^{(3)})^\nu(p^{(3)})_\beta(\widehat{h}^{(3)})_{\alpha\gamma} + (p^{(3)})_\alpha(p^{(3)})_\gamma(\widehat{h}^{(3)})^\nu_\beta \\
&- \ (p^{(3)})_\alpha(p^{(3)})_\beta(\widehat{h}^{(3)})^\nu_\gamma - (p^{(3)})^\nu(p^{(3)})_\gamma(\widehat{h}^{(3)})_{\alpha\beta}] \\
&= \tfrac{1}{2}i\left(\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(3)}\right)\left(p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(1)}\right)\left(p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}p^{(2)}\right)
\end{aligned} \tag{2.118}$$

et

$$\begin{aligned}
(\delta\mathscr{V})_2 &= ip_\nu^{(1)}\widehat{X}_\mu[p^{(1)}]\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(2)})^{\mu\alpha\beta\gamma}\ (\widehat{\mathscr{R}}_1^{(3)})^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} \\
&= \tfrac{1}{2}i\left(\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(2)}\right)\left(p^{(1)}\widehat{h}^{(3)}p^{(2)}\right)\left(p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)}\right)
\end{aligned} \tag{2.119}$$

où on a utilisé la notation

$$p^{(\ell_1)}\widehat{h}^{(\ell_2)}p^{(\ell_3)} := (p^{(\ell_1)})^\alpha(\widehat{h}^{(\ell_2)})_{\alpha\beta}(p^{(\ell_3)})^\beta \tag{2.120}$$

Pour continuer le calcul on choisit de se placer dans la jauge de De Donder :

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha\widetilde{h}_{\alpha\beta} &= 0, \quad \text{i.e. } \partial^\alpha h_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\partial_\beta\left(\mathrm{tr}_\eta(h)\right), \quad \text{donc} \\
p^\alpha\widehat{h}_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}_\eta(\widehat{h})p_\beta, \quad \text{i.e. } \widehat{h}\cdot p = \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}_\eta(\widehat{h}))p
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Ceci permet une réécriture de certains termes :

$$\begin{aligned}
p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(1)} &= p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}(-p^{(2)} - p^{(3)}) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{tr}_\eta(\widehat{h}^{(2)})\right)\left(p^{(3)}\cdot p^{(2)}\right) - p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)} \\
&= -p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)}, \quad \text{et} \\
p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}p^{(2)} &= p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}(-p^{(1)} - p^{(3)}) \\
&= -p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}p^{(1)} - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{tr}_\eta(\widehat{h}^{(3)})\right)\left(p^{(2)}\cdot p^{(3)}\right) \\
&= -p^{(1)}\widehat{h}^{(3)}p^{(2)}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

d'où

$$(\delta\mathscr{V})_1 = \tfrac{1}{2}i\left(\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(3)}\right)\left(p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)}\right)\left(p^{(1)}\widehat{h}^{(3)}p^{(2)}\right), \tag{2.123}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}\big|_{h^{(1)}\mapsto\delta h^{(1)}} &= \tfrac{1}{2}i\left(p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)}\right)\left(p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}p^{(1)}\right)\left(\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(3)} + \widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(2)}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}i\left(p^{(3)}\widehat{h}^{(2)}p^{(3)}\right)\left(p^{(2)}\widehat{h}^{(3)}p^{(1)}\right)\left(\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(1)}\right)
\end{aligned} \tag{2.124}$$

