



MASTER 2 SCIENCES DE LA MATIÈRE
Parcours Physique Fondamentale
École Normale Supérieure de Lyon

Stage 2010-2011
PLAT Xavier
M2 Physique

ETUDE ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU TUBE DE SPINS

Résumé : L'étude de systèmes de spins quantiques unidimensionnels ou quasi-unidimensionnels est aujourd'hui un thème de recherche important. Nous allons ici étudier un tube de spins, c'est-à-dire un ensemble de chaînes de spins couplées dans la direction transverse. Plus précisément, nous concentrons nos efforts sur l'étude des plateaux qui apparaissent dans la courbe d'aimantation en présence d'un champ magnétique. Nous utilisons pour cela une approche analytique basée sur l'intégrale de chemin et une approche numérique avec la diagonalisation exacte.

Mots-clés : magnétisme quantique, unidimensionnel, plateaux d'aimantation, tube de spin, intégrale de chemin, diagonalisation exacte

Laboratoire de Physique Théorique UMR 5152

IRSAMC Université Paul Sabatier

118 Route de Narbonne

Bâtiment 3R1B4

31062 Toulouse Cedex 04

<http://www.lpt.ups-tlse.fr/>

Maîtres de stage : **Sylvain Capponi et Pierre Pujol**

capponi@irsamc.ups-tlse.fr

pierre.pujol@irsamc.ups-tlse.fr

Avril-Juillet 2011

Remerciement

Je remercie fortement Sylvain Capponi et Pierre Pujol pour avoir accepté de m'encadrer pendant ce stage, ainsi que pour leur attention et leur disponibilité. Ils ont rendu ces quatre mois très agréables.

Je tiens aussi à remercier le tout nouveau docteur David Schwandt et le futur docteur Yasir Iqbal pour la bonne ambiance qui a régné dans le bureau tout au long du stage.

Un remerciement aussi à Juan-Pablo, l'autre lyonnais présent. Ca aura fait pas mal de cafés.

Je remercie enfin la liste de diffusion tous.traitementdusignal, ainsi que les intrus, pour l'avalanche de mails au cours de ce stage (plus de 1000!).

Table des matières

Introduction	3
1 Le magnétisme quantique à une dimension	3
1.1 La chaîne de Heisenberg et l'intérêt du cas unidimensionnel	3
1.2 La conjecture de Haldane	4
1.3 Le théorème de Lieb-Schultz-Mattis	4
1.4 Vers les systèmes bidimensionnels : les échelles de spins	5
1.5 Comportements sous champ magnétique	5
2 Le tube de spins	6
3 Approche par l'intégrale de chemin	7
3.1 Intégrale de chemin pour les systèmes de spins et phase de Berry	7
3.2 Un exemple simple : la chaîne de spins sous champ magnétique	9
3.3 Application au spintube	12
3.4 Application au modèle effectif en couplage faible	15
4 Approche numérique par diagonalisation exacte	16
4.1 La diagonalisation exacte	16
4.1.1 Principe de la méthode	16
4.1.2 Utilisation des symétries du système	17
4.1.3 Algorithme de Lanczos	17
4.2 Application au spintube	18
4.2.1 Courbes d'aimantation	18
4.2.2 Entropie de Von Neumann et charges centrales	20
4.2.3 Ouverture d'un gap de chiralité sur le plateau $m=7/6$	21
Conclusion	23
Annexes	25
A Etats cohérents de spin	25
B Transformation de dualité	25
C Courbes d'aimantation obtenues par DMRG	26

Introduction

Les systèmes antiferromagnétiques unidimensionnels ou quasi-unidimensionnels de spins sont aujourd'hui un thème de recherche très actif dans le domaine de la matière condensée. De nombreux composés sont disponibles expérimentalement, avec différentes géométries de réseau ou d'interactions entre spins, et constituent ainsi une excellente opportunité de tester les modèles théoriques et les prédictions obtenues analytiquement ou numériquement. Plus généralement, ces questions concernant le magnétisme viennent en fait de l'étude des différentes phases d'isolants de Mott que peuvent former les systèmes d'électrons fortement corrélés, dont les mouvements sont gelés dans ces phases. Seuls restent les degrés de liberté des spins disposés fixement sur un réseau. Le magnétisme quantique correspond à l'étude de ces degrés de liberté.

De par la présence de larges fluctuations quantiques à une dimension, la vision classique donnée par l'ordre de Néel n'est plus valable. Cela conduit à une large gamme de comportements inhabituels, comme l'existence d'un gap entre un état fondamental singulet et un état excité non-singulet. De manière générale, la présence de frustration dans les systèmes magnétiques va souvent détruire l'ordre magnétique et donner lieu à des comportements physiques très divers, dont l'étude est un objectif actuel.

Un sujet important concerne l'étude de ces modèles antiferromagnétiques lorsque l'on ajoute un champ magnétique. Pour un système classique, on s'attendrait à observer une courbe d'aimantation continue du champ nul jusqu'au champ où tous les spins sont polarisés dans sa direction. Cependant, il apparaît expérimentalement dans certains composés des plateaux dans ces courbes : l'aimantation reste constante dans un intervalle fini de valeurs du champ magnétique appliqué. On constate également que ces plateaux sont de plus en plus marqués lorsque l'on diminue la température du système. Autrement dit, leur origine est purement quantique. Leur étude passe alors par la résolution du problème quantique, et la compréhension des états que peuvent présenter ces systèmes, notamment à température nulle. Les différents travaux réalisés jusqu'à aujourd'hui montrent que ces états peuvent voir des états fondamentaux ou des excitations « exotiques ». Par exemple, une excitation de spin 1 qui va se décomposer en deux spinons, des quasi-particules de spin 1/2 [1], dont on va pouvoir ensuite étudier si ils sont confinés ou non.

L'objectif de ce stage est d'étudier les plateaux d'aimantation d'un tube de spins sous champ magnétique, à la fois analytiquement et numériquement. Une méthode pour prendre en compte l'effet des phases de Berry qui interviennent dans la fonction de partition, et qui ont un rôle très important en champ nul, a été abordé en champ non-nul récemment [2]. Nous nous proposons de l'appliquer ici au tube de spins et de donner une théorie de champ effective. Dans le même temps, une étude numérique par diagonalisation exacte permet de s'affranchir des simplifications bien souvent nécessaires aux approches analytiques. La confrontation des deux approches, complémentaires, permet ainsi une meilleure compréhension du système.

Dans la section 1, nous commençons par rappeler quelques généralités sur le magnétisme quantique à une dimension et sur les principaux systèmes étudiés à l'heure actuelle, c'est-à-dire les chaînes et échelles de spins. La discussion est principalement qualitative et vise à donner un panorama des comportements que peuvent présenter ces systèmes. Puis nous présentons dans la section 3 le modèle du tube de spins que nous avons étudié au cours du stage, ainsi que les principaux résultats déjà connus tant analytiquement que numériquement. La section 4 est consacrée à une approche semi-classique des systèmes de spins basée sur l'intégrale de chemin. Finalement, dans la section 5 nous présentons les résultats obtenus numériquement par diagonalisation exacte.

1 Le magnétisme quantique à une dimension

Dans cette section, nous allons présenter le contexte dans lequel se situe le travail effectué au cours de ce stage. Nous allons pour cela rappeler quelques modèles, propriétés ou théorèmes importants du magnétisme quantique, et plus spécifiquement sur le cas unidimensionnel.

1.1 La chaîne de Heisenberg et l'intérêt du cas unidimensionnel

Le modèle le plus simple du magnétisme quantique est le modèle de Heisenberg, dont le Hamiltonien s'écrit

$$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (1.1)$$

où les \vec{S}_i sont les opérateurs de spin S au site i du réseau, $J > 0$ est la constante d'échange antiferromagnétique (AF) entre spins et $\langle i, j \rangle$ restreint la somme aux plus proches voisins. Ce modèle, simple en apparence, constitue en fait le point de départ de l'étude du magnétisme quantique.

Considérons tout d'abord la limite classique $S \rightarrow \infty$ où les spins sont représentés par des vecteurs. L'état de plus basse énergie consiste, dans le cas de réseaux bipartites, en la formation de deux sous-réseaux A et B dans lesquels tous les spins pointent dans la même direction et où l'aimantation des deux sous-réseaux est opposée. Cette image classique est valable quelle que soit la dimensionnalité du système.

Des différences vont cependant apparaître lorsque l'on considère le caractère quantique des spins. En effet, une analyse en ondes de spins [3] montre que dans le cas à une dimension, les fluctuations quantiques détruisent l'ordre de Néel et on obtient un état fondamental sans ordre magnétique. Il s'agit en fait simplement de la conséquence de l'analogie quantique du théorème de Mermin-Wagner [4]. A une dimension, l'ordre de Néel ne peut pas exister puisqu'il brise la symétrie continue $SU(2)$ du modèle (1.1). De même, il ne peut exister en deux dimensions qu'à température nulle. Pour $d = 3$, il s'agit cependant d'une bonne image, les fluctuations quantiques ne modifiant que modérément cet ordre magnétique.

Ainsi, depuis un certain nombre d'années, un des sujets d'intérêt majeurs dans le magnétisme quantique est la recherche de liquides de spins [5], c'est-à-dire d'états ne possédant pas d'ordre de Néel à longue distance. Les systèmes unidimensionnels jouent alors un rôle particulier. En effet, comme on vient de le rappeler, il n'est pas possible de briser une symétrie continue dans ce cas. Autrement dit, le cas générique à une dimension est d'avoir un liquide de spin. Il reste alors à étudier quels sont ces états possibles, quelles sont leurs excitations de basse énergie, etc. On dispose pour cela de plusieurs techniques analytiques (modèles intégrables, théories conformes des champs, bosonisation) ou numériques comme le Density Matrix Renormalization Group (DMRG). Tout ceci fait du monde unidimensionnel le laboratoire idéal pour étudier toutes les différentes phases exotiques qui peuvent exister et leurs propriétés physiques. Il s'agit d'un bon point de départ pour ensuite étudier le cas bidimensionnel plus complexe, où les liquides de spins ne sont pas la norme et où les outils analytiques et numériques sont plus rares. La grande question actuelle à deux dimensions est celle de la détermination et la classification de toutes ces phases non-magnétiques qui peuvent exister à $T = 0$ et concurrencer l'ordre de Néel [6].

Signalons enfin que l'étude de ces systèmes unidimensionnels n'est pas qu'académique, puisqu'il existe de nombreuses systèmes réels qui peuvent être modélisés par des chaînes de spins [7]. On pourra pour plus d'informations à ce sujet consulter la revue de Lecheminant et les références qui s'y trouvent [8].

1.2 La conjecture de Haldane

Revenons maintenant au modèle de Heisenberg et considérons le cas à une dimension où les spins forment une chaîne. Pour $S = 1/2$, le modèle est intégrable par ansatz de Bethe [9] et on connaît ses propriétés. Plus particulièrement, son spectre d'excitation n'est pas gappé, c'est-à-dire qu'il existe des niveaux excités arbitrairement proches en énergie de l'état fondamental. Les excitations élémentaires sont les excitations fractionnaires sans masse de spins $1/2$ [10]. Les fonctions de corrélations $\langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle$ sont en loi de puissance : le système est critique et il n'existe qu'un quasi-ordre à longue portée. Une fois ces résultats obtenus, on pourrait penser que le cas du modèle de Heisenberg est pour ainsi dire réglé, le comportement devant être le même pour les spins plus élevés.

En fait, Haldane a conjecturé en 1983, sur les bases d'une approche semi-classique, que les propriétés physiques de la chaîne de Heisenberg dépendent crucialement de la valeur du spin [11]. Dans le cas de spins demi-entiers, il a trouvé que le comportement est essentiellement celui de la chaîne $S = 1/2$, c'est-à-dire absence de gap et fonctions de corrélation décroissant algébriquement. Les chaînes de spins demi-entiers appartiennent en fait à la même classe d'universalité que celle de $S = 1/2$. Par contre, dans le cas de spins entiers il prédit au contraire l'ouverture d'un gap dans le spectre d'énergie, et ainsi l'existence d'une longueur de corrélation et des fonctions de corrélation qui décroissent exponentiellement. Cette conjecture a par la suite été confirmée tant analytiquement que numériquement, et on a également observé ce gap expérimentalement, par exemple dans le composé de spin 1 $Ni(C_2H_8N_2)NO_2(ClO_4)$ [12]. Le comportement d'une chaîne de spins 1 est ainsi radicalement différent de celui d'une chaîne de spins $1/2$.

1.3 Le théorème de Lieb-Schultz-Mattis

Nous allons maintenant donner un théorème dû à Lieb, Schultz et Mattis (LSM) [13], qui donne des informations sur la nature de l'état fondamental d'une chaîne de spins demi-entiers. Plus précisément, ce théorème dit que soit le spectre d'énergie ne présente pas de gap, soit l'état fondamental est dégénéré et brise l'invariance par translation (par exemple, appariement de deux spins voisins pour former un singulet) et il s'ouvre un gap au-dessus de ces états. La seule condition est que le Hamiltonien respecte l'invariance par translation et que les interactions soient de courte portée. Nous donnons ici l'idée de la démonstration du théorème.

L'idée de base est de construire un état orthogonal au fondamental, et de montrer que leur différence d'énergie tend vers 0 dans la limite thermodynamique. L'état proposé par LSM se construit à partir du fondamental $|0\rangle$ d'énergie E_0 par la transformation

$$|LSM\rangle = U|0\rangle = e^{i \sum_{j=1}^N \frac{2\pi j}{N} S_j^z} |0\rangle \quad (1.2)$$

où N est le nombre de spins de la chaîne. Autrement dit, l'opérateur U introduit une torsion des spins de $2\pi/N$ entre deux spins consécutifs et la rotation globale est de 2π sur l'ensemble de la chaîne. La condition sur l'énergie est remplie car il est possible de montrer que, cette torsion étant infinitésimale, l'énergie additionnelle est petite et

s'annule dans la limite thermodynamique selon

$$\Delta E = \langle LSM | (H - E_0) | LSM \rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad (1.3)$$

Il est ensuite possible de montrer que l'opérateur U modifie la valeur propre de l'opérateur de translation T , défini par $T^\dagger \vec{S}_j T = \vec{S}_{j+1}$ avec les conditions périodiques $N + 1 \equiv 1$. On a alors $T^\dagger U T = U e^{i2\pi S_1^z}$, c'est-à-dire que pour un spin entier on a en fait obtenu le même état et on ne peut rien dire, tandis que pour un spin demi-entier, le nouvel état $|LSM\rangle$ est état propre de l'opérateur de translation avec valeur propre $k_0 + \pi$, où k_0 est l'impulsion de l'état fondamental $|0\rangle$. Il s'en suit que les deux états sont orthogonaux $\langle 0 | LSM \rangle = 0$. Cela conclut la démonstration. Mentionnons enfin que ce théorème a été étendu aux systèmes en deux dimensions récemment [14].

1.4 Vers les systèmes bidimensionnels : les échelles de spins

Les échelles de spins, c'est-à-dire des systèmes faits de chaînes de spins couplées, sont un sujet d'intérêt depuis une vingtaine d'années. Cela s'explique par deux raisons. La première est qu'elles représentent la première étape dans l'étude du passage de une à deux dimensions. La seconde est qu'expérimentalement de nombreux composés pouvant être décrits par de tels modèles ont été synthétisés, et permettent ainsi de tester les prédictions obtenues théoriquement [7]. La Figure 1 montre par exemple la structure du réseau d'une échelle de spins décrite par un modèle d'Heisenberg. Il s'agit simplement de deux chaînes couplées dans la direction transverse.

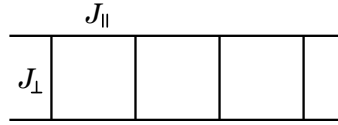


FIGURE 1 – Structure d'une échelle de spins à deux chaînes décrite par un modèle d'Heisenberg.