Mais je peux décomposer le vecteur $\widehat{X}[p^{(1)}]$ en $u + \lambda p^{(1)}$, avec $u \perp p^{(1)}$, i.e. $u\cdot p^{(1)} = 0$; et comme $p^{(1)}\cdot p^{(1)} = 0$, on a $\widehat{X}[p^{(1)}]\cdot p^{(1)} = 0$, d'où :

$$\mathscr{V}\big|_{h^{(1)}\mapsto\delta h^{(1)}} = 0 \tag{2.125}$$

CQFD

2.4 Divergences à l'ordre de deux boucles

2.4.1 Forme a priori du lagrangien de contre-terme

D'après 2.85, pour $D = 4$ et à l'ordre de deux boucles on doit introduire un lagrangien de contre-terme formé d'un produit de *3* quantités de courbure : $\mathscr{L}_{ct} = |\det(g)|^{\frac{1}{2}}\phi$, où ϕ est combinaison linéaire de termes de la forme (on note toujours D un symbole de dérivation générique)

$$(\mathrm{D}\,\mathscr{R})^2,\ \ (\mathrm{D}\,\mathrm{Ric})^2,\ \ \mathscr{R}\,\mathrm{Ric}^2, \mathscr{R}\,\mathrm{Riem}^2,\ \ \mathrm{Ric}\,\mathrm{Riem}^2,\ \ \mathrm{Riem}\,\mathrm{Ric}^2,\ \ \mathscr{R}^3,\ \ \mathrm{Ric}^3\ \text{ et }\ \mathrm{Riem}^3, \tag{2.126}$$

soit, explicitement [3] :

$$(\nabla_\mu\mathscr{R})(\nabla^\mu\mathscr{R}),\ \ (\nabla_\mu\mathscr{R})_{\alpha\beta}(\nabla^\mu\mathscr{R})^{\alpha\beta},\ \ \mathscr{R}\,\mathscr{R}_{\alpha\beta}\,\mathscr{R}^{\alpha\beta},\ \ \mathscr{R}\,\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathscr{R}^{\mu\nu\alpha\beta},\ \ \mathscr{R}^\mu{}_\nu\,\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma\mu}\,\mathscr{R}^{\alpha\beta\gamma\nu}, \tag{2.127}$$

$$\mathscr{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\,\mathscr{R}_{\alpha\mu}\,\mathscr{R}_{\beta\nu},\ \ \mathscr{R}^3,\ \ \mathscr{R}^\alpha_\beta\,\mathscr{R}^\beta_\gamma\,\mathscr{R}^\gamma_\alpha,\ \ \mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\zeta}\,\mathscr{R}^{\sigma\zeta}{}_{\alpha\beta}\ \text{ et }\ \mathscr{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\,\mathscr{R}^\alpha{}_\sigma{}^\mu{}_\zeta\,\mathscr{R}^{\beta\sigma\nu\zeta} \tag{2.128}$$

Mais si l'on utilise les équations du mouvement, tous ces termes s'annulent sauf ceux de la dernière catégorie. Ainsi, par redéfinition du champ, tous les invariants écrits ci-dessus peuvent être absorbés, exceptés ceux du type Riem^3. Donc le contre-terme se développe a priori comme

$$\mathscr{L}_{ct}\big|_{on\ shell} = |\det(g)|^{\frac{1}{2}}(c_1\,\mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\zeta}\,\mathscr{R}^{\sigma\zeta}{}_{\alpha\beta} + c_2\,\mathscr{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\,\mathscr{R}^\alpha{}_\sigma{}^\mu{}_\zeta\,\mathscr{R}^{\beta\sigma\nu\zeta}) \tag{2.129}$$

Mais

$$\mathscr{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\,\mathscr{R}^\alpha{}_\sigma{}^\mu{}_\zeta\,\mathscr{R}^{\beta\sigma\nu\zeta} = \tfrac{1}{2}\,\mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\zeta}\,\mathscr{R}^{\sigma\zeta}{}_{\alpha\beta} + \text{termes s'annulant sur la couche de masse} \tag{2.130}$$

(cette formule pouvant être déduite du théorème de Gauss-Bonnet-Chern en dimension *6* [3]).

Ainsi les deux invariants dont il est question peuvent être considérés comme proportionnels. Le contre-terme n'est donc composé que d'un seul invariant :

$$\mathscr{L}_{ct}\big|_{on\ shell} = a|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\zeta}\,\mathscr{R}^{\sigma\zeta}{}_{\alpha\beta}, \tag{2.131}$$

où a est un coefficient(dépendant de D, i.e. de ϵ) à déterminer.

Etant donné que les divergences à une boucle sont en ϵ^{-1}, pour les divergences à deux boucles on aura uniquement des termes en $(\epsilon^{-1})^2 = \epsilon^{-2}$ et ϵ^{-1}. De plus, on sait que les divergences de la matrice S sont renormalisables à une boucle ; donc les effets en $(\epsilon^{-1})^2$ peuvent être oubliés, et on en conclut qu'à deux boucles, comme à une boucle, le coefficient a varie comme ϵ^{-1}.

2.4.2 Expression finale

Goroff et Sagnotti montrent [3] qu'il suffit, pour déterminer a, de calculer la correction à deux boucles du ***vertex***, et que seuls *8* diagrammes sont à considérer. Le résultat de ces calculs est

$$\mathscr{L}_{ct}\big|_{on\ shell} = \tfrac{209}{1474560\pi^4}\,\epsilon^{-1}|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda}\,\mathscr{R}^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta} \tag{2.132}$$

Le coefficient a n'étant pas nul, nous sommes en présence d'une véritable divergence. Autrement dit, la matrice S de la gravité d'Einstein pure possède une ***divergence non-renormalisable à deux boucles***.

3 Les divergences en Supergravité

Nous considérons dans cette partie une classe d'extensions supersymétriques de la relativité générale [7] regroupées sous le nom de ***supergravité*** [8] et nous proposons de montrer qu'elle jouit de propriétés quantiques plus appréciables que celles de la théorie d'Einstein, que nous avons mises en lumière dans les précédentes parties.

Le modèle le plus simple [9] est celui avec une seule charge de supersymétrie ou *supercharge* ($\mathscr{N} = 1$), notée Q. Quant au contenu en champs, voici la constitution du supermultiplet le plus simple :

[7] formulable en diverses dimensions, mais nous nous bornerons à $D = 4$

[8] abrégé en *sugra*

[9] *simple supergravity* en anglais

(i) la partie bosonique : le vierbein e (ou *tétrade*), de composantes e^a_μ, telles que $g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)e^b_\nu(x)\eta_{ab}$; où g est la métrique, qui donne naissance au graviton. C'est un objet de spin *2*.

(ii) la partie fermionique : le gravitino (ou *champ de Rarita-Schwinger*) ψ, de composantes ψ^α_μ. C'est un objet de spin $\frac{3}{2}$ (spin *adjacent*).

3.1 Divergences à l'ordre d'une boucle

Grisaru et ses collaborateurs ont montré en *1976* que la supergravité exhibait le même comportement que la gravité pure à une boucle, dans le sens où le lagrangien de contre-terme s'écrit $\mathscr{L}_{ct} = \epsilon^{-1}\mathscr{B}^2$, où $\mathscr{B}$ s'annule lorsqu'on utilise les équations du mouvement (i.e. les équations d'Einstein pour le champ gravitationnel et celles de Rarita-Schwinger pour le gravitino), de sorte que

$$\mathscr{L}_{ct}^{1\ \text{loop}}\big|_{on\ shell} = 0 \tag{3.1}$$

Ainsi il s'agit d'une théorie ***finie sur la couche de masse à une boucle*** : le problème est reporté à l'ordre de deux boucles au moins.