D'une manière similaire au problème de spin de Haldane évoqué plus haut pour la chaîne de spins, il existe un effet de parité sur le nombre de chaînes de spins $1/2$ que l'on couple [15, 16]. Il s'avère que les échelles avec un nombre pair de chaînes se comportent comme une seule chaîne de spins S entiers, c'est-à-dire qu'elles possèdent un gap dans le spectre de basse énergie. Par contre, pour un nombre impair de chaînes, le système reste sans gap car il est possible de se ramener au cas d'une seule chaîne. En fait, des généralisations du théorème LSM permettent de comprendre cette différence entre nombre de chaînes pair ou impair.

Citons enfin quelques réalisations expérimentales d'échelles de spins. Deux exemples typiques d'échelles à deux chaînes de spins $1/2$ montrant un gap sont SrCu_2O_3 et $\text{Cu}_2(\text{C}_5\text{H}_{12}\text{N}_2)_2\text{Cl}_4$ [17, 18]. Un exemple d'échelles à 3 chaînes ne présentant pas de gap est $\text{Sr}_2\text{Cu}_3\text{O}_5$ [17].

1.5 Comportements sous champ magnétique

Jusqu'à présent, nous avons parlé de chaînes et d'échelles de spins en l'absence de champ magnétique. Lorsque ces systèmes avec ou sans gap sont placés dans un champ magnétique h , un comportement plus riche devient possible. Plus particulièrement, divers travaux ont montré qu'il est possible pour une chaîne de spins entiers d'être en fait sans gap, et inversement pour une chaîne de spins demi-entiers de voir apparaître un gap au-dessus de l'état fondamental pour certaines valeurs du champ. Pour ce second cas, il est important de mentionner le travail de Oshikawa, Yamanaka et Affleck (OYA) qui, en étendant le théorème LSM aux chaînes de spins demi-entiers sous champ magnétique, ont donné une condition sur les valeurs d'aimantation m du système (la valeur moyenne de S^z le long de l'axe du champ) [19]. Plus précisément, ils prédisent qu'il ne pourra s'ouvrir un gap que si

$$(S - m) \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

dans le cas de Hamiltoniens invariants par translation.

De manière très concrète, ces gaps vont se traduire dans la courbe d'aimantation $m(h)$ par la présence de plateaux à ces valeurs de m , c'est-à-dire que l'aimantation ne varie pas continûment avec le champ. On peut comparer cela à l'effet Hall par exemple, avec l'apparition de plateaux dans la courbe de conductivité en fonction du champ magnétique appliqué. En fait, il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante pour observer des plateaux d'aimantation. Plus précisément, la présence d'un gap entraîne celle d'un plateau, mais l'inverse n'est pas vrai. On peut par exemple imaginer le cas d'un système dont le spectre d'énergie serait gapless, mais pour lequel il y aurait en fait un gap vers le premier état de S^z différent du fondamental. Cette condition reste cependant très utile puisqu'elle nous donne des valeurs auxquelles on peut se restreindre lorsque l'on cherche des plateaux pour un modèle donné.

2 Le tube de spins

Nous présentons dans cette partie le modèle que nous avons étudié au cours de ce stage, ainsi que différents résultats déjà connus qui s'y rapportent. Il s'agit d'un ensemble de 3 chaînes de spins quantiques S couplées entre elles, comme pour les échelles de spins dont nous venons de parler, mais avec des conditions périodiques le long des barreaux. Cela forme donc un tube de spins de géométrie triangulaire dans la direction transverse, comme représenté sur la Figure 2. Il s'agit ainsi d'un système quasi-unidimensionnel, dans la lignée des efforts qui sont faits actuellement pour comprendre le passage de une à deux dimensions. Tous les couplages entre spins sont de type Heisenberg et on rajoute un champ magnétique le long de l'axe de quantification z . Le Hamiltonien de ce système s'écrit

$$H = J_{\parallel} \sum_j \sum_{\alpha=1,2,3} \vec{S}_{\alpha,j} \cdot \vec{S}_{\alpha,j+1} + J_{\perp} \sum_j \sum_{\alpha=1,2,3} \vec{S}_{\alpha,j} \cdot \vec{S}_{\alpha+1,j} - h \sum_j \sum_{\alpha=1,2,3} S_{\alpha,j}^z = H_{\parallel} + H_{\perp} + H_h \quad (2.1)$$

où $J_{\parallel} > 0$ est le couplage antiferromagnétique le long des chaînes (couplage longitudinal), $J_{\perp} > 0$ le couplage antiferromagnétique le long des barreaux (couplage transverse), h le champ magnétique. L'indice $\alpha = 1, 2, 3, 4 \equiv 1$ repère la chaîne (autour du tube) et $i = 1, \dots, L$ le site sur une chaîne (le long du tube). La géométrie triangulaire ainsi que le champ magnétique introduisent de la frustration dans le modèle.

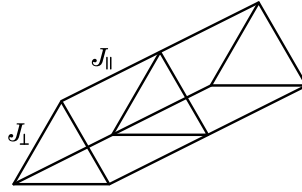


FIGURE 2 – Structure du réseau du spintube à 3 chaînes décrit par un modèle d'Heisenberg.

Les tubes de spins, bien qu'étant une « simple » extension des chaînes de spins puisque l'on a simplement rajouté des conditions périodiques le long des barreaux (remarquons au passage que cela rend le tube plus symétrique que des échelles), montrent cependant des comportements très différents. Si, comme nous l'avons évoqué dans la section précédente, les échelles de spins avec un nombre impair de chaînes ont un comportement similaire à celui d'une seule chaîne, le fait de mettre des conditions périodiques va introduire de la frustration dans la direction transverse et fortement modifier les propriétés physiques. Ainsi, dans notre cas, la géométrie triangulaire frustre les liens entre spins, puisque la cellule unité triangulaire est le prototype du système géométriquement frustré. Il est important de noter que cela n'est pas vrai pour un nombre pair de chaînes, le système reste non-frustré avec les conditions périodiques. Il s'en suit qu'il s'ouvre un gap dans le spectre d'énergie, à la fois pour un nombre pair ou impair de chaînes. Cependant, les causes ainsi que les natures des gaps diffèrent dans les deux cas. Dans le cas pair, le gap s'explique par la formation de singulets (« dimérisation ») dans la direction transverse, de la même façon que pour des conditions ouvertes. Pour un nombre impair de chaînes, l'état fondamental dimérisé devient deux fois dégénéré, ce qui ouvre un gap pour les excitations de spin [20]. Cette dégénérescence est une conséquence directe de la frustration.

Il est intéressant de considérer la limite de couplage fort entre les chaînes, ou couplage faible entre les triangles, $J_{\parallel}/J_{\perp} \rightarrow \infty$. En effet, le cas $J_{\parallel} = 0$ correspond simplement à 3 spins sur une géométrie triangulaire, et nous savons de plus [21] que dans l'analyse de la limite opposée, la bosonisation montre que l'on va en fait retrouver le cas du couplage fort entre les chaînes. Dans la limite $J_{\parallel} = 0$ et en l'absence de champ, nous sommes amenés à étudier le Hamiltonien pour un triangle

$$H = J_{\perp} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3). \quad (2.2)$$

Introduisant le spin total du triangle $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$, nous pouvons le réécrire comme

$$H = \frac{J_{\perp}}{2} \vec{S}^2 - 3 \frac{J_{\perp}}{2} S(S+1), \quad (2.3)$$

soit comme le carré du spin total, à une constante près. L'état fondamental de ce Hamiltonien est donc l'état de spin total le plus petit que l'on peut construire à partir de 3 spins S . Comme nous allons par la suite dans la partie numérique considérer un spin demi-entier, nous traitons ici le cas du spin 1/2 [20]. Dans ce cas, le spin total le plus

petit possible est un spin $1/2$. L'état fondamental est 4 fois dégénéré, et les états sont

$$\begin{aligned}
|\uparrow L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \omega|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \omega^{-1}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \\
|\downarrow L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \omega|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \omega^{-1}|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle), \\
|\uparrow R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \omega^{-1}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \omega|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \\
|\downarrow R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \omega^{-1}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \omega|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

où \uparrow, \downarrow représentent la projection S^z du spin total $1/2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Les indices L et R représentent eux la chiralité des états. Ces états sont en fait états propres de l'opérateur de rotation le long du triangle. On peut donc « tourner » dans deux sens différents, ce qui correspond aux deux chiralités. C'est essentiellement cette dégénérescence qui distingue le cas du tube de celui de l'échelle. D'après l'expression (2.3), les autres états, de spin total $3/2$, sont plus hauts en énergie d'environ J_\perp . Utilisant la théorie des perturbations standard au premier ordre pour prendre en compte le couplage entre les triangles, on ne conserve que ces 4 états de basse énergie et le Hamiltonien effectif valable dans la limite $J_\parallel/J_\perp \rightarrow \infty$ s'écrit

$$H_{eff} = \frac{J_\parallel}{3} \sum_j [1 + \alpha(\tau_j^+ \tau_{j+1}^- + \tau_j^- \tau_{j+1}^+)] \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} \tag{2.5}$$

où \vec{S}_j est un opérateur de spin $1/2$ représentant le spin total du triangle j , $\alpha = 4$ et on a introduit les opérateurs de pseudo-spin $1/2$ $\vec{\tau}_j^\pm$ pour représenter la chiralité. Ces opérateurs échangent les chiralités L et R selon

$$\begin{aligned}
\tau^+ |\cdot L\rangle &= 0, & \tau^- |\cdot L\rangle &= |\cdot R\rangle, \\
\tau^+ |\cdot R\rangle &= |\cdot L\rangle, & \tau^- |\cdot R\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ce Hamiltonien a été étudié tant analytiquement que numériquement [20, 22] ainsi que d'autres versions légèrement différentes (couplages diagonaux par exemple [23]). Les principales propriétés sont les suivantes. Ce modèle possède un gap de spin dans son spectre d'excitation, ce qui conduit à un plateau d'aimantation pour la valeur $m = 0$. Ce gap est dû à la dimérisation de l'état fondamental qui est alors dégénéré. En présence d'un champ magnétique, le Hamiltonien (2.5) est simplement modifié par un couplage Zeeman habituel entre les opérateurs \vec{S}_j et le champ. Pour un champ assez élevé, le gap se ferme et le système est décrit par un liquide de Luttinger à deux composantes, ce qui veut dire que le spin et la chiralité sont alors non-gappés [24]. Si on augmente encore le champ, on arrive finalement sur un plateau d'aimantation pour les spins physiques \vec{S} , tandis que le degré de liberté de chiralité reste non-gappé. Cela se comprend à partir de (2.5). Si on est sur un plateau, $\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1}$ peut être considéré comme fixé pour toutes les paires de voisins. Il reste alors pour la chiralité un modèle XY , qui possède des excitations sans gap puisqu'il est équivalent à un système de fermions libres par transformation de Jordan-Wigner [25].

Enfin, bien que ceci concerne le cas du tube de spins $S = 1/2$, le Hamiltonien effectif reste en fait valable tant que l'on a des spins demi-entiers. En effet, dans ce cas-là il existe toujours 4 états de basse énergie labellés par le spin $1/2$ du triangle et une chiralité L ou R . La seule modification vient de la valeur de α , qui va croître avec S . Nous avons déterminé sa valeur pour le tube $S = 3/2$ et nous trouvons $\alpha = 16$ ($\alpha = (2S + 1)^2$ plus généralement).

3 Approche par l'intégrale de chemin

Cette section est consacrée à une approche analytique du spintube sous champ magnétique. Basée sur une méthode d'intégrale de chemin que nous présentons dans un premier temps, nous utilisons une approche semi-classique pour discuter la présence ou non de plateaux d'aimantation. Nous montrons notamment que cette méthode permet de retrouver une condition bien connue sur les valeurs d'aimantation admettant des plateaux. Nous traitons également le modèle effectif dérivé en couplage faible entre les triangles.

3.1 Intégrale de chemin pour les systèmes de spins et phase de Berry

Avant de traiter le cas de la chaîne de spins puis du spintube, nous décrivons ici l'approche par intégrale de chemin des systèmes de spins et le terme important de phase de Berry qui va apparaître. La présentation faite ici est basée sur celle du livre de Fradkin [26].

On considère un système sur réseau contenant un ensemble $\{S_i\}$ de spins, indexés par leur indice de site i , et décrit par un Hamiltonien $H(\{S_i\})$. Il n'est pour l'instant pas nécessaire de faire plus d'hypothèses, que ce soit sur

la géométrie du système, sa dimensionnalité ou la forme du Hamiltonien. Plutôt que de travailler avec les états de spins habituels états propres de S^z , on se place dans la base des états cohérents de spins [27], définis par

$$|\vec{n}\rangle = e^{i\theta(\frac{\hat{z} \times \vec{n}}{|\vec{z} \times \vec{n}|}) \cdot \vec{S}} |S, S\rangle, \quad (3.1)$$

où \vec{n} est un vecteur unité formant un angle θ avec l'axe de quantification z et $|S, S\rangle$ l'état de plus haut poids de l'espace de Hilbert de taille $2S + 1$ d'un spin S . Autrement dit, on applique une rotation à l'état complètement polarisé. Les propriétés de ces états cohérents sont présentées dans l'annexe A.

Considérons tout d'abord le cas d'un seul spin S . On souhaite calculer la fonction de partition du système, vue comme l'opérateur d'évolution en temps imaginaire $t = -i\tau$ pour $\tau = \beta$ et des conditions aux bords périodiques $|\vec{n}(0)\rangle = |\vec{n}(\beta)\rangle$:

$$Z = \text{Tr}\{e^{-\beta H}\}. \quad (3.2)$$

Suivant la procédure habituelle pour l'intégrale de chemin, on décompose l'évolution en temps imaginaire en N intervalles infinitésimaux de longueur $\delta\tau$, pour $N \rightarrow \infty$, $\delta\tau \rightarrow 0$ et $N\delta\tau = \beta$. On a alors l'égalité suivante par la formule de Trotter

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}\{(e^{-\delta\tau H})^N\}. \quad (3.3)$$

En insérant l'opérateur identité des états cohérents de spin à chaque étape de temps, on obtient

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2S+1}{4\pi} \right)^N \left(\prod_{j=1}^N \int d^3\vec{n}_j \delta(\vec{n}_j^2 - 1) \langle \vec{n}(\tau_{j+1}) | e^{-\delta\tau H} | \vec{n}(\tau_j) \rangle \right), \quad (3.4)$$

où l'intégrale contrainte par le δ de Dirac correspond simplement à l'intégrale sur les composantes d'un vecteur $3D$ unitaire. Comme $\delta\tau$ est petit, on peut conserver uniquement les termes d'ordre 1 dans l'expression de la valeur moyenne du Hamiltonien, ce qui donne

$$\langle \vec{n}(\tau_{j+1}) | e^{-\delta\tau H} | \vec{n}(\tau_j) \rangle = \langle \vec{n}(\tau_{j+1}) | \vec{n}(\tau_j) \rangle - \delta\tau \langle \vec{n}(\tau_j) | H | \vec{n}(\tau_j) \rangle + \mathcal{O}(\delta\tau^2). \quad (3.5)$$

En définissant la mesure d'intégration

$$\int \mathcal{D}\vec{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2S+1}{4\pi} \right)^N \left(\prod_{j=1}^N \int d^3\vec{n}_j \delta(\vec{n}_j^2 - 1) \right), \quad (3.6)$$

on obtient pour la fonction de partition

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{n} e^{-S[\vec{n}]}. \quad (3.7)$$

Calculer la fonction de partition consiste donc à intégrer sur toutes les trajectoires périodiques en temps imaginaire du vecteur unitaire $\vec{n}(\tau)$. Utilisant les propriétés des états cohérents, l'action s'écrit

$$S[\vec{n}] = -iS \sum_{j=1}^N \Phi(\vec{n}(\tau_j), \vec{n}(\tau_{j+1}), \hat{z}) - S \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{1 + \vec{n}(\tau_j) \cdot \vec{n}(\tau_{j+1})}{2} \right) + \delta\tau \sum_{j=1}^N \langle \vec{n}(\tau_j) | H | \vec{n}(\tau_j) \rangle. \quad (3.8)$$