3.2 Divergences à l'ordre de deux boucles

Dans [10] les auteurs examinent les conséquences de la formule

$$\mathscr{L}_{ct}^{2\ \text{loops}}\big|_{on\ shell} = a|\det(g)|^{\frac{1}{2}}\mathscr{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\mathscr{R}^{\mu\nu}{}_{\sigma\zeta}\,\mathscr{R}^{\sigma\zeta}{}_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

sur le processus de diffusion à quatre gravitons (*graviton-graviton scattering*). Si on note $\psi_\ell(\zeta_\ell)$ l'état quantique de la ℓ-ième particule, dont l'hélicité est ζ_ℓ ($\zeta_\ell \in \{2, -2\}$ pour le graviton) et

$$\mathfrak{A}(\zeta_3, \zeta_4; \zeta_1, \zeta_2) = \langle \psi_3(\zeta_3) \otimes_\mathbb{C} \psi_4(\zeta_4) \mid \mathrm{S} \cdot (\psi_1(\zeta_1) \otimes_\mathbb{C} \psi_2(\zeta_2))\rangle \tag{3.3}$$

l'amplitude relative au processus

$$(\zeta_1, \zeta_2) \longrightarrow (\zeta_3, \zeta_4), \tag{3.4}$$

alors on montre que les seules quantités a priori non-nulles sont $\mathfrak{A}(2, 2; 2, -2)$ et $\mathfrak{A}(2, 2; -2, -2)$. Mais ces amplitudes violent la conservation de l'hélicité : $\zeta_1+\zeta_2 \neq \zeta_3+\zeta_4$. Or, dans une théorie invariante sous transformations supersymétriques (globales comme locales), l'hélicité est conservée (résultat de Grisaru et Pendleton). C'est donc que

$$a|_{sugra} = 0, \quad \text{soit} \quad \mathscr{L}_{ct}^{2\ \text{loops}}\big|_{sugra,\ on\ shell} = 0 \tag{3.5}$$

Ainsi, en dimension *4*, la supergravité est ***finie sur la couche de masse à deux boucles***.
La supersymétrie permet donc à elle seule de reporter les éventuelles divergences à l'ordre de ***trois boucles au moins***.

4 Conclusion et perspectives

Nous avons démontré par des arguments simples (le comptage de puissances et l'invariance de jauge du lagrangien), que la gravité (einsteinienne) pure est renormalisable à une boucle. Les mêmes outils nous ont ensuite permis d'arriver au résultat de Goroff et Sagnotti, à savoir la présence de divergences non-renormalisables à l'ordre de deux boucles ; résultat fort célèbre et non moins désastreux, puisqu'il implique d'affreuses divergences non-renormalisables à tous les ordres supérieurs en boucles (une infinité de nouveaux paramètres restant indéterminés). Ainsi la relativité générale n'est pas renormalisable et ne peut donc pas convenir comme modèle satisfaisant pour la gravitation quantique. [10]

Ensuite, nous avons montré que l'ajout de la supersymétrie dans le modèle permettait à lui seul de repousser les éventuelles divergences à l'ordre de trois boucles, i.e. que les théories de supergravité sont finies sur la couche de masse à deux boucles.

Historiquement, pendant plus de *20* ans, la majorité des physiciens a alors pensé que toutes les théories de supergravité étaient divergentes à trois boucles, et peu de calculs furent menés à bien. Il faut remarquer que la grande complexité des calculs basés sur les diagrammes de Feynman a grandement contribué à ce « creux »de résultats. En effet, en gravité, les calculs d'amplitudes associées aux graphes de Feynman deviennent vite d'une difficulté diabolique, ce qui en fait un formalisme très mal adapté. Par exemple, le nombre de termes dans l'expression d'un diagramme à *3* boucles typique est de l'ordre de 10^{21} (avant même de calculer une seule intégrale) ; à *5* boucles, on arrive à 10^{30}.

[10] tant que l'on ne remet pas en question le fait qu'une théorie quantique des champs satisfaisante se doit d'être renormalisable

Ce n'est que très récemment que les physiciens purent, à l'aide de techniques issues par exemple de la théorie des cordes, calculer certaines de ces amplitudes. A l'heure actuelle, on sait ainsi que la supergravité $\mathcal{N} = 8$ échappe à ces divergences à trois boucles, et réussit même à repousser les éventuelles divergences à un ordre bien plus élevé. Par conséquent, il n'est pas impossible que cette théorie soit ***finie dans l'ultraviolet*** ; ceci faisant actuellement encore l'objet de recherches actives (et de débats houleux). Il s'agit donc d'une des lignes directrices les plus prometteuses dans la quête d'une théorie quantique de la gravitation.

Références

[1] M. J. Duff. Ultraviolet divergences in extended supergravity. *Supergravity 81*, Spring school on supergravity, ICTP, Trieste, 1981.

[2] M. H. Goroff and A. Sagnotti. Quantum Gravity At Two Loops. *Phys. Lett. B*, 160 :81, 1985.

[3] M. H. Goroff and A. Sagnotti. The Ultraviolet Behavior Of Einstein Gravity. *Nucl. Phys. B*, 266 :709, 1986.

[4] M. T. Grisaru. Two Loop Renormalizability Of Supergravity. *Phys. Lett. B*, 66 :75, 1977.

[5] C. Rovelli. Notes for a brief history of quantum gravity.

[6] G. 't Hooft. Perturbative quantum gravity.

[7] G. 't Hooft. An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure. *Nucl. Phys. B*, 62 :444–460, 1973.

[8] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Annales Poincaré Phys. Theor. A*, 20 :69–94, 1974.

[9] P. van Nieuwenhuizen. Supergravity. *Physics Reports 68*, 4 :189–398, 1981.

[10] P. van Nieuwenhuizen and C. C. Wu. On integral relations for invariants constructed from three Riemann tensors and their applications in quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 18 :1, 1977.

[11] P. Vanhove. Non-renormalisation theorems in superstring and supergravity theories.

[12] M. J. G. Veltman. Quantum theory of gravitation. In *Les Houches 1975, Proceedings, Methods in field theory*, pages 265–327, Amsterdam 1976.

5 Annexes

5.1 Notations

$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
D	Dimension de la variété qu'on s'est donnée comme espace-temps
G_D	Constante de Newton en D dimensions
$\mathcal{C}_n(q)$ ou q_n	Composante d'ordre n dans le développement perturbatif de la quantité physique q
k (ou $p, q, \dots$)	Variable typique dans l'espace de Fourier (*moment*)
∂_α	Opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ dans le système de coordonnées locales $(x^0, \dots, x^{D-1})$
$\partial^2 = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \Box$	Opérateur d'alembertien
$E^\vee$	$\mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$, le dual algébrique du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E
$\mathscr{D}(\mathcal{Q}) = \mathrm{M}^\alpha \mathrm{E}^\beta \mathrm{L}^\gamma \mathrm{T}^\delta$	Dimension physique de la quantité $\mathcal{Q}$
$\Gamma(\mathscr{E})$	Espace des sections globales du fibré vectoriel $\mathscr{E} \xrightarrow{\pi} \mathscr{B}$
Riem	Tenseur de Riemann
$\mathscr{R}^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$	Composantes du tenseur de Riemann
Ric	Tenseur de Ricci
$\mathscr{R}_{\alpha\beta} = \mathscr{R}^\sigma{}_{\alpha\beta\sigma}$	Composantes du tenseur de Ricci
$\mathscr{R} = g^{\alpha\beta}\mathscr{R}_{\alpha\beta}$	Scalaire de courbure
E, I, V, L	Nombre de lignes externes, lignes internes, vertex et boucles (resp.) d'un graphe
$\diamondsuit$	Signe indiquant la fin d'une remarque
$\mathscr{T}_{\mathscr{M},m}$	Espace tangent à la variété $\mathscr{M}$ au point $m \in \mathscr{M}$
$\mathscr{T}_{\mathscr{M}} = \bigcup_{m\in\mathscr{M}} \mathscr{T}_{\mathscr{M},m}$	Fibré tangent de la variété $\mathscr{M}$
$vol(g) = \lvert\det(g)\rvert^{\frac{1}{2}} \bigwedge_{\ell=0}^{D-1} dx^\ell$	Forme volume associée à la métrique semi-riemannienne g