Elle contient trois termes distincts. Le deuxième est en fait d'ordre $\delta\tau^2$ et peut donc être ignoré. Le dernier est simplement la valeur moyenne du Hamiltonien à temps égaux et dépend ainsi du système considéré. Le premier terme nécessite une plus grande attention. $\Phi(\vec{n}(\tau_j), \vec{n}(\tau_{j+1}), \hat{z})$ représente l'aire du triangle sphérique de sommets $\vec{n}(\tau_j)$, $\vec{n}(\tau_{j+1})$ et \hat{z} (ou bien l'angle solide vu depuis l'origine), et on a donc un terme de phase. Cela signifie que dans le calcul de la fonction de partition, on intègre sur des chemins de poids complexe $e^{i\mathcal{A}[\vec{n}]}$, où $\mathcal{A}[\vec{n}]$ est défini par

$$\mathcal{A}[\vec{n}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \Phi(\vec{n}(\tau_j), \vec{n}(\tau_{j+1}), \hat{z}). \quad (3.9)$$

Puisqu'on travaille avec des conditions aux bords périodiques en temps imaginaire, cette somme des aires élémentaires décrit simplement l'aire totale (ou l'angle solide) délimitée par le chemin fermé que forme $\vec{n}(\tau)$ au cours de son évolution (Figure 3). Une phase de ce type, qui apparaît également dans d'autres contextes, est appelé phase de Berry (BP) et on verra par la suite qu'elle joue un rôle crucial. On peut noter au passage que le fait que l'angle solide soit défini à 4π près n'a pas de conséquence sur la fonction de partition (et donc pas de conséquences physiques) puisqu'il vient alors un facteur $e^{4i\pi S} = 1$, S étant entier ou demi-entier. On peut finalement écrire l'action dans la limite continue en temps imaginaire comme la somme de deux termes

$$S[\vec{n}] = -iS\mathcal{A}[\vec{n}(\tau)] + \int_0^\beta d\tau \langle \vec{n}(\tau) | H | \vec{n}(\tau) \rangle = S_{BP}[\vec{n}] + S_H[\vec{n}]. \quad (3.10)$$

L'extension de ce problème à un spin au cas d'un système d'un nombre arbitraire de spins $\{S_j\}$ est immédiat. Les phases de Berry vont se sommer indépendamment pour chaque spin, et l'état du système à un instant τ est simplement écrit comme le produit tensoriel des états cohérents de spins en chaque site. On doit donc seulement faire les changements

$$\begin{cases} \mathcal{A}[\vec{n}(\tau)] \rightarrow \sum_j \mathcal{A}[\vec{n}_j(\tau)] \\ |\vec{n}(\tau)\rangle \rightarrow |\{\vec{n}_j(\tau)\}\rangle = \bigotimes_j |\vec{n}_j(\tau)\rangle. \end{cases} \quad (3.11)$$

L'équation (3.10) avec les modifications (3.11) constitue le point de départ de l'étude par l'intégrale de chemin d'un système de spins, comme par exemple la chaîne de spins ou dans notre cas le spintube.

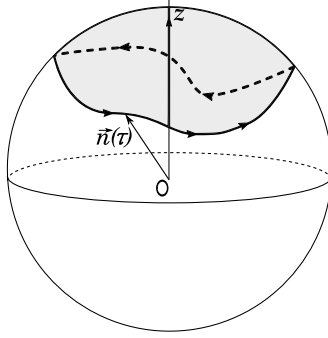


FIGURE 3 – Trajectoire fermée décrite par le vecteur unitaire \vec{n} au cours de son évolution en temps imaginaire. L'aire qu'elle délimite n'est pas uniquement définie, il est possible de prendre soit l'aire grisée soit celle laissée blanche, la somme des deux valant 4π .

3.2 Un exemple simple : la chaîne de spins sous champ magnétique

Nous allons utiliser ici la méthode présentée dans la section précédente au cas le plus simple, la chaîne de spins de Heisenberg en présence d'un champ magnétique, sur le modèle de l'article publié récemment par Tanaka, Totsuka et Hu [2]. Nous allons notamment montrer que cette approche permet d'étudier le processus de magnétisation de la chaîne et de retrouver la condition de OYA (1.4). Le Hamiltonien du système s'écrit

$$H = J \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} - h \sum_j S_j^z, \quad (3.12)$$

où les \vec{S}_j sont les opérateurs de spins $\vec{S}_j^2 = S(S+1)$. L'interaction entre spins est antiferromagnétique ($J > 0$) et h est le champ magnétique orienté suivant l'axe z . Utilisant la propriété $\langle \vec{n} | \vec{S} | \vec{n} \rangle = S\vec{n}$ des états cohérents, l'action en temps imaginaire s'écrit

$$S[\{\vec{n}_j\}] = -iS \sum_j \mathcal{A}[\vec{n}_j(\tau)] + \sum_j \int_0^\beta d\tau \{JS^2 \vec{n}_j(\tau) \cdot \vec{n}_{j+1}(\tau) - hS n_j^z(\tau)\}, \quad (3.13)$$

où on remarque que le second terme représente simplement l'intégrale en temps imaginaire du Hamiltonien classique.

On souhaite maintenant obtenir une théorie de basse énergie. Suivant Tanaka et al., la démarche est de déterminer dans un premier temps les \vec{n}_j correspondant à la configuration de plus basse énergie de la chaîne (ou de tout autre système plus généralement) dans la limite classique de S grand, où les spins sont décrits par des vecteurs. Ensuite, l'ajout des fluctuations quantiques permet de dériver une action décrivant les propriétés de basse énergie du système.

En l'absence de champ magnétique, la configuration classique de la chaîne de spins correspond à l'ordre de Néel $\vec{S}_j = S(-1)^j \vec{n}$ où le vecteur \vec{n} est de direction arbitraire. Si l'on rajoute un champ magnétique et que l'on se place à une valeur inférieure à la valeur de saturation, les spins se polarisent partiellement et l'état fondamental est alors donné par $\vec{S}_j = S\vec{n}_j$ avec

$$\vec{n}_j = \begin{pmatrix} (-1)^j \sin(\theta_0) \cos(\varphi_0) \\ (-1)^j \sin(\theta_0) \sin(\varphi_0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

comme montré sur la Figure 4, où $\cos(\theta_0) = \frac{h}{4SJ}$ est l'angle qui minimise classiquement l'énergie. L'angle φ_0 est lui arbitraire et peut donc être pris nul. Cette liberté de choix reflète la symétrie de rotation autour de l'axe du champ. On définit l'aimantation classique par spin $m = S\cos(\theta_0)$.

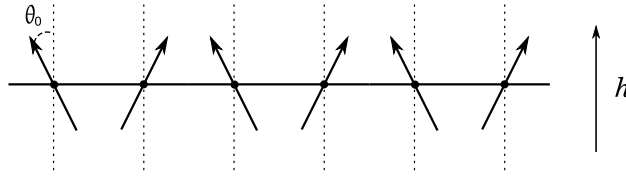


FIGURE 4 – Configuration classique pour la chaîne de spins du modèle de Heisenberg en présence d'un champ magnétique h .

On rajoute alors les fluctuations en permettant aux angles de s'écarter légèrement de leurs valeurs d'équilibre. Cela se traduit par

$$\begin{cases} \theta_0 \rightarrow \theta_j = \theta_0 + \delta\theta_j \\ \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_j. \end{cases} \quad (3.15)$$

On peut alors écrire en développant l'ordre 2 en $\delta\theta_j$ que

$$\begin{cases} n_j^\pm = n_j^x \pm in_j^y \approx (-1)^j e^{\pm i\varphi_j} \left[\sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\delta\theta_j - \frac{1}{2}\sin(\theta_0)\delta\theta_j^2 \right] \\ n_j^z \approx \cos(\theta_0) - \sin(\theta_0)\delta\theta_j - \frac{1}{2}\cos(\theta_0)\delta\theta_j^2. \end{cases} \quad (3.16)$$

Jusque là, on n'a fait qu'introduire des fluctuations qui n'ont pas de caractère quantique. Cependant, si on calcule les crochets de Poisson et qu'on impose $\{S^z, S^\pm\}_{\varphi, \delta\theta} = \mp iS^\pm$, cela conduit à définir

$$\Pi_j = -S \left[\sin(\theta_0)\delta\theta_j + \frac{1}{2}\cos(\theta_0)\delta\theta_j^2 \right] \quad (3.17)$$

comme le moment conjugué de φ_j ($\{\varphi_i, \Pi_j\} = \delta_{ij}$). On obtient de cette manière les bonnes relations de commutation pour les opérateurs de spins et les Π_j et φ_j apparaissent donc bien comme des fluctuations quantiques.

En inversant la relation entre Π et $\delta\theta$ et en ne conservant que les termes jusqu'à l'ordre 2 en Π , on arrive aux expressions suivantes pour les composantes de \vec{n}

$$\begin{cases} n_j^\pm \approx (-1)^j e^{\pm i\varphi_j} \left[\sin(\theta_0) - \frac{m}{S^2 \sin(\theta_0)} \Pi_j - \frac{1}{2} \frac{S^2}{S^2 - m^2} \frac{1}{S^2 \sin(\theta_0)} \Pi_j^2 \right] \\ n_j^z \approx \cos(\theta_0) + \frac{\Pi_j}{S}. \end{cases} \quad (3.18)$$

La seconde équation nous permet de voir que Π décrit les fluctuations de la colatitude autour de l'aimantation moyenne m . Ce développement diverge si $m = S$, c'est-à-dire si on part d'une solution classique complètement polarisée. Autrement dit, l'approche que l'on effectue ne sera valable que pour des champs h inférieurs au champ de saturation.

On reporte ensuite ces expressions dans le second terme de l'action (3.13), et on obtient, après passage à la limite du continu, l'expression de l'action correspondant au Hamiltonien

$$S_H[\Pi, \varphi] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2} J a (S^2 - m^2) (\partial_x \varphi(\tau, x))^2 + 2 J a \Pi^2(\tau, x) \right\} \quad (3.19)$$

où a est la maille du réseau. L'absence de termes d'ordre 1 s'explique par le fait que l'on travaille autour d'une solution d'énergie minimale (équilibre), et que donc les termes linéaires s'annulent au cours du développement. C'est aussi ce qui explique l'absence d'un terme directement proportionnel à h , comme on pourrait peut-être s'y attendre vu la forme initiale du Hamiltonien, puisque d'après les développements (3.18) la présence du champ n'introduit qu'une constante et un terme linéaire en Π . La présence de h se retrouve à travers l'expression de θ_0 .

Pour le terme de la phase de Berry, on doit exprimer l'angle solide décrit par le vecteur \vec{n} pendant son évolution en temps imaginaire. Cela donne en coordonnées sphériques

$$S_{BP}[\{\delta\theta_j\}, \{\varphi_j\}] = iS \sum_j \int d\tau \int_0^{\theta_j} d\omega_j \sin(\omega_j) \partial_\tau \varphi_j(\tau) = iS \sum_j \int d\tau [1 - \cos(\theta_0 + \delta\theta_j(\tau))] \partial_\tau \varphi_j(\tau). \quad (3.20)$$

En développant le cosinus jusqu'au deuxième ordre en $\delta\theta$, en réécrivant cette expression en fonction des variables conjuguées Π et en passant à la limite continue, l'action pour la phase de Berry s'écrit

$$S_{BP}[\Pi, \varphi] = i \int d\tau \int dx \left\{ \left(\frac{S - m}{a} \right) \partial_\tau \varphi(\tau, x) - \Pi(\tau, x) \partial_\tau \varphi(\tau, x) \right\}. \quad (3.21)$$

Il est important de faire la remarque suivante. Puisque l'on travaille avec des conditions aux limites périodiques sur le temps imaginaire, on pourrait penser que l'intégrale sur τ du premier terme dans (3.21), qui est une dérivée, donnera toujours une contribution nulle puisque $\varphi(0) = \varphi(\beta)$. Mais φ est une variable angulaire, donc définie à 2π près. Ainsi, lorsque dans le calcul de la fonction de partition on va intégrer sur toutes les trajectoires périodiques, certaines vont correspondre à plusieurs tours du vecteur \vec{n} et l'intégration du $\partial_\tau \varphi$ donnera $2\pi q$. Si $q \neq 0$, on dira qu'il y a un vortex de charge q à l'intérieur du contour fermé. On va voir dans ce qui suit que de telles configurations vont jouer un rôle important, et ce terme de dérivée ne peut pas être ignoré.

En rassemblant les deux morceaux, l'action décrivant les propriétés de basse énergie de la chaîne de spin s'écrit

$$S[\Pi, \varphi] = \int d\tau \int dx \left\{ 2Ja\Pi^2(\tau, x) - i\Pi(\tau, x)\partial_\tau \varphi(\tau, x) + \frac{1}{2}Ja(S^2 - m^2)(\partial_x \varphi(\tau, x))^2 + i\left(\frac{S-m}{a}\right)\partial_\tau \varphi(\tau, x) \right\}. \quad (3.22)$$

Comme l'action est gaussienne dans le champ Π , on peut l'intégrer dans la fonction de partition, ce qui mène à l'action effective

$$S_{eff}[\varphi] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2}\lambda_\tau(\partial_\tau \varphi)^2 + \frac{1}{2}\lambda_x(\partial_x \varphi)^2 + i\left(\frac{S-m}{a}\right)\partial_\tau \varphi \right\}, \quad (3.23)$$

où on a défini les constantes

$$\lambda_\tau = \frac{1}{4aJ}, \quad \lambda_x = aJ(S^2 - m^2). \quad (3.24)$$

Une simple redéfinition de τ permet de voir que l'on a obtenu une action effective composée d'un terme gaussien et du terme de dérivée, qui compte combien le champ φ va faire de tours du cercle sur lequel il est défini au cours de son évolution. Comme dit précédemment, c'est ce terme topologique qui, une fois pris correctement en compte, va déterminer le comportement à basse énergie du système, la partie gaussienne étant triviale.

Pour comprendre son rôle, il est utile d'effectuer une transformation de dualité [28] sur l'action effective (3.23). Les détails sont donnés dans l'annexe B. Une fois la transformation faite, nous arrivons à l'action finale

$$S_{eff}[\tilde{\psi}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2}K(\vec{\nabla}\tilde{\psi})^2 + g_1 \cos\left(2\pi\left[\tilde{\psi} + \frac{S-m}{a}x\right]\right) \right\}, \quad (3.25)$$

où $K = 1/\sqrt{\lambda_\tau \lambda_x}$, $\vec{\nabla} = (\partial_\tau, \partial_x)$ et g_1 est une constante dont la valeur n'a pas d'importance puisqu'elle ne joue pas de rôle dans l'analyse de ce terme par le groupe de renormalisation.

Cette forme de l'action va nous permettre de comprendre des propriétés de basse énergie de la chaîne de spins. Avant de l'analyser plus précisément, on peut faire deux remarques. Tout d'abord, cette action est identique à celle obtenue par bosonisation [19]. Cependant, la bosonisation est restreinte aux spins 1/2, tandis qu'ici nous n'avons à aucun moment dû restreindre les valeurs possibles de S . Il ne faut cependant pas oublier que notre point de départ étant classique, cette méthode est mieux adaptée aux grands spins. On peut aussi noter que malgré le passage au continu et les transformations successives, on garde une trace du fait que le modèle de départ est défini sur un réseau avec la présence de la constante du réseau a .

On a obtenu une action effective constituée d'un terme gaussien et d'une perturbation par un terme en cosinus. Il s'agit en fait de l'action du modèle de sine-Gordon [29] en (1+1) dimension, avec le terme de phase de Berry qui se traduit par une modulation spatiale $2\pi(S-m)x/a$ dans le cosinus. On voit que si $(S-m) \notin \mathbb{Z}$, ce cosinus disparaît lors de l'intégration le long de la chaîne par interférences destructives (initialement on a $x = na$!). Il reste alors un modèle gaussien sans masse, les excitations magnétiques sont non-gappées et il n'y aura pas de plateaux d'aimantation.

Par contre, si

$$(S-m) \in \mathbb{Z}, \quad (3.26)$$

on retrouve le modèle « simple » de sine-Gordon, et on sait qu'un gap peut s'ouvrir [29], et ainsi conduire à des plateaux dans la courbe d'aimantation. Par exemple, on s'attend pour des spins $S = 3/2$ à pouvoir en observer pour une aimantation moyenne de 1/2 par spin, c'est-à-dire à 1/3 de la valeur de saturation. Pour être plus précis, l'analyse par le groupe de renormalisation [30] de la perturbation en cosinus nous dit que sa simple présence n'est pas suffisante pour créer un gap dans le spectre de basse énergie. Il faut pour cela que la dimension de cet opérateur soit inférieure à 2. Utilisant la référence [29], on arrive pour sa dimension Δ à

$$\Delta = \frac{\pi}{K} = \frac{\pi}{2}\sqrt{(S^2 - m^2)}. \quad (3.27)$$

Il ne faut cependant pas accorder trop d'importance à cette valeur. En effet, les paramètres utilisés ici pour la calculer ne sont pas ceux d'un modèle microscopique défini originellement sur un réseau, mais sont obtenus après

passage au continu et intégration de certains degrés de liberté. C'est vrai de manière générale pour les théories des champs. Il faut voir les valeurs calculées comme des indications qualitatives.

En utilisant une méthode d'intégrale de chemin, on est donc arrivé à la même condition obtenue par OYA, qui prédit que des plateaux d'aimantation ne peuvent exister qu'à certaines valeurs bien précises, cette condition étant elle-même une extension du théorème LSM.

3.3 Application au spintube

Le formalisme détaillé dans la section précédente peut être utilisé pour étudier des modèles de spins plus compliqués, comme le tube de spins, système intermédiaire entre une et deux dimensions que nous avons décrit dans la Section 2. Nous allons appliquer cette méthode au Hamiltonien (2.1).

De la même façon que pour la chaîne de spins, la première étape est de déterminer quelle est la configuration classique de basse énergie. Pour comprendre quelle va être cette configuration, on peut partir d'une limite bien connue. On a vu en effet que dans le cas de triangles découplés sans champ magnétique, le Hamiltonien du système s'exprime comme le carré du spin total (Cf. équation 2.3). En dérivant, il vient la condition d'énergie minimale $\vec{S} = \vec{0}$. Elle est remplie en mettant les 3 spins dans le même plan, avec des angles de 120° entre eux.

Sous un champ magnétique \vec{h} , le Hamiltonien s'exprime toujours en fonction du spin total, et on arrive à la condition $\vec{S} = \vec{h}$ pour minimiser l'énergie. Plusieurs configurations dégénérées sont alors possibles (Figure 5). Une d'entre elles est la configuration « parapluie » où les trois spins forment le même angle par rapport à l'axe du champ, et leurs projections dans le plan perpendiculaire au champ sont à 120° les unes des autres. Cette solution existe jusqu'à la saturation. Une autre classe de solutions va dépendre du champ. A bas champ, on a une disposition en Y : un spin est anti-aligné par rapport au champ et les deux autres partiellement polarisés. Cette solution existe jusqu'à $h = 3J_{\parallel}$ où deux spins sont complètement polarisés et un anti-aligné. Pour des champs plus élevés et jusqu'à la saturation, les trois spins sont partiellement polarisés, deux d'entre eux formant le même angle avec l'axe du champ. Lorsqu'on rajoute le couplage longitudinal, un calcul sur deux triangles permet de se convaincre que la configuration sélectionnée va être celle du « parapluie ». La configuration classique montre alors une périodicité de deux triangles, avec une rotation des trois spins de π autour du champ d'un triangle à l'autre pour satisfaire au maximum le couplage J_{\parallel} . Nous pouvons ainsi écrire la solution classique comme

$$\vec{S}_{\alpha,j} = S \begin{pmatrix} (-1)^j \sin(\theta_0) \cos(\varphi_{\alpha}^0) \\ (-1)^j \sin(\theta_0) \sin(\varphi_{\alpha}^0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

où $\cos(\theta_0) = \frac{h}{S(3J_{\perp} + 4J_{\parallel})}$ et $\varphi_{\alpha}^0 = (\alpha - 1)2\pi/3$. Nous retrouvons bien la symétrie de rotation autour de l'axe du champ.

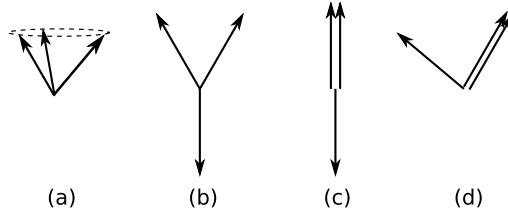


FIGURE 5 – Configurations classiques pour des spins sur un triangle en présence d'un champ magnétique h . La configuration « parapluie » (a) est en compétition avec les configurations (b), (c) et (d) qui se succèdent lorsqu'on augmente la valeur du champ. Lorsque l'on couple les triangles, la configuration de basse énergie va être celle de type « parapluie ».

Une fois la configuration classique de basse énergie déterminée, nous procédons comme précédemment en rajoutant les fluctuations quantiques. Nous paramétrisons les petites déviations à l'équilibre par $\delta\theta_{\alpha,j}$ et $\varphi_{\alpha,j}$ en écrivant

$$\begin{cases} \theta_0 \rightarrow \theta_{\alpha,j} = \theta_0 + \delta\theta_{\alpha,j} \\ (\alpha - 1)\frac{2\pi}{3} \rightarrow (\alpha - 1)\frac{2\pi}{3} + \varphi_{\alpha,j}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Le calcul des crochets de Poisson ne présente pas de différence avec celui de la chaîne (on a simplement rajouté des constantes à l'angle φ), et nous arrivons donc aux mêmes développements que dans l'équation (3.18), avec

simplement l'introduction des angles $(\alpha - 1)2\pi/3$. Nous trouvons

$$\begin{cases} n_{\alpha,j}^{\pm} \approx (-1)^j e^{\pm i[(\alpha-1)\frac{2\pi}{3} + \varphi_{\alpha,j}]} \left[\sin(\theta_0) - \frac{m}{S^2 \sin(\theta_0)} \Pi_{\alpha,j} - \frac{1}{2} \frac{S^2}{S^2 - m^2} \frac{1}{S^2 \sin(\theta_0)} \Pi_{\alpha,j}^2 \right] \\ n_{\alpha,j}^z \approx \cos(\theta_0) + \frac{\Pi_{\alpha,j}}{S}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Puis il faut ré-exprimer le Hamiltonien en fonction de ces nouvelles variables. La partie H_{\parallel} correspond simplement à 3 chaînes découplées, problème déjà traité dans la section précédente. Cela donne ainsi, après oubli des constantes et des termes de bords,

$$H_{\parallel} = J_{\parallel} \sum_{\alpha=1,2,3} \int dx \left\{ \frac{1}{2} a (S^2 - m^2) (\partial_x \varphi_{\alpha})^2 + 2a \Pi_{\alpha}^2 + 4m \Pi_{\alpha} \right\} \quad (3.31)$$

avec toujours $m = S \cos(\theta_0)$. Nous procédons de la même manière pour les termes H_{\perp} et H_h . Nous conservons les termes jusqu'à l'ordre 2 en Π et φ puis passons à la limite continue, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} H_{\perp} = J_{\perp} \int dx \left\{ \frac{1}{4} \frac{S^2 - m^2}{a} [(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2] + \frac{1}{2} a \frac{S^2}{S^2 - m^2} (\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2) \right. \\ \left. + a \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right) (\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_3 \Pi_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} m [\varphi_1 (\Pi_2 - \Pi_3) + \varphi_2 (\Pi_3 - \Pi_1) + \varphi_3 (\Pi_1 - \Pi_2)] \right. \\ \left. + 3m (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3) \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

et

$$H_h = -h \sum_{\alpha=1,2,3} \int dx \Pi_{\alpha}. \quad (3.33)$$

Nous voyons sur l'équation (3.32) que le Hamiltonien d'interaction entre les chaînes couple les champs φ et Π , c'est-à-dire les fluctuations transverses au champ et les fluctuations longitudinales (variation de la colatitude), contrairement au cas de la chaîne isolée où elles sont découplées. En rassemblant les trois parties, les termes linéaires s'annulent de par la condition d'équilibre et en intégrant sur le temps imaginaire nous arrivons à l'action du Hamiltonien

$$\begin{aligned} S_H[\{\Pi_{\alpha}\}, \{\varphi_{\alpha}\}] = \int d\tau \int dx \left\{ \sum_{\alpha=1,2,3} \left[\frac{1}{2} a J_{\parallel} (S^2 - m^2) (\partial_x \varphi_{\alpha})^2 + a \left(2J_{\parallel} + \frac{1}{2} J_{\perp} \frac{S^2}{S^2 - m^2} \right) \Pi_{\alpha}^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} J_{\perp} \frac{S^2 - m^2}{a} [(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2 + (\varphi_2 - \varphi_3)^2] \right. \\ \left. + a J_{\perp} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right) (\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_3 \Pi_1) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} m J_{\perp} [\Pi_1 (\varphi_3 - \varphi_2) + \Pi_2 (\varphi_1 - \varphi_3) + \Pi_3 (\varphi_2 - \varphi_1)] \right\}. \quad (3.34) \end{aligned}$$

Pour la contribution venant de la phase de Berry, le fait d'avoir couplé les 3 chaînes n'apporte pas de changement, et l'action est simplement la somme des actions pour chaque chaîne

$$S_{BP}[\{\Pi_{\alpha}\}, \{\varphi_{\alpha}\}] = i \sum_{\alpha=1,2,3} \int d\tau \int dx \left\{ \left(\frac{S - m}{a} \right) \partial_{\tau} \varphi_{\alpha} - \Pi_{\alpha} \partial_{\tau} \varphi_{\alpha} \right\}. \quad (3.35)$$

Dans l'action totale $S = S_H + S_{BP}$, l'intégrale sur les champs Π_{α} est gaussienne. Cependant, la forme de l'action suggère avant d'intégrer de faire la transformation $\vec{\phi} = U \vec{\varphi}$, où

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_s \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_s \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

En fait, cette transformation est la version orthogonalisée de la transformation où nous aurions (par exemple)

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

c'est-à-dire que nous nous donnons une combinaison symétrique des 3 champs $\varphi_{1,2,2}$ pour donner le champ ϕ_s , puis on choisit deux des trois possibilités de définir deux nouveaux champs comme combinaisons antisymétriques de deux champs φ . Avec ce changement de variables, l'action se réécrit

$$\begin{aligned}
S_H[\{\Pi_\alpha\}, \{\phi_\alpha\}] = & \int d\tau \int dx \left\{ \sum_{\alpha=1,2,s} \left[\frac{1}{2} a J_{\parallel} (S^2 - m^2) (\partial_x \phi_\alpha)^2 + a \left(2J_{\parallel} + \frac{1}{2} J_{\perp} \frac{S^2}{S^2 - m^2} \right) \Pi_\alpha^2 \right] \right. \\
& + \frac{3}{4} J_{\perp} \frac{S^2 - m^2}{a} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + i \frac{S - m}{a} \sqrt{3} \partial_\tau \phi_s \\
& + a J_{\perp} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right) (\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_2 \Pi_3 + \Pi_2 \Pi_3) \\
& - \frac{\sqrt{3}}{2} m J_{\perp} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \Pi_1 (\phi_1 - \sqrt{3} \phi_2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Pi_2 (\phi_1 + \sqrt{3} \phi_2) + \sqrt{2} \Pi_3 \phi_1 \right] \\
& - i \left[\Pi_1 \partial_\tau \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_s \right) + \Pi_2 \partial_\tau \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_s \right) \right. \\
& \left. + \Pi_3 \partial_\tau \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_s \right) \right] \left. \right\}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Ceci nous permet déjà d'avoir une idée de ce qui va se passer. Nous voyons que les champs ϕ_1 et ϕ_2 ont un terme de masse mais pas le champ ϕ_s . Cela se comprend en rappelant que les angles φ sont reliés à des fluctuations autour de l'axe du champ. Or, dans la configuration classique « parapluie », il est évident que faire fluctuer différemment deux des vecteurs, ce qui correspond à avoir ϕ_1 et ϕ_2 non-nuls, a un coût en énergie. Par contre, si toutes les fluctuations sont les mêmes sur chaque barreau il n'y a pas de pénalité sur l'énergie (encore l'invariance par rotation autour de l'axe du champ), et c'est pour cela que cette transformation n'entraîne pas de terme de masse pour le champ symétrique ϕ_s . Nous notons aussi que le terme de Berry en $i\partial_\tau \phi$ ne va concerner que le champ symétrique.

Après intégration gaussienne sur les champs Π , nous obtenons l'action effective

$$\begin{aligned}
S_H[\{\phi_\alpha\}] = & \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2} \lambda_\tau^{(1,2)} [(\partial_\tau \phi_1)^2 + (\partial_\tau \phi_2)^2] + \frac{1}{2} \lambda_x^{(1,2)} [(\partial_x \phi_1)^2 + (\partial_x \phi_2)^2] \right. \\
& + M^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - i\mu (\phi_1 \partial_\tau \phi_2 - \phi_2 \partial_\tau \phi_1) \\
& \left. + \frac{1}{2} \lambda_\tau^{(s)} (\partial_\tau \phi_s)^2 + \frac{1}{2} \lambda_x^{(s)} (\partial_x \phi_s)^2 + i \frac{S - m}{a} \sqrt{3} \partial_\tau \phi_s \right\}, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

avec les constantes

$$\begin{aligned}
\lambda_\tau^{(1,2)} &= \frac{1}{a \left(4J_{\parallel} + \frac{3}{2} J_{\perp} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right)}, \quad \lambda_\tau^{(s)} = \frac{1}{a (4J_{\parallel} + 3J_{\perp})}, \\
\lambda_x^{(1,2)} &= \lambda_x^{(s)} = a J_{\parallel} (S^2 - m^2), \quad M^2 = 3J_{\parallel} J_{\perp} \frac{S^2 - m^2}{a \left(4J_{\parallel} + \frac{3}{2} J_{\perp} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right)}, \\
\mu &= \frac{3}{2} J_{\perp} \frac{m}{a \left(4J_{\parallel} + \frac{3}{2} J_{\perp} \frac{m^2}{S^2 - m^2} \right)}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Dans cette action, les trois champs sont découplés. Deux d'entre eux sont massifs (ϕ_1 et ϕ_2) et vont donc correspondre à des excitations de hautes énergies. On peut intégrer ces champs qui ne contribuent pas aux propriétés de basse énergie. Le troisième champ ϕ_s a lui une action de la même forme que dans le cas de la chaîne de spins, comme on le voit en comparant à l'équation (3.23). Cependant, il faut redéfinir le champ symétrique par $\phi_s \rightarrow \phi_s / \sqrt{3}$. En effet, de par sa définition et le fait qu'on se place en $\phi_1 = \phi_2 = 0$, le champ ϕ_s n'a pas la périodicité de 2π d'un champ angulaire mais plutôt de $2\pi\sqrt{3}$. Cette redéfinition nous permet de retrouver la bonne périodicité.