5.2 Conventions

1. La convention d'Einstein sur les indices répétés est utilisée.
2. On se place en unités naturelles $c = \hbar = k_B = 1$, de sorte que $\mathrm{M} = \mathrm{E} = \mathrm{L}^{-1} = \mathrm{T}^{-1}$
3. Si E et F désignent deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels, les isomorphismes
$$(E^\vee)^\vee \simeq E \quad \text{et} \quad E \otimes_{\mathbb{R}} F \simeq \mathrm{Bil}(E^\vee \times F^\vee, \mathbb{R}) \tag{5.1}$$
sont utilisés de manière implicite.
4. La transformée de Fourier $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie comme
$$\mathbb{R}^n \ni k \longmapsto \widehat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-ik\cdot x}\, dx \in \mathbb{C}, \tag{5.2}$$
où $k \cdot x$ dénote l'évaluation en (k, x) de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée que l'on se donne sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques
(i) La formule d'inversion est :
$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k)\, \mathrm{e}^{ik\cdot x}\, dk \tag{5.3}$$

(ii) L'opérateur ∂_α agit comme ik_α, et ∂^2 comme $-k^2$.
(iii) En pratique, dans le texte, cette formule est appliquée de manière abusive [11]. $\diamondsuit$

5.3 Notions de géométrie différentielle

5.3.1 Qu'est-ce qu'une métrique ?

Soit $\mathscr{M}$ une variété différentielle de classe $\mathscr{C}^\infty$. L'espace $\mathrm{Sym}^2\mathscr{T}_{\mathscr{M}}^\vee$ est un fibré vectoriel de base $\mathscr{M}$ dont la fibre en un point $m \in \mathscr{M}$, $\mathrm{Sym}^2\mathscr{T}_{\mathscr{M},m}^\vee$, est isomorphe à l'espace des formes bilinéaires symétriques de

[11] à des objets non définis e.g.

$\mathscr{T}_{\mathscr{M},m} \times \mathscr{T}_{\mathscr{M},m}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les objets intéressants pour la physique, on considère les sections globales de ce fibré : ce sont donc les champs tensoriels covariants, de degré 2 et symétriques. La restriction de cet espace aux champs qui ne sont pas dégénérés donne ce qu'on notera l'espace $\mathrm{Met}(\mathscr{M})$. Un élément de cet espace sera appelé ***métrique*** sur $\mathscr{M}$.

5.3.2 Action du groupe des difféomorphismes sur $\mathrm{Met}(\mathscr{M})$

Le pull-back fournit une action à droite du groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathscr{M})$ sur l'espace des métriques $\mathrm{Met}(\mathscr{M})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Met}(\mathscr{M}) \times \mathrm{Diff}(\mathscr{M}) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(\mathscr{M}) \\ (g, f) & \longmapsto & f^* g \end{array} \tag{5.4}$$

En pratique on utilisera souvent la version infinitésimale, ce qui revient à considérer l'action de $\mathrm{Vect}(\mathscr{M}) = \Gamma(\mathscr{T}_{\mathscr{M}})$.
A tout champ de vecteurs $X \in \mathrm{Vect}(\mathscr{M})$ je peux associer son ***Flot***, qui est un groupe à un paramètre de difféomorphismes, i.e. un homomorphisme $t \longmapsto \mathscr{F}_{X,t}$ du groupe additif $\mathbb{R}$ vers le groupe $\mathrm{Diff}(\mathscr{M})$: par définition, pour tout $m \in \mathscr{M}$, $t \longmapsto \mathscr{F}_{X,t}(m)$ est l'unique solution du système d'équations différentielles (portant sur la courbe $\mathbb{R} \supset]-a, a[\ni t \longmapsto \sigma(t) \in \mathscr{M}$) dont l'écriture dans le système de coordonnées locales $(x^0, \ldots, x^{D-1})$ est

$$\forall \alpha \in \{0, \ldots, D-1\}, \quad \tfrac{d}{dt} x^\alpha(\sigma(t)) = X^\alpha(\sigma(t)) \quad \Big(\text{avec } X = X^\alpha \tfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big) \tag{5.5}$$

et telle que $\sigma(0) = m$.