Finalement, en suivant les mêmes étapes que dans la section sur la chaîne de spins pour la transformation de dualité, nous arrivons au final à l'action pour le champ symétrique

$$S_{eff}[\tilde{\psi}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2} K (\vec{\nabla} \tilde{\psi})^2 + g_1 \cos \left(2\pi \left[\tilde{\psi} + 3 \frac{S - m}{a} x \right] \right) \right\}, \tag{3.41}$$

où $K = 1/\sqrt{9\lambda_\tau^{(s)}\lambda_x^{(s)}}$. Les deux seules différences avec l'action de la chaîne viennent de l'expression de la raideur K et surtout du facteur 3 présent maintenant dans la modulation du cosinus. La discussion faite pour la chaîne reste valable, excepté que les valeurs auxquelles peuvent apparaître des plateaux sont maintenant données par

$$3(S - m) \in \mathbb{Z}. \tag{3.42}$$

La redéfinition de ϕ_s juste au-dessus n'est donc pas anodine, puisqu'elle influe directement sur ce résultat. Elle est cependant totalement justifiée par la discussion sur la périodicité, la condition (3.42) n'est pas un artefact de la transformation (3.36). À titre d'exemple, pour le cas du spin $3/2$ que nous allons étudier numériquement par la suite, cela prévoit des plateaux pour des aimantations par spin $m = 1/6, 1/2, 5/6, 7/6$, ou encore $m = 1/9, 1/3, 5/9, 7/9$ de la saturation. Remarquons également que cette condition ne prévoit pas le plateau en $m = 0$ observé numériquement par DMRG [31].

D'autre part, on trouve pour la scaling dimension de la perturbation la valeur

$$\Delta = \frac{\pi}{K} = \pi \sqrt{\frac{3J_{\parallel}(S^2 - m^2)}{J_{\perp} \left(1 + \frac{4J_{\parallel}}{3J_{\perp}}\right)}}. \quad (3.43)$$

En traçant sur la Figure 6 cette expression pour le cas du spin $3/2$, nous voyons que l'on peut s'attendre à trouver des plateaux pour des valeurs de J_{\parallel}/J_{\perp} de l'ordre de 0, 1, c'est-à-dire dans le régime des triangles faiblement couplés. Ce n'est pas surprenant puisque nous savons qu'ils existent pour des triangles isolés, tandis que des chaînes découplées de spins demi-entiers sont, elles, sans gap.

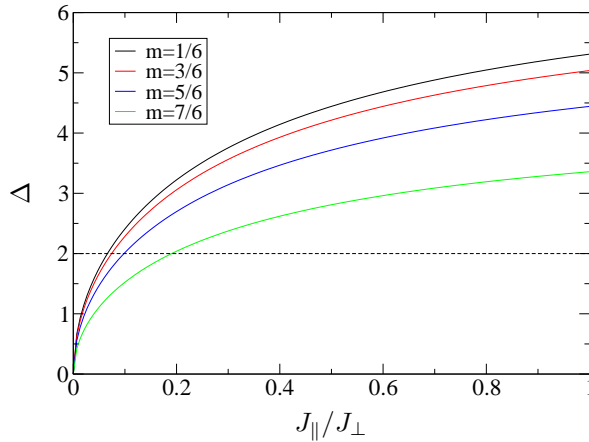


FIGURE 6 – Dimension de l'opérateur de perturbation en cosinus de l'action (3.41) en fonction de J_{\parallel}/J_{\perp} aux valeurs de m pouvant mener à un plateau. La perturbation est pertinente et ouvre un gap dans le spectre si $\Delta < 2$, et non-pertinente si $\Delta > 2$. Nous nous attendons à ce que les plateaux disparaissent pour $J_{\parallel}/J_{\perp} \gtrsim 0, 1$.

Enfin, il y a cependant un résultat connu que cette approche par intégrale de chemin ne permet pas de retrouver. Nous avons vu Section 2 que dans le régime de couplage faible entre les triangles, il sort de l'étude du modèle effectif qu'à la fois le mode de spin et le mode de chiralité sont non gappés. Or, nous trouvons bien ici le mode de spin non-gappé (sauf aux plateaux bien sûr), mais pas celui de chiralité. Comme nous l'avons dit sur l'action (3.39), les champs ϕ_1 et ϕ_2 sont massifs et ne peuvent pas rendre compte de ce comportement. Nous allons essayer de voir s'il est possible de retrouver ces modes non-gappés en partant directement du modèle effectif (2.5), valable uniquement à faible J_{\parallel}/J_{\perp} .

3.4 Application au modèle effectif en couplage faible

Nous appliquons ici la procédure d'intégrale de chemin au modèle effectif (2.5) présenté Section 2, valable pour les spins demi-entiers. La détermination de la solution classique se fait de la manière suivante : il faut maximiser le terme $1 + \alpha(\tau_j^+ \tau_{j+1}^- + \tau_j^- \tau_{j+1}^+)$ et minimiser le terme $\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1}$. Nous plaçons donc les pseudo-spins de chiralité $\vec{\tau}_j$ alignés dans le plan xy et les spins \vec{S}_j ont la même configuration que pour la chaîne (Cf. Figure 4). Nous écrivons ces solutions $\vec{S}_j = S\vec{n}_j$ et $\vec{\tau}_j = \tau\vec{u}_j$ avec

$$\vec{n}_j = ((-1)^j \sin\theta_0, 0, \cos\theta_0), \quad \vec{u}_j = (1, 0, 0), \quad (3.44)$$

où nous rappelons que $S = \tau = 1/2$ (un spin physique et un pseudo-spin), et $\cos(\theta_0) = \frac{h}{\frac{4}{3}J_{\parallel}S(1+2\alpha S^2)}$. Le détail du calcul est alors très semblable à celui de la chaîne de spins. Nous rajoutons les fluctuations quantiques, puis à partir des conditions sur les crochets de Poisson nous introduisons des champs Π et Ω , reliés respectivement aux fluctuations des spins et des pseudo-spins autour de leurs positions d'équilibre. Nous réécrivons ensuite le Hamiltonien en fonction de ces termes, retenant les termes jusqu'à l'ordre 2 pour les champs. Après passage au continu, intégration sur le

temps imaginaire et ajout de la contribution de la phase de Berry, nous obtenons l'action

$$S[\Pi, \varphi, \Omega, \beta] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{3} a J_{\parallel} \left(\frac{1}{2} + \alpha S^2 \right) (S^2 - m^2) (\partial_x \varphi)^2 + \frac{2}{3} a J_{\parallel} (1 + 2\alpha S^2) \Pi^2 + i \frac{S - m}{a} \partial_{\tau} \varphi - i \Pi \partial_{\tau} \varphi \right. \\ \left. + \frac{1}{3} a J_{\parallel} \alpha S^2 (S^2 - 2m^2) (\partial_x \beta)^2 + \frac{2}{3} a J_{\parallel} \alpha (S^2 - 2m^2) \Omega^2 + i \frac{S}{a} \partial_{\tau} \beta - i \Omega \partial_{\tau} \beta \right\}, \quad (3.45)$$

où les champs (Π, φ) sont associés au spin physique 1/2 et les champs (Ω, β) au pseudo-spin de chiralité.

Cette action nous permet de formuler quelques remarques. Tout d'abord, pour $\alpha = 0$ on retrouve bien le cas de la chaîne. Deuxièmement, il est important de garder à l'esprit que l'aimantation m qui apparaît dans cette expression n'est pas l'aimantation du problème de départ. C'est une aimantation reliée aux spins physiques 1/2 et elle est donc comprise entre 0 et 1/2. Nous nous sommes placé dans le cadre du modèle effectif, qui ne peut par construction décrire que le début de la courbe d'aimantation jusqu'au premier plateau ($m = 1/6$ pour le spin 3/2). De plus, s'il n'y a pas « d'aimantation » liée aux pseudo-spins, c'est que par construction de la solution classique elle est nulle. Enfin, ce résultat découple les variables de chiralité et de spins. C'était en fait prévisible, puisqu'on a grosso modo le produit de deux chaînes. L'une des deux ne contenant pas de termes d'ordre 1 (voir les développements (3.30) pour $m = 0$), le produit ne peut pas mélanger les champs des deux degrés de liberté si l'on s'arrête à l'ordre deux, d'où ce découplage.

A partir de cette dernière constatation, nous n'aurions qu'à faire l'intégration gaussienne sur chacune des chaînes puis la transformation de dualité. Cependant, pour le champ Ω des pseudo-spins l'intégration est possible uniquement si $S^2 > 2m^2$, c'est-à-dire $m^2 < 1/8$, valeur inférieure au maximum de m^2 qui vaut 1/4. Nous trouvons dans ce cas

$$S[\varphi, \beta] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\tau} (\partial_{\tau} \varphi)^2 + \frac{1}{2} \lambda_x (\partial_x \varphi)^2 + i \frac{S - m}{a} \partial_{\tau} \varphi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu_{\tau} (\partial_{\tau} \beta)^2 + \frac{1}{2} \mu_x (\partial_x \beta)^2 + i \frac{S - m}{a} \partial_{\tau} \beta \right\}, \quad (3.46)$$

où les constantes λ et μ s'écrivent simplement en fonction des paramètres du problème.

En effectuant la transformation de dualité sur le champ φ , nous arrivons à la condition $(S - m) \in \mathbb{Z}$, qui rappelle simplement l'existence du plateau 1/6 pour le tube de spins 3/2, et que pour des aimantations inférieures les excitations sont non-gappées. Traitant ensuite le champ β , la transformation de dualité va mener au modèle de sine-Gordon (3.25), avec cette fois une modulation en $2\pi Sx/a$. Puisque $S = 1/2 \notin \mathbb{Z}$, on est dans le cas où le cosinus va disparaître lors de l'intégration le long de la chaîne et donner le modèle gaussien sans gap. Ainsi nous obtenons bien le deuxième degré de liberté non-gappé qui correspond à la chiralité.

Cependant, cette conclusion n'est pas totalement satisfaisante puisqu'elle ne s'applique que si $m^2 < 1/8$. Dans le cas contraire, l'intégration gaussienne n'est pas possible et le calcul s'arrête à l'action (3.45). Nous ne pouvons alors rien dire de plus et le degré de chiralité non-gappé sur le plateau $m = 1/2$ n'apparaît pas.

4 Approche numérique par diagonalisation exacte

Nous allons dans cette section aborder le tube de spin numériquement à l'aide de la diagonalisation exacte. Nous présentons tout d'abord les principaux aspects de cette méthode, puis nous l'appliquons au cas $S = 3/2$. Nous discutons des courbes d'aimantation obtenues, du comportement des plateaux en fonction de la taille du système (le « scaling ») ainsi que de l'apparition d'un gap pour la chiralité sur le plateau $m = 7/6$.

4.1 La diagonalisation exacte

4.1.1 Principe de la méthode

La diagonalisation exacte [32, 33, 34] est la méthode numérique la plus immédiate pour étudier un système quantique. L'idée principale est d'écrire sous forme matricielle le Hamiltonien, puis de diagonaliser cette matrice pour en obtenir les énergies du système. On va donc obtenir, par principe, des résultats exacts. La principale limitation de cette technique, et malheureusement très forte, concerne la taille des systèmes que l'on peut effectivement traiter. La taille de l'espace de Hilbert croît en effet exponentiellement avec le nombre de spins. Pour N spins 1/2, la taille de la matrice est de 2^N . Pour donner quelques ordres de grandeur, en codant les états sur 8 octets, on aura besoin de 130 Mo de mémoire vive pour stocker la matrice pour $N = 12$, mais déjà 34 GO pour $N = 16$ (sans compter d'autres éléments nécessaires à stocker). On voit que dès N de l'ordre de 20, ajouter un spin devient très gourmand en ressources informatiques.

Cependant, il est possible d'aller plus loin en faisant les remarques suivantes. Tout d'abord, il convient d'utiliser au maximum les symétries du systèmes. Cela revient à ne plus diagonaliser tout le Hamiltonien d'un seul trait,

mais à le réécrire en différents secteurs de symétries. Ceux-ci sont déconnectés les uns des autres, et on peut donc diagonaliser le Hamiltonien par blocs. On obtient ainsi les énergies du système avec en plus les nombres quantiques (projection du spin, impulsion...) associés, ce qui est utile comme pour, par exemple, caractériser les excitations du système. D'autre part, on ne s'intéresse souvent qu'aux propriétés de basse énergie du système. Il n'est donc pas nécessaire d'obtenir toutes les énergies mais seulement le bas du spectre. De plus, on se rend compte que pour la majorité des modèles étudiés (modèles de Heisenberg, de Hubbard...) les interactions sont à courte portée. Un état donné est donc connecté à seulement quelques états différents par le Hamiltonien (par exemple deux pour la chaîne de Heisenberg avec les interactions entre plus proches voisins), et au final les matrices sont très creuses. Si on prend en compte ces différents points, il existe alors des méthodes de diagonalisation très efficaces qui vont permettre un gain de temps et de traiter des matrices de 10^9 états. C'est par exemple le cas de l'algorithme de Lanczos, que l'on va détailler dans la suite.

4.1.2 Utilisation des symétries du système

Comme dit précédemment, le principe consiste à écrire la matrice du Hamiltonien dans un certain secteur de symétrie, caractérisé par un ensemble de nombres quantiques. Reprenons comme exemple le cas d'une chaîne périodique de N spins $1/2$ décrite par le Hamiltonien de Heisenberg (1.1). Son espace de Hilbert total a une taille de 2^N états. On va réduire la taille à traiter de manière significative en prenant en compte les symétries du Hamiltonien et du réseau, c'est-à-dire qui commutent avec le Hamiltonien.

Ce système possède tout d'abord la symétrie $SU(2)$ de rotation du spin. Les états seront ainsi caractérisés par le spin total S et par sa projection S^z sur l'axe de quantification z . Cependant, en pratique inclure le spin total S requiert beaucoup d'efforts. On se contente alors de fabriquer une base de l'espace de Hilbert pour un S^z fixé. De cette façon, l'introduction, par exemple, d'un champ magnétique selon z qui viendrait briser la symétrie $SU(2)$ ne serait pas gênante, S^z étant toujours conservé. Ajoutons que pour le secteur $S^z = 0$, la symétrie d'inversion de spin est possible (division en états pairs et états impairs) afin de gagner encore un facteur 2 en taille.

Avec des conditions périodiques, la chaîne possède comme symétries les translations. Elles sont repérées par un vecteur d'onde $k_n = 2\pi n/N$, $n = -N/2 + 1, \dots, N/2$ (pour une constante de réseau égale à 1). On peut alors diviser chaque secteur de S^z fixé en N secteurs maintenant labellisés également par leur impulsion k_n . Enfin, il est possible de prendre aussi en compte la symétrie de réflexion perpendiculaire à la chaîne. Cependant, ceci n'est valable que pour les impulsions $k = 0, \pi$, la réflexion et les translations ne commutant pas pour les autres vecteurs d'onde.

Au final, pour un S^z donné, la taille de la matrice à diagonaliser est divisée par un facteur environ égal au nombre de symétries spatiales. C'est-à-dire N pour l'exemple de la chaîne pour une impulsion quelconque, et $2N$ pour les secteurs $k = 0, \pi$. L'implémentation de ces symétries permet de diminuer la consommation de mémoire vive et le temps de calcul nécessaire, et ainsi d'aller vers de plus grands systèmes. Pour une chaîne de spins $1/2$ de longueur $N = 32$, on arrive, dans le plus gros secteur $S^z = 0$ avec prise en compte des 32 translations, à des blocs de 20×10^6 états, ce qui est diagonalisable avec les moyens actuels. En fait, il est possible d'atteindre environ 40 spins pour le secteur $S^z = 0$.

4.1.3 Algorithme de Lanczos

L'algorithme de Lanczos [35] est un algorithme itératif qui utilise le fait que l'on ne s'intéresse qu'au bas du spectre de matrices creuses. Après utilisation des symétries, on dispose d'une base d'un secteur de dimension D et de la matrice du sous-espace du Hamiltonien correspondant. L'idée est de construire itérativement une nouvelle base orthonormée dans laquelle le Hamiltonien a une représentation tridiagonale, plus confortable à traiter numériquement. A chaque itération, la matrice est diagonalisée et, tant que le critère de convergence que l'on a choisi n'est pas atteint, on continue à rajouter des états à la base.

La première étape est de partir d'un vecteur aléatoire normé ϕ_1 , dont la seule condition est qu'il ne soit pas orthogonal au fondamental. En lui appliquant le Hamiltonien H , on obtient

$$H\phi_1 = a_1|\phi_1\rangle + b_1|\phi_2\rangle \quad (4.1)$$

où l'état $|\phi_2\rangle$ est normé et orthogonal à $|\phi_1\rangle$ si l'on choisit $a_1 = \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle$. Puis on construit de la même façon le vecteur ϕ_3 normé et orthogonal aux deux précédents par

$$H\phi_2 = b_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + b_2|\phi_3\rangle \quad (4.2)$$

En continuant ainsi, on arrive à la procédure générale pour $n > 1$

$$H\phi_n = b_{n-1}|\phi_{n-1}\rangle + a_n|\phi_n\rangle + b_n|\phi_{n+1}\rangle \quad (4.3)$$

avec $|\phi_{n+1}\rangle$ normé et orthogonal à tous les $|\phi_p\rangle$, $p = 0, \dots, n$. A l'itération n , la représentation de H dans le sous-espace tronqué engendré par les vecteurs $|\phi_n\rangle$ a la forme tridiagonale

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

On diagonalise alors H_n , ce qui donne en particulier l'énergie variationnelle $E_0(n)$. En fait, les valeurs propres extrémales de H_n convergent exponentiellement vers celles du vrai Hamiltonien H avec le nombre n d'itérations Lanczos. En pratique, un nombre d'itérations de l'ordre de 10^2 est généralement suffisant pour obtenir la valeur du fondamental (du secteur de symétrie dans lequel on travaille !) avec une très bonne précision. Or, comme dit auparavant, la dimension de H dans la base initiale peut atteindre plusieurs millions, ce qui finalement ne pose pas de problème avec l'algorithme de Lanczos.

Au niveau des ressources informatiques, la partie de l'algorithme consommatrice de temps de calcul n'est pas la diagonalisation en elle-même (« immédiate » en fait) mais l'application de H aux vecteurs Lanczos, exprimés dans la base initiale. Il faut bien noter que tout l'intérêt vient du fait que la matrice est creuse. Si l'on continue avec notre exemple de la chaîne de N spins, chaque état de la base initiale sera couplé au maximum à N autres états (le nombre maximum de spin flips). Le nombre d'éléments non-nuls est ainsi de $D \times N$, ce qui est très inférieur au nombre total $D \times D$ d'éléments de matrice, puisque évidemment $D \gg N$.

4.2 Application au spintube

4.2.1 Courbes d'aimantation

Pour faire le lien avec l'approche analytique présentée dans la Section 3, nous analysons les courbes d'aimantation obtenues pour le spintube de spins $S = 3/2$ après avoir présenté leurs modes d'obtention. La première étape est d'obtenir le spectre du système en l'absence de champ magnétique. Ceci étant fait par diagonalisation exacte avec l'utilisation de la symétrie de spin, nous disposons donc du spectre $E(S^z)$. Afin de calculer la courbe d'aimantation $m(h)$, nous cherchons, pour un champ magnétique donné, quelle est la valeur de S^z qui minimise la somme de l'énergie par site et de la contribution venant du champ

$$E_{\text{totale}} = E(S^z) - hS^z. \quad (4.5)$$

Il s'agit donc d'effectuer une transformée de Legendre pour obtenir la courbe d'aimantation $S^z(h)$ à partir de l'énergie $E(S^z)$. En divisant ensuite par le nombre de spins du système, nous trouvons l'aimantation par spin m . En fait, si nous faisons ça directement dans l'équation (4.5) et que l'on dérive par rapport à m , nous obtenons $h = \frac{\partial e(m)}{\partial m}$, où $e(m)$ est l'énergie par site. A partir de là, nous comprenons qu'un plateau d'aimantation va se traduire par une discontinuité dans la pente $h = \frac{\partial e(m)}{\partial m}$ de la courbe d'énergie. Enfin, tous les calculs faits par diagonalisation exacte présentés ici utilisent des conditions aux bords périodiques.

Les courbes de gauche de la Figure 7 sont les courbes d'aimantation $m(h)$ obtenues dans le cas $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0, 1$. Nous montrons ici les résultats pour des tubes de longueurs $L = 4, 6, 8, 10$, c'est-à-dire au total $3 \times L$ spins. Plusieurs commentaires sont à faire. Tout d'abord, nous constatons bien la présence de plateaux dans la courbe. Cependant, ceci était prévisible. Puisque nous travaillons avec un système de taille finie, nous savons que toutes les quantités vont être quantifiées et qu'il va donc y avoir des plateaux. La question est alors de savoir, parmi les plateaux visibles sur ces courbes, quels sont ceux qui vont survivre dans la limite thermodynamique $L \rightarrow \infty$. D'autre part, les courbes d'aimantation $L = 8$ et $L = 10$ ne sont pas complètes. Il s'agit seulement d'une limitation numérique, les espaces de S^z plus petits devenant beaucoup trop gros pour être accessibles par diagonalisation exacte. Nous avons également indiqué quelles sont les valeurs auxquelles nous nous attendions à trouver des plateaux d'après la condition (3.42) obtenues par l'approche intégrale de chemin. Nous voyons qu'ils y sont bien présents et sont plus grands (pour certains du moins) que les autres, ce qui laisse penser qu'ils vont survivre dans la limite thermodynamique. Nous présentons en annexe d'autres courbes obtenues par Sylvain Capponi pour des systèmes plus gros par DMRG, qui vont dans le sens de cette survie des plateaux.

Afin de confirmer que ces plateaux subsistent bien dans la limite thermodynamique, nous traçons sur la droite de la Figure 7 la taille du plateau $m = 7/6$ en fonction de celle du système et pour différents J_{\parallel}/J_{\perp} . Il apparaît trois régimes différents. Le premier, pour les couplages les plus faibles tels que $J_{\parallel}/J_{\perp} < 0,06$, montre que la taille du plateau est constante, du moins sur la plage de tailles dont nous disposons. Dans ce cas, le comportement du système est celui de triangles découplés, pour lesquels le plateau existe et est indépendant de la taille du système

(évidemment s'ils sont découplés !). Lorsque nous augmentons le couplage, nous voyons une loi d'échelle en $1/L^2$, et il est possible d'extrapoler ces courbes à une valeur finie dans la limite $L \rightarrow \infty$. Enfin, lorsque nous arrivons à des valeurs $J_{\parallel}/J_{\perp} > 0,2$, le comportement de la taille du plateau change en $1/L$. Dans ce cas, en extrapolant à la limite thermodynamique le plateau disparaît. Nous n'avons parlé ici que du plateau le plus élevé à cause des limitations de la diagonalisation exacte, mais des données DMRG partielles sur les autres plateaux semblent être en accord avec ces observations.

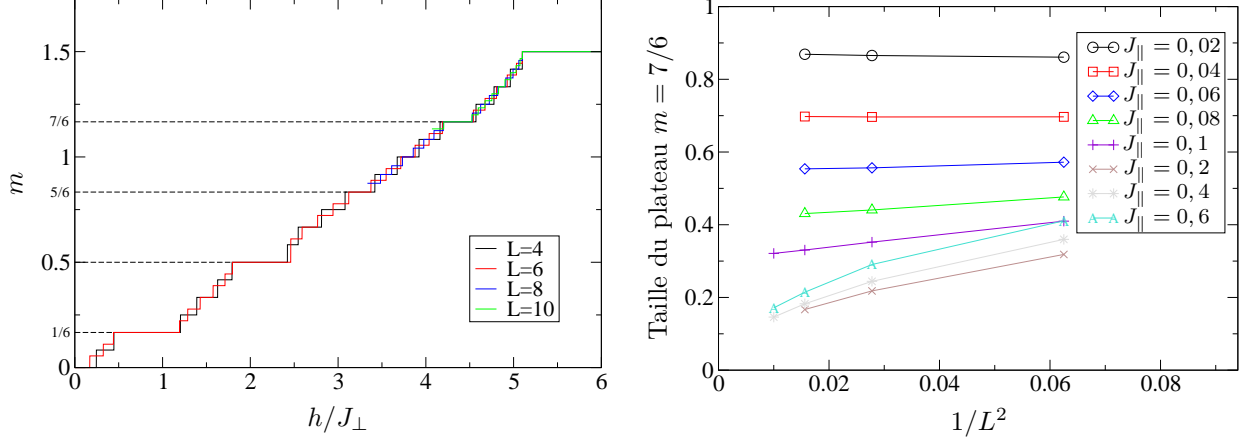


FIGURE 7 – A gauche, courbes d'aimantation obtenues pour le spintube $S = 3/2$ au couplage entre triangles $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0,1$ et pour différentes tailles L du tube. Nous vérifions bien la présence de plateaux d'aimantation aux valeurs prévues par la condition (3.42). A droite, nous traçons la taille du plateau $m = 7/6$ en fonction de $1/L^2$ et pour plusieurs J_{\parallel}/J_{\perp} afin de mettre en évidence les effets de taille finie.

Pour tenter d'expliquer cette loi d'échelle, nous allons faire une comparaison avec les effets de taille finie sur le cas simple de fermions libres sur un réseau en une dimension, dont le Hamiltonien est

$$H = 2t \sum_k \cos(k), \quad (4.6)$$

où t est le terme de saut d'un site à l'autre. Revenons à nos plateaux d'aimantation afin d'expliquer comme nous calculons leur taille. Nous avons vu à partir de l'équation (4.5) qu'il fallait résoudre $h = \frac{\partial e(m)}{\partial m}$, et que les plateaux correspondent à une discontinuité dans la courbe $E(S^z)$. A partir de là, la longueur d'un plateau correspond simplement à la différence des pentes pour des aimantations juste inférieures et supérieures à celle du plateau. Numériquement elle est donc donnée par $[E(S^z + 1) - E(S^z)] - [E(S^z) - E(S^z - 1)]$ pour un plateau en S^z . Ce n'est rien d'autre que la dérivée seconde discrète $E(S^z + 1) + E(S^z - 1) - 2E(S^z)$. Dans l'analogie avec les fermions, S^z correspond au nombre de particules (transformation de Jordan-Wigner). La question est alors de savoir quel est le scaling de $E(N + 1) + E(N - 1) - 2E(N)$ (qui est à un facteur N^2 près l'inverse de la compressibilité) si l'on travaille avec des particules. Il y a deux possibilités. Si la bande n'est pas pleine, on trouve

$$E(N + 1) + E(N - 1) - 2E(N) = 2t \left[\cos \left(k_F + \frac{2\pi}{L} \right) - \cos(k_F) \right] \sim \frac{1}{L} \quad (4.7)$$

où k_F est le vecteur de Fermi correspondant à N fermions présents. Ainsi dans ce régime sans gap on trouverait numériquement un scaling en $1/L$. Si par contre la bande est pleine, pour rajouter un fermion il faut aller peupler la deuxième bande, que l'on va prendre située à une énergie δ au-dessus de la première. La dérivée seconde discrète vaut alors

$$E(N + 1) + E(N - 1) - 2E(N) = 2t \left[\delta + \cos \left(\frac{2\pi}{L} \right) - \cos(k_F) \right] \sim \text{cste} + \frac{1}{L^2}. \quad (4.8)$$

L'analogie avec le spintube se fait alors de la manière suivante. Se trouver sur le plateau revient à avoir sur chaque triangle le même S^z , disons $7/2$ pour le plateau $m = 7/6$, et en sortir « par le haut » correspond à augmenter le S^z d'un seul triangle à $9/2$. Nous pouvons le voir comme ajouter une particule au système, ce qui coûte une énergie finie puisqu'un plateau correspond à un gap. Ce scénario est aussi valable pour sortir par le bas du plateau, et nous nous attendons donc à ce que la dérivée seconde discrète varie en $1/L^2$ comme pour les fermions libres. Au contraire, quand les plateaux disparaissent, le tube est dans une phase sans gap, c'est-à-dire dans la situation d'une bande qui n'est pas pleine, et le scaling est en $1/L$. La Figure 8 montre ces deux comportements. Evidemment cette analogie est très élémentaire, et ne constitue qu'une tentative d'expliquer les résultats numériques que nous

obtenons. Notamment, nous savons que l'existence d'un gap entraîne celle d'une longueur de corrélation ξ . Pour des systèmes très grands, nous nous attendons ainsi à voir un comportement de la forme $e^{-\frac{L}{\xi}}$. Cela veut dire que nous ne pouvons pas raisonnablement donner la taille du plateau dans la limite thermodynamique à partir d'un scaling en $1/L^2$. La valeur que nous trouverions est à considérer comme une bonne inférieure puisqu'on attend une décroissance exponentielle.

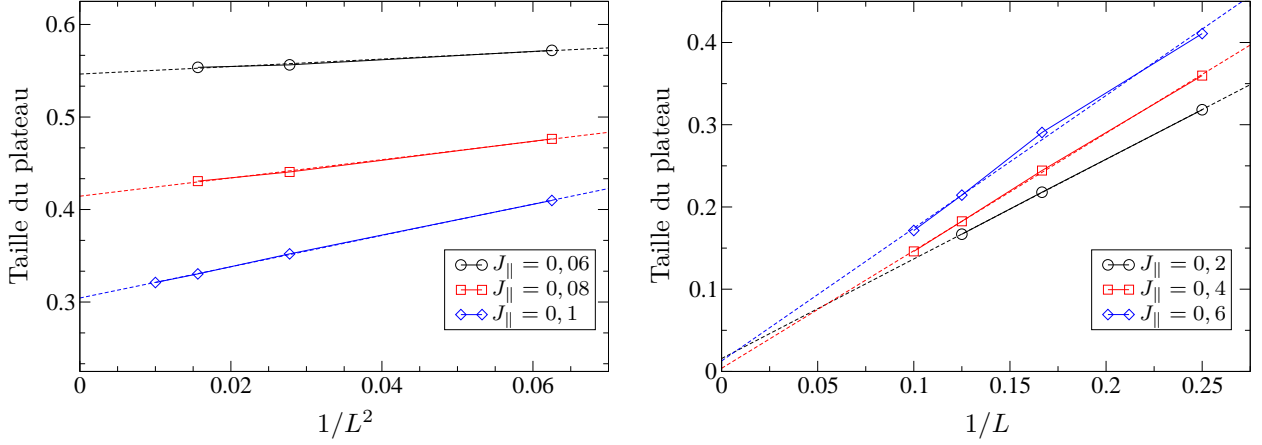


FIGURE 8 – A gauche, comportement en fonction de $1/L^2$ de la taille des plateaux dans le régime de couplage entre les triangles où ils subsistent dans la limite thermodynamique. A droite, le comportement est cette fois en $1/L$ pour des couplages plus forts, et les plateaux disparaissent pour des systèmes plus grands.

Une information que nous avons obtenue à partir de ces courbes d'aimantation et des lois d'échelle est que les plateaux disparaissent à des valeurs de $J_{\parallel}/J_{\perp} \gtrsim 0.2$. Si nous comparons aux prédictions obtenues par l'expression de la dimension de l'opérateur de perturbation (3.43), les valeurs sont du bon ordre de grandeur. Bien sûr, cet accord n'est que qualitatif, nous avons déjà discuté ce point auparavant. Il semble en effet que les plateaux les plus robustes en fonction du couplage soient les plateaux $1/6$ et $7/6$, contrairement à ce que nous prédit (3.43), le plateau $1/6$ devant être le premier à disparaître (Cf. Figure 6). Nous n'avons pas déterminé numériquement les valeurs des couplages auxquels disparaissent les différents plateaux.