La dérivée de Lie d'un champ tensoriel s par rapport à un champ de vecteurs X est définie par

$$\mathcal{L}_X s := \tfrac{d}{dt}\Big|_0 \mathscr{F}^*_{X,t}\, s \tag{5.6}$$

Ceci implique :

$$\mathscr{F}^*_{X,t}\, s = s + t(\mathcal{L}_X s) + \mathcal{O}(t^2) \tag{5.7}$$

Je peux notamment écrire cette formule pour un élément $g \in \mathrm{Met}(\mathscr{M})$, et prendre la composante (μ, ν) de chaque membre :

$$(\mathscr{F}^*_{X,t}\, g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} + \mathcal{O}(t^2) \tag{5.8}$$

Mais, si on prend $\nabla :=$ la connexion de Levi-Civita associée à la variété semi-riemannienne $(\mathscr{M}, g)$, on a

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = g_{\nu\sigma}(\nabla_\mu X)^\sigma + g_{\mu\sigma}(\nabla_\nu X)^\sigma \tag{5.9}$$

En utilisant les formules $(\nabla_\mu X)^\nu = \partial_\mu X^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} X^\alpha$ et $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$, on obtient

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = g_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma + g_{\mu\sigma}\partial_\nu X^\sigma + X^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} \tag{5.10}$$

On a donc immédiatement :

$$(\mathscr{F}^*_{X,t}\, g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t(g_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma + g_{\mu\sigma}\partial_\nu X^\sigma + X^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(t^2), \tag{5.11}$$

Remarque
Si aucune confusion n'est possible, cette formule sera écrite de la manière abusive suivante :

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon(g_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma + g_{\mu\sigma}\partial_\nu X^\sigma + X^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \tag{5.12}$$

le paramètre ε (paramètre de flot) étant même souvent omis. $\diamondsuit$

Si $g \in \mathrm{Met}(\mathscr{M})$ alors il est naturel de considérer ***l'orbite*** de cet élément sous l'action de $\mathrm{Diff}(\mathscr{M})$: c'est par définition

$$\mathscr{O}(g) = \{s \in \mathrm{Met}(\mathscr{M}) \mid \exists f \in \mathrm{Diff}(\mathscr{M}), s = f^* g\} \tag{5.13}$$

Appartenir à une même orbite est une relation d'équivalence, d'où notre

Définition — Equivalence de métriques
Deux métriques $g_1, g_2 \in \mathrm{Met}(\mathscr{M})$ seront dites ***équivalentes*** si elles sont dans une même orbite sous l'action du groupe des difféomorphismes, i.e. si il existe $f \in \mathrm{Diff}(\mathscr{M})$ tel que $g_2 = f^* g_1$.
On dira que g_1 et g_2 sont reliées par une ***transformation de jauge*** et on écrira souvent la version infinitésimale de la relation, à savoir

$$(g_1)_{\mu\nu} \longrightarrow (g_2)_{\mu\nu} = (g_1)_{\mu\nu} + (g_1)_{\mu\sigma}\partial_\nu X^\sigma + (g_1)_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma + X^\sigma \partial_\sigma (g_1)_{\mu\nu} \tag{5.14}$$