4.2.2 Entropie de Von Neumann et charges centrales

Les données provenant des calculs DMRG ont permis d'observer que les différents plateaux, ou même les zones entre les plateaux, n'ont pas le même comportement. Plus explicitement, le tube de spins, nous l'avons dit précédemment, possède deux degrés de liberté : le spin et la chiralité. Le fait d'être sur un plateau implique que le degré de liberté de spin est gelé, mais ne donne pas d'information sur la chiralité. Inversement, les zones hors plateaux nous disent que le spin est non-gappé, mais là encore nous ne savons rien pour la chiralité. Sans rentrer dans les détails, au cours de calculs DMRG, une certaine quantité, l'entropie de Von Neumann, est immédiatement accessible. Il a été démontré [36] que celle-ci est directement reliée à la charge centrale c de la théorie conforme qui décrit le système par la relation

$$S_{VN} = \frac{c}{6} \ln d\left(\frac{x}{L}\right) \quad (4.9)$$

à une constante additive près, où $d(x/L)$ est la distance conforme, reliée à la taille L du système et à la taille x du bloc dont on calcule l'entropie. Nous rappelons que la charge centrale mesure le nombre de modes bosoniques présents dans la théorie effective de basse énergie du système (le nombre de degrés de liberté). Puisqu'il s'agit du seul paramètre de cette loi, il suffit de tracer l'entropie pour l'obtenir. Mentionnons également qu'il est possible en théorie d'obtenir cette charge centrale à partir de la diagonalisation exacte, mais cela s'avère moins facile et moins précis. La technique standard à l'heure actuelle est de la calculer par DMRG.

Nous montrons sur la Figure 9 les entropies à la fois sur et hors des plateaux, ainsi que les charges centrales que nous en avons extrait. La première observation est que le comportement de la chiralité varie selon les plateaux. Sur les plateaux $m = 1/6$ et $m = 3/6$, nous trouvons $c = 1$, c'est-à-dire que la chiralité n'est pas gappée. Le cas du plateau $1/6$ a en fait déjà été traité par bosonisation [22] à travers l'étude du modèle effectif (2.5) dans le cas d'un spin $1/2$ (mais nous avons vu que la forme du modèle était la même pour tous les spins demi-entiers, les conclusions restent ainsi pertinentes pour notre cas). La théorie de basse énergie est un liquide de Luttinger, dont les fonctions de corrélations sont en loi de puissance, pour le mode de chiralité. Le plateau $m = 3/6$ n'a lui par contre pas été étudié. Enfin, les deux plateaux les plus élevés à $5/6$ et $7/6$ montrent une entropie constante, ce qui signifie que $c = 0$. Sur ces plateaux, le spin et la chiralité sont gappés.

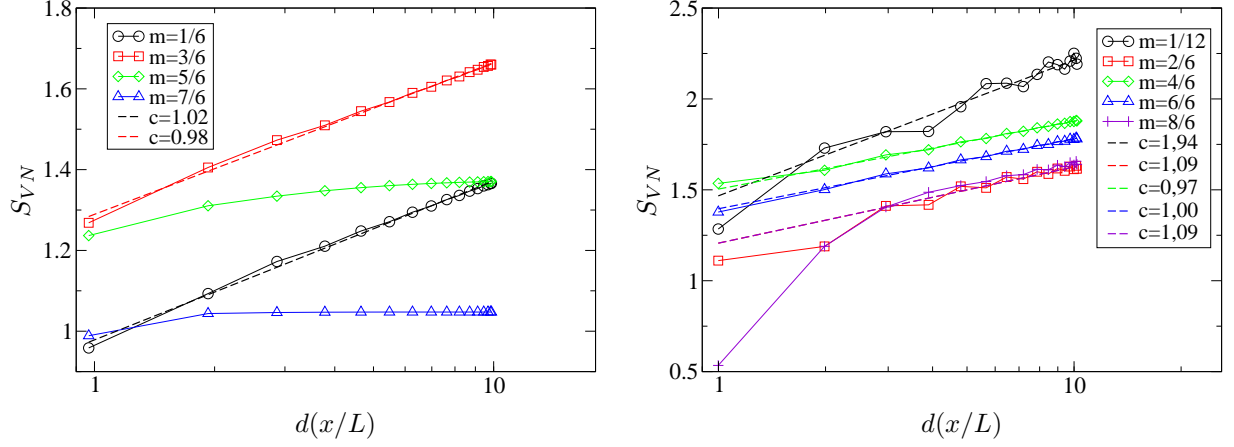


FIGURE 9 – Entropies de Von Neumann obtenues par DMRG pour le spintube de longueur $L = 32$ et $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0, 1$. La figure de gauche donne les résultats sur les plateaux d’aimantation, celle de droite au milieu des zones entre les plateaux. Les courbes en tirets sont des fits de ces entropies et donnent les charges centrales c pour ces aimantations.

Si nous nous plaçons maintenant hors des plateaux, là encore le comportement diffère selon la position sur la courbe d’aimantation. La partie avant le premier plateau $1/6$ donne bien $c = 2$ comme attendu d’après [22] qui prédit un modèle de Luttinger à deux composantes, le spin et la chiralité. Par contre, toutes les autres régions inter-plateaux montrent une charge centrale $c = 1$, la chiralité est donc systématiquement gappée. Nous avons choisi d’étudier plus en détail le plateau $m = 7/6$ pour essayer de comprendre cette charge centrale nulle.

4.2.3 Ouverture d’un gap de chiralité sur le plateau $m=7/6$

Nous allons voir que le plateau $m = 7/6$ présente une transition, un gap de chiralité s’ouvre quand on augmente le couplage entre les triangles. Le choix de se concentrer sur ce plateau vient du fait qu’il s’agit du plus accessible, tant analytiquement que numériquement. Sur la diagonalisation exacte, c’est celui pour lequel les secteurs à diagonaliser sont les plus petits. D’autre part, si nous revenons au cas des triangles découplés, ce plateau correspond à avoir un S^z total sur chaque triangle égal à $7/2$. Or, pour avoir ce S^z à partir de 3 spins $S = 3/2$, il y a deux possibilités. La première est de former un état $|S = \frac{7}{2}, S^z = \frac{7}{2}\rangle$. Il y a deux manières de le faire, soit former un spin 2 à partir de deux des spins du triangle, puis le spin $7/2$ avec le troisième, soit former un spin 3 puis le spin $7/2$. Nous disposons donc de deux états qu’il est possible d’écrire comme des états propres de l’opérateur de rotation et de labelliser par une chiralité L ou R . Ils s’écrivent

$$\begin{aligned}
 |S^z = 7/2, R\rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \omega \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle + \omega^2 \left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right), \\
 |S^z = 7/2, L\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \left(\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \omega^2 \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle + \omega \left| \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. La seconde possibilité est de former un état $|S = 9/2, S^z = 7/2\rangle$. Cependant, comme nous l’avons vu dans la Section 2, le Hamiltonien d’un triangle sous champ s’exprime comme le carré du spin total plus son couplage linéaire au champ. Ce dernier état est donc environ J_{\perp} au-dessus des deux autres en énergie. Dans le cadre d’un traitement en perturbation de la partie H_{\parallel} , qui est le régime d’intérêt puisque c’est là qu’il y a des plateaux, nous pouvons espérer décrire la physique en laissant cet état de côté et conserver uniquement les deux états chiraux.

Pour simplifier le problème et avoir une première intuition, nous avons traité en perturbation le cas de deux triangles faiblement couplés. Si l’on considère une nouvelle fois la chiralité comme un pseudo-spin $1/2$, nous obtenons en perturbation au premier ordre en J_{\parallel}/J_{\perp} que le plateau est décrit uniquement par un terme de spin-flip

$$H_{eff} = \frac{1}{2} J_{xy} (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \tag{4.11}$$

où les $\sigma_{1,2}^{\pm}$ sont les opérateurs de pseudo-spin et $J_{xy} = \frac{2}{3} J_{\parallel}$. Dans la limite d’un système de grande taille, cela correspond à un modèle XY, que l’on sait non-gappé. Au premier ordre en perturbation, nous nous attendons donc à obtenir une charge centrale $c = 1$. Cependant, on s’aperçoit en traitant numériquement les deux triangles que la perturbation au premier ordre ne marche que pour $0,001 \gtrsim J_{\parallel}/J_{\perp}$, tandis que les courbes de la Figure 9 sont données pour $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0, 1$. Allant au deuxième ordre (il faut inclure l’état que nous avons ignoré avant), nous trouvons un terme en S^z et le Hamiltonien effectif contient maintenant un terme en $S_1^z S_2^z$

$$H_{eff} = \frac{1}{2} J_{xy} (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) + J_z \sigma_1^z \sigma_2^z, \tag{4.12}$$

où $J_{xy} = \frac{2}{3}J_{\parallel} - \frac{2}{81}J_{\parallel}^2$ et $J_z = -\frac{1}{54}J_{\parallel}^2$. Cela donnerait un modèle XXZ , que l'on sait gappé quand $|\Delta| = |J_z/J_{xy}| > 1$ [30]. Pour $\Delta > 1$, le comportement est de type Ising antiferromagnétique, et pour $\Delta < 1$ Ising ferromagnétique. Autrement dit, nous nous attendons à observer pour la chiralité, quand le couplage entre triangles augmente, une transition entre un comportement XY sans gap et un comportement Ising gappé. Bien que nous ayons ici considéré uniquement deux triangles, des résultats obtenus par diagonalisation exacte viennent renforcer cette idée.

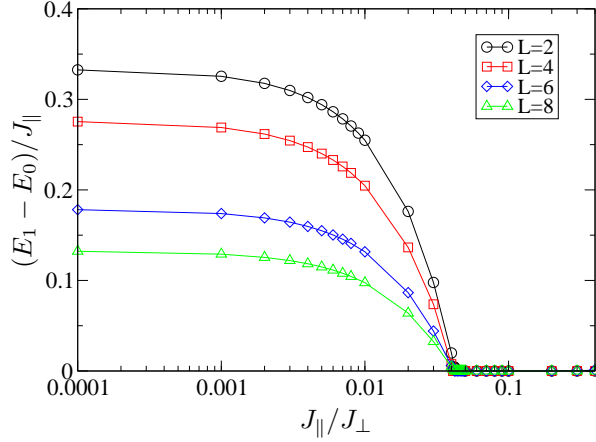


FIGURE 10 – Différence entre les deux premiers niveaux d'énergie du spintube obtenus par diagonalisation exacte en fonction du couplage J_{\parallel}/J_{\perp} et pour plusieurs tailles L du tube. Le gap entre les deux niveaux se referme pour la valeur critique $J_{\parallel,c} = 0,042J_{\perp}$, qui semble indépendante de L .

Nous montrons sur la Figure 10 la différence d'énergie entre les deux premiers niveaux du spectre obtenus par diagonalisation exacte. Pour $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0,042$, elle devient nulle et l'état fondamental est donc deux fois dégénéré. Nous ne l'avons pas tracé ici, mais dans le même temps un gap s'ouvre avec le troisième niveau. Cela correspond bien à un modèle de type Ising, dont le fondamental est deux fois dégénéré puisque les directions « haut » et « bas » sont équivalentes, et créer un défaut coûte une énergie finie. Les différentes courbes qui correspondent à des tailles L du tube différentes montrent de plus que cette valeur critique du couplage est indépendante de la taille du système, du moins dans la rangée de tailles accessibles. Pour des couplages plus faibles, le comportement serait donc celui d'un modèle XY . Bien évidemment, ce dernier est sans gap donc la différence d'énergie entre le fondamental et le premier niveau excité devrait être toujours nulle. Mais pour les systèmes de taille finie avec lesquels nous travaillons, il est commode de la tracer puisqu'elle est finie, même si cela ne montrerait aucune différence entre les deux régimes dans la limite thermodynamique (nous voyons bien que cet écart entre les deux niveaux diminue quand L augmente).

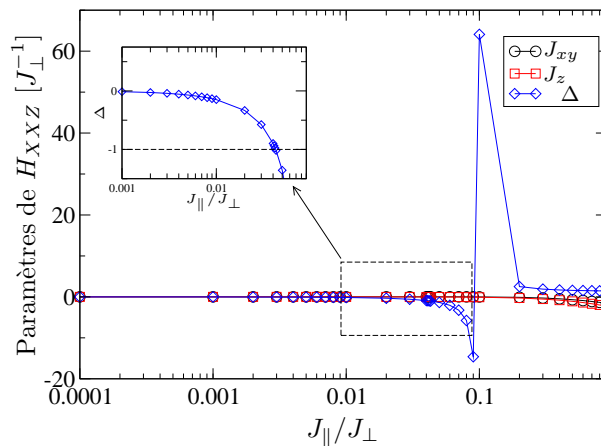


FIGURE 11 – Valeurs des paramètres du Hamiltonien XXZ décrivant la chiralité sur le plateau en fonction de J_{\parallel}/J_{\perp} , obtenues par diagonalisation exacte de deux triangles couplés. La fenêtre montre qu'à partir de $J_{\parallel}/J_{\perp} = 0,042$, on passe d'un régime XY $|\Delta| < 1$ à un régime Ising ferromagnétique $\Delta < -1$.

Si nous revenons encore une fois au cas des deux triangles, l'obtention numérique du spectre nous permet de trouver les valeurs des paramètres pour ce que serait le modèle XXZ décrivant le système sur le plateau. Nous

donnons sur la Figure 11 les valeurs de J_{xy} et J_z extraites de la diagonalisation exacte. Lorsque le J_{\parallel}/J_{\perp} atteint la valeur critique de 0,042, la composante J_z devient prédominante et le système entre dans la classe d'universalité du modèle d'Ising ferromagnétique. Cette valeur critique est la même que celle donnée par l'ouverture du gap entre les deux premiers niveau, ce qui est un indice de plus de l'existence de cette transition $XY - XXZ$.

Pour des valeurs de J_{\parallel}/J_{\perp} plus élevées, le pic montre que Δ diverge et devient positif plus grand que 1. Il s'agit en fait d'un changement de signe de J_{xy} . Or, pour un modèle XXZ seul le signe de J_z compte car il est possible de faire une transformation laissant invariant le Hamiltonien à l'exception d'un changement de signe pour J_{xy} . Autrement dit, sur la Figure 11 le changement de signe de Δ ne signifie pas que l'on passe de Ising ferromagnétique à Ising antiferromagnétique, le système reste toujours dans le premier cas une fois que l'on dépasse $J_{\parallel,c} = 0,042J_{\perp}$.

Finalement, ces résultats expliquent que la charge centrale nulle observée à partir de l'entropie de Von Neumann vient du fait que, pour la valeur de J_{\parallel} utilisée, le plateau est décrit par un modèle d'Ising ferromagnétique. La chiralité étant représentée par un pseudo-spin, cela veut dire que le système préfère mettre tous les triangles dans le même état de chiralité. L'état fondamental est alors deux fois dégénéré et un gap s'ouvre. En diminuant le couplage, nous nous attendons à voir apparaître une charge centrale $c = 1$ venant du modèle XY . Cependant il n'est pas possible de conclure sur les premiers résultats d'entropie disponibles car le DMRG semble mal fonctionner quand le J_{\parallel} devient plus faible (l'entropie diminue avec la taille du bloc, ce qui est absurde). L'explication est que, de manière générale, les méthodes numériques peuvent avoir des difficultés lorsqu'il y a des échelles d'énergie très différentes.

Conclusion

L'objectif de ce stage était d'étudier la physique sous champ magnétique du tube de spins à 3 chaînes, à la fois par une approche analytique semi-classique utilisant l'intégrale de chemin et par une approche numérique de diagonalisation exacte. La première a permis de retrouver par une méthode différente la condition $(S - m) \in \mathbb{Z}$ trouvée par Oshikawa, Yamanaka et Affleck comme contrainte donnée par le caractère quantique des spins sur les valeurs possibles de l'aimantation pouvant admettre un plateau, c'est-à-dire un régime où le spin est gappé. Par contre, nous n'arrivons pas à retrouver le degré de liberté de chiralité avec cette technique. Nous avons ensuite utilisé la diagonalisation exacte pour étudier numériquement le cas du spintube $S = 3/2$, et plus précisément sa courbe d'aimantation. En accord avec le résultat re-dérivé analytiquement, nous observons bien, dans le régime de couplage fort entre les chaînes, la présence de plateaux aux valeurs prédites. Nous trouvons également un accord qualitatif des valeurs des couplages auxquels ils disparaissent avec l'approche d'intégrale de chemin. Une analyse des effets de taille finie nous permet de conclure que les plateaux survivent dans la limite thermodynamique. Ensuite, des données DMRG et les charges centrales que nous en extrayons ont montré que, pour des valeurs de J_{\parallel}/J_{\perp} fixées, tout les plateaux ne sont pas équivalents du point de vue du degré de liberté de chiralité. Selon le plateau, celui-ci va être gappé ou non. Nous nous sommes alors intéressé plus particulièrement au plateau $m = 1/6$, et nous avons un ensemble d'indices qui nous font penser qu'il s'agit d'une transition entre un modèle XY et un modèle XXZ .

Pour la suite de ce stage qui va se poursuivre en thèse, plusieurs pistes sont envisageables. Au niveau de la méthode analytique, une idée que nous n'avons pas explorée par manque de temps, serait de revenir au Hamiltonien de départ du tube, et de modifier un des trois couplages transverses. La chiralité est en effet liée à la symétrie de rotation de $2\pi/3$ dans la direction transverse. En changeant légèrement un des couplages en $J_{\perp}(1 + \epsilon)$, on détruit explicitement l'existence de ces modes de chiralité. L'idée est d'appliquer le même traitement d'intégrale de chemin à ce Hamiltonien, puis de prendre la limite $\epsilon \rightarrow 0$ afin de voir si nous sommes capables de faire apparaître ce degré de chiralité sans gap. Sinon, dans la continuation des charges centrales observées numériquement et de l'étude de la chiralité, il serait intéressant de traiter en perturbation de manière plus « élégante » le cas de non plus deux triangles, mais de tout le tube. Cela peut se faire en considérant les 3 états à garder comme les 3 états possibles d'un spin 1, et ainsi en travaillant avec des opérateurs de $SU(3)$, sur le modèle des références [21, 24].

Annexes

A Etats cohérents de spin

Nous donnons dans cette annexe les principales propriétés et informations sur les états cohérents de spin utilisés dans la représentation d'intégrale de chemin de la section 3. Ils forment une famille d'états créés par l'application de l'opérateur de rotation à l'état complètement polarisé $|S, S\rangle$:

$$|\vec{n}\rangle = e^{i\theta\left(\frac{\hat{z}\times\vec{n}}{|\vec{z}\times\vec{n}|}\right)\cdot\vec{S}}|S, S\rangle, \quad (\text{A.1})$$

où \vec{n} est un vecteur unité formant un angle θ avec l'axe de quantification z . C'est ce vecteur (les deux angles) qui paramétrise les états cohérents.

L'état $|\vec{n}\rangle$ peut être développé sur la base complète des représentations irréductibles de spin S $|S, M\rangle$, où les M sont les valeurs propres de l'opérateur S^z . Les coefficients du développement sont les matrices de la représentation de S

$$|\vec{n}\rangle = \sum_{M=-S}^S D^{(S)}(\vec{n})_{MS}|S, M\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Il y a bien sûr beaucoup d'autres rotation possibles, qui diffèrent l'une de l'autre uniquement par une rotation autour de l'axe z . Elles correspondent toutes au même état, à un facteur de phase près. Les matrices $D^{(S)}$ ne forment pas un groupe mais satisfont à la relation

$$D^{(S)}(\vec{n}_1)D^{(S)}(\vec{n}_2) = D^{(S)}(\vec{n}_3)e^{i\Phi(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)S^z} \quad (\text{A.3})$$

où les \vec{n}_i sont arbitraires et $\Phi(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ est l'aire du triangle sphérique de sommets donnés par \vec{n}_1 , \vec{n}_2 et \vec{n}_3 . La sphère n'ayant pas de bords, il y a deux aires qu'il est possible de choisir et ainsi Φ est définie à 4π près.

Le produit scalaire de deux états cohérents s'écrit

$$\begin{aligned} \langle\vec{n}_1|\vec{n}_2\rangle &= \langle S, S|D^{(S)\dagger}(\vec{n}_1)D^{(S)}(\vec{n}_2)|S, S\rangle \\ &= e^{i\Phi(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)S} \left(\frac{1 + \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{2}\right)^S, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

les états cohérents ne sont donc pas orthogonaux. Les éléments diagonaux des opérateurs de spin \vec{S} valent

$$\langle\vec{n}|\vec{S}|\vec{n}\rangle = S\vec{n}. \quad (\text{A.5})$$

Cela veut dire que la valeur moyenne d'un opérateur de spin dans les états cohérents $|\vec{n}\rangle$ est justement le vecteur \vec{n} mais de longueur S .

Enfin, l'opérateur identité \hat{I} peut s'exprimer en termes des opérateurs des états cohérents $|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|$ par

$$\hat{I} = \int d\mu(\vec{n})|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|, \quad (\text{A.6})$$

où la mesure d'intégration est donnée par

$$d\mu(\vec{n}) = \left(\frac{2S+1}{4\pi}\right) d^3\vec{n} \delta(\vec{n}^2 - 1). \quad (\text{A.7})$$

Les états cohérents forment ainsi une base surcomplète puisque les états ne sont pas orthogonaux mais la relation de fermeture existe.

B Transformation de dualité

Nous présentons ici le détail de la transformation de dualité [28] utilisée à partir de l'action (3.23), dont on rappelle l'écriture

$$S_{eff}[\varphi] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2}\lambda_\tau(\partial_\tau\varphi)^2 + \frac{1}{2}\lambda_x(\partial_x\varphi)^2 + i\left(\frac{S-m}{a}\right)\partial_\tau\varphi \right\}. \quad (\text{B.1})$$

On effectue tout d'abord une transformation de Hubbard-Stratonovich en introduisant un champ vectoriel auxiliaire $\vec{J} = (J_\tau, J_x)$. On sépare également le champ ϕ en φ_f une partie sans vortex et φ_v une partie qui contient tous les vortex : $\varphi = \varphi_f + \varphi_v$. On obtient l'action

$$\begin{aligned} S_{eff}[\varphi, \vec{J}] &= \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2\lambda_\tau}J_\tau^2 + \frac{1}{2\lambda_x}J_x^2 + i\left(J_\tau + \frac{S-m}{a}\right)\partial_\tau\varphi_v + iJ_x\partial_x\varphi_v \right. \\ &\quad \left. + i\left(J_\tau + \frac{S-m}{a}\right)\partial_\tau\varphi_f + iJ_x\partial_x\varphi_f \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En intégrant par partie les deux derniers termes contenant le champ φ_ℓ il vient

$$S_{eff}[\varphi_v, \varphi_f, \vec{J}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2\lambda_\tau} \left(\tilde{J}_\tau - \frac{S-m}{a} \right)^2 + \frac{1}{2\lambda_x} \tilde{J}_x^2 + i(\tilde{J}_\tau \partial_\tau + \tilde{J}_x \partial_x) \varphi_v - i(\partial_\tau \tilde{J}_\tau + \partial_x \tilde{J}_x) \varphi_f \right\}, \quad (\text{B.3})$$

où on a défini

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} J_\tau + \frac{S-m}{a} \\ J_x \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

On voit alors que lorsqu'on intègre sur le champ φ_f dans la fonction de partition, cela correspond à intégrer un terme de phase. Cette intégrale sera donc nulle sauf si le coefficient devant φ_f est nul, c'est-à-dire si $\partial_\tau \tilde{J}_\tau + \partial_x \tilde{J}_x = \partial_\mu \tilde{J}_\mu = 0$. Sous cette contrainte de divergence nulle pour \tilde{J} , l'action s'écrit

$$S_{eff}[\varphi_v, \vec{J}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2\lambda_\tau} \left(\tilde{J}_\tau - \frac{S-m}{a} \right)^2 + \frac{1}{2\lambda_x} \tilde{J}_x^2 + i\tilde{J}_\mu \partial_\mu \varphi_v \right\}. \quad (\text{B.5})$$

En une dimension d'espace, la contrainte $\partial_\mu \tilde{J}_\mu = 0$ est satisfaite en introduisant le champ dual ψ défini par

$$\tilde{J}_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi. \quad (\text{B.6})$$

Ce champ est sans vorticité, c'est-à-dire $(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \psi = 0$. Puis en intégrant par partie le dernier terme et en faisant la substitution $\tilde{\psi} = \psi - \frac{S-m}{a} x$, on obtient

$$S_{eff}[\tilde{\psi}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2\lambda_\tau} (\partial_\tau \tilde{\psi})^2 + \frac{1}{2\lambda_x} (\partial_x \tilde{\psi})^2 + i2\pi \rho_v \left(\tilde{\psi} + \frac{S-m}{a} x \right) \right\}. \quad (\text{B.7})$$

On a défini dans cette équation la densité de vortex ρ_v par

$$(\partial_\tau \partial_x - \partial_x \partial_\tau) \varphi_v = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_v = 2\pi \sum_j q_{j,v} \delta(\tau - \tau_{j,v}) \delta(x - x_{j,v}) = 2\pi \rho_v, \quad (\text{B.8})$$

où $(\tau_{j,v}, x_{j,v})$ sont les coordonnées d'espace-temps du j -ième vortex de charge $2\pi q_{j,v}$, avec $q_{j,v} \in \mathbb{Z}$. A ce stade, il reste dans l'expression de la fonction de partition une intégrale sur le champ $\tilde{\psi}$ ainsi qu'une somme sur toutes les configurations possibles de vortex (un vortex de charge 2π au site 1 et rien ailleurs, un vortex de charge -2π , etc.). Si l'on effectue cette somme et que l'on fait un changement d'échelle du temps imaginaire τ , on trouve finalement le résultat

$$S_{eff}[\tilde{\psi}] = \int d\tau \int dx \left\{ \frac{1}{2} K (\vec{\nabla} \tilde{\psi})^2 + g_1 \cos \left(2\pi \left[\tilde{\psi} + \frac{S-m}{a} x \right] \right) \right\}, \quad (\text{B.9})$$

où $K = 1/\sqrt{\lambda_\tau \lambda_x}$, $\vec{\nabla} = (\partial_\tau, \partial_x)$ et g_1 est une constante que l'on n'a pas déterminé.

C Courbes d'aimantation obtenues par DMRG

Nous montrons ici des courbes d'aimantation obtenues par DMRG pour le spintube $S = 3/2$ avec un couplage $J_\parallel/J_\perp = 0, 1$. Le DMRG permet d'accéder à des tailles beaucoup plus grandes, et ainsi de confirmer que les plateaux observés par diagonalisation exacte vont subsister dans la limite thermodynamique.

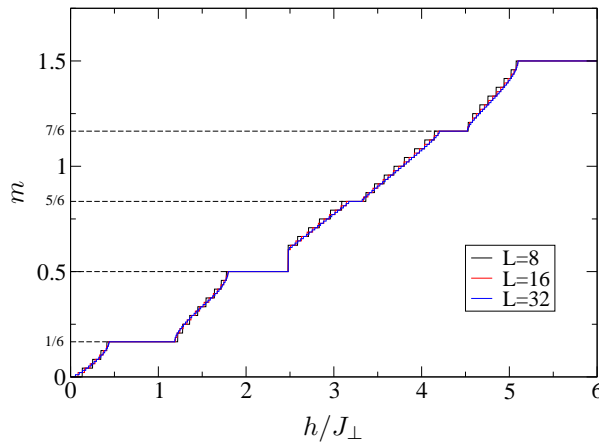


FIGURE 12 – Courbes d'aimantation obtenues par DMRG pour le spintube $S = 3/2$ avec un couplage entre triangles $J_\parallel/J_\perp = 0, 1$ et pour différentes tailles $L = 8, 16, 32$ du tube.

Références

- [1] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1529 (1991).
- [2] A. Tanaka, K. Totsuka and X. Hu, *Phys. Rev. B* **79**, 064412 (2009).
- [3] I. Affleck, *Field theory methods and quantum critical phenomena*, in Les Houches, session XLIX, *Champs, Cordes et Phénomènes critiques* (Elsevier, New-York, 1989).
- [4] N. D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1307 (1968).
- [5] C. Lhuillier and G. Misguich, Frustrated quantum magnets, in *High Magnetic fields*, edited by C. Berthier, L. P. Lévy, and G. Martinez, p 161 (Lecture Notes in Physics Vol 595, Springer, 2002); arXiv : cond-mat/0109146.
- [6] C. Lhuillier and G. Misguich, Two-dimensional quantum antiferromagnets, in *Frustrated spin systems*, edited by H. T. Diep (World-Scientific, 2003); arXiv : cond-mat/0310405.
- [7] E. Dagotto and T. M. Rice, *Science* **271**, 618 (1996)
- [8] P. Lecheminant, One-dimensional quantum spin liquids, in *Frustrated spin systems*, edited by H. T. Diep (World-Scientific, 2003); arXiv : cond-mat/0306520.
- [9] H. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
- [10] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Phys. Lett. A* **85**, 375 (1981).
- [11] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153 (1983).
- [12] K. Katsumata, H. Hori, T. Takeuchi, M. Date, A. Yamagishi and J. P. Renard, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 86 (1989).
- [13] E. H. Lieb, T. Schultz and D. J. Mattis, *Ann. Phys. (N.Y.)* **16**, 407 (1961).
- [14] M. B. Hastings, *Phys. Rev. B* **69**, 104431 (2004).
- [15] S. P. Strong and A. J. Millis, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2419 (1992).
- [16] S. R. White, R. M. Noack and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 886 (1994).
- [17] M. Azuma *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3463 (1994).
- [18] G. Chaboussant *et al.*, *Phys. Rev. B* **55**, 3046 (1997).
- [19] M. Oshikawa, M. Yamanaka and I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1984 (1997).
- [20] K. Kawano and M. Takahashi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 4001 (1997).
- [21] K. Tandon, S. Lal, S. K. Pati, S. Ramasesha and D. Sen, *Phys. Rev. B* **59**, 396 (1999).
- [22] E. Orignac, R. Citro and N. Andrei, *Phys. Rev. B* **61**, 11533 (2000).
- [23] J.-B. Fouet, A. Läuchli, S. Pilgram, R. M. Noack and F. Mila, *Phys. Rev. B* **73**, 014409 (2006).
- [24] R. Citro, E. Orignac, N. Andrei, C. Itoi and S. Qin, *J. Phys : Condens. Matter* **12**, 3041 (2000).
- [25] L.-P. Lévy, *Magnétisme et supraconductivité* (EDP Sciences, 1997).
- [26] E. Fradkin, *Field theories of condensed matter systems* (Addison-Wesley, 1991).
- [27] J. Klauder, *Phys. Rev. D* **19**, 2349 (1979).
- [28] D.-H. Lee and M. P. A. Fisher, *Int. J. Mod. Phys. B* **5**, 2675 (1991).
- [29] A. M. Tsvelik, *Quantum field theory in condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2007).
- [30] T. Giamarchi, *Quantum physics in one dimension* (Oxford University Press, 2004).
- [31] S. Nishimoto, Y. Fuji and Y. Ohta, arXiv :1102.4559.
- [32] A. W. Sandvik, AIP Conf. Proc. **1297**, 135 (2010).
- [33] D. Poilblanc and N. Laflorencie, Simulations of pure and doped low-dimensional spin-1/2 systems, in *Quantum Magnetism*, edited by U. Schollwöck *et al.* (Springer, 2004).
- [34] G. Roux, *Echelles de spins dopées sous champ magnétique*, PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse 3 (2007).
- [35] C. Lanczos, *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **45**, 255 (1950).
- [36] P. Calabrese and J. Cardy, *Int. J. Quant. Inf.* **4**, 429 (2006).