5.3.3 Action d'Einstein-Hilbert et groupe des difféomorphismes

Dans cette section, nous donnons un sens à l'assertion bien connue selon laquelle l'action d'Einstein-Hilbert est "invariante sous difféomorphisme". Pour cela nous considérons une fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}) \times \mathrm{Met}(\mathscr{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, g) &\longmapsto \mathcal{F}(\varphi, g) := \int_{\mathscr{M}} \varphi \, vol(g) = \int_{y \in \mathscr{M}} \varphi(y) |\det(g_y)|^{\frac{1}{2}} \, dy \end{aligned} \tag{5.15}$$

ainsi qu'une application $f \in \mathrm{Diff}(\mathscr{M})$ qui nous permet de réaliser le changement de variables $y = f(x)$:

$$\mathcal{F}(\varphi, g) = \int_{x \in \mathscr{M}} |\det(g_{f(x)})|^{\frac{1}{2}} \, (\varphi \circ f)(x) \left| \det \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{\alpha,\beta} \right| dx \tag{5.16}$$

Or, si g est donnée en coordonnées locales par $g_y = g_{\mu\nu}(y) dy^\mu \otimes dy^\nu$, le pull-back de g par f est donné par :

$$(f^* g)_x = (f^* g)_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{5.17}$$

avec

$$(f^* g)_{\mu\nu}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, \tag{5.18}$$

donc

$$(f^* g)_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} = g_{\alpha\beta}(f(x)), \tag{5.19}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det(g_{f(x)}) &= \det_{\alpha\beta} \left((f^* g)_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \right) \\ &= \left| \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right)_{\alpha,\beta} \right|^2 \det((f^* g)_x), \end{aligned} \tag{5.20}$$

et donc

$$|\det(g_{f(x)})|^{\frac{1}{2}} = \left| \det \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{\alpha,\beta} \right|^{-1} |\det((f^* g)_x)|^{\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

D'autre part, le pull-back d'un champ scalaire $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M})$ n'est autre que la composition

$$f^* \varphi = \varphi \circ f \tag{5.22}$$

Nous trouvons donc que

$$\mathcal{F}(\varphi, g) = \int_{x \in \mathscr{M}} |\det((f^* g)_x)|^{\frac{1}{2}} \, (f^* \varphi)(x) \, dx, \tag{5.23}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}(f^* \varphi, f^* g) = \mathcal{F}(\varphi, g) \tag{5.24}$$

Il reste à dire que l'action d'Einstein-Hilbert est la fonctionnelle de "courbure totale", et comme le scalaire de courbure est bien un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{M})$, notre résultat s'applique, et cette action est bien invariante sous l'action du groupe des difféomorphismes, au sens de la formule ci-dessus.

5.3.4 Quelques propriétés du tenseur de Riemann

Rappel : on monte et descend les indices à l'aide de la métrique g.

1. *Première idendité de Bianchi*

$$\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta} + \mathscr{R}_{\mu\beta\nu\alpha} + \mathscr{R}_{\mu\alpha\beta\nu} = 0 \tag{5.25}$$

2. *Seconde identité de Bianchi*

$$(\nabla_\sigma \mathscr{R})_{\mu\nu\alpha\beta} + (\nabla_\beta \mathscr{R})_{\mu\nu\sigma\alpha} + (\nabla_\alpha \mathscr{R})_{\mu\nu\beta\sigma} = 0 \tag{5.26}$$

3. *Propriétés de symétrie*

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{\nu\mu\alpha\beta} &= -\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
\mathscr{R}_{\mu\nu\beta\alpha} &= -\mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
\mathscr{R}_{\alpha\beta\mu\nu} &= \mathscr{R}_{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

4. *Expression en fonction des symboles de Christoffel*

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\sigma} \\
&= \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} - (\alpha \leftrightarrow \beta)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Remerciements

Je remercie chaleureusement Pierre Vanhove, Laurent Lafforgue, Jean-Pierre Bourguignon, Olivier Babelon, Michela Petrini, Marco Picco, Léo Granger, Nicolas Marie, Benjamin Lévêque, Guillaume Raynaud, Thomas Cailleteau, Virgile Ducet, Sébastien Darses, Cheng Zhang, David Andriot ainsi que tout le personnel de l'IHES et du LPTHE.