

Université Claude Bernard Lyon 1  
Ecole Normale Supérieure de Lyon

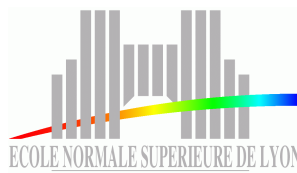
Laboratoire de Physique

Stage de M2

Responsable du Stage: Etera Livine

# Gravité Quantique en trois dimension

Guillaume RAYNAUD



Lyon, 15 août 2009

## Résumé

Nous montrons que la quantification canonique de la gravité quantique en trois dimension est équivalente, dans le sens d'égalité de fonction de partition, à la quantification covariante introduite dans le modèle de Ponzano-Regge. Pour arriver à ce résultat, nous partons du modèle défini dans [2] et nous définissons des contraintes scalaire et vectorielles en s'inspirant du cas continu. Nous montrons qu'il est possible de passer de ces contraintes à la contrainte de courbure à une condition analogue au cas continu, nomément que la triade est non-dégénérée. Enfin nous parvenons à l'équivalence des deux approches de quantification.

## Abstract

The aim of this paper is to give a proof of the equivalence between the canonical and covariant approach of the quantification of three-dimensional lattice quantum gravity. We start from the model of [2] and then define vectorial and scalar constraints. We show that it is possible to pass from these constraints to the curvature constraint as in the continuum case. Finally, we conclude that the partition function of the Ponzano-Regge model is the same than the one obtained when we consider vectorial and scalar constraints.

# 1 Introduction

Comme l'enseignement principal de la relativité générale est que la dynamique tient de la géométrie, et celui de la mécanique quantique est que toute dynamique est quantifiée; nous nous attendons à ce qu'une théorie de la gravité quantique nous donne une théorie de quantification de la géométrie, et donc une quantification de l'espace-temps. Ainsi on aurait des états quantiques superposables et des sortes d'opérateurs agissant sur ces états. Une hypothèse possible est que ces états de géométries soient en fait des états de géométries discrètes, tout en redonnant une géométrie continue dans une certaine limite (par exemple limite classique).

Une des approches à l'heure actuelle vérifiant les hypothèses ci-dessus est appelée théorie quantique des boucles. Elle se propose de changer de variables principales (typiquement une métrique) au niveau classique pour en considérer d'autres (typiquement une connection et une triade). On a alors à faire à une reformulation de la théorie classique de la gravité, et l'on se rapproche plus d'une théorie de jauge. Le programme est alors de quantifier cette théorie. Dans tout le papier, nous étudions exclusivement la gravité en trois dimension et euclidienne, ie avec le groupe de structure compact  $SU(2)$ . Nous faisons ce choix pour plusieurs raisons. D'une part, le nombre de dimension est faible ce qui rend les calculs explicites plus facile. D'autre part, la gravité en trois dimension est une théorie dite topologique. Cela signifie qu'au final il n'y a pas de degré de liberté physique, comme on pourra le voir dans la première partie. Une autre reformulation est de dire qu'il n'y a pas de graviton. On s'attend donc à une théorie plus facile à comprendre. Enfin, nous regardons la gravité euclidienne ce qui signifie que nous utiliserons un groupe de jauge compact. Cela rend les calculs plus simples puisque nous avons automatiquement une mesure sur ce type de groupe, et donc nous pouvons intégrer sur un domaine fini. Le fait que nous soyons en trois dimension ne rend pas pour autant l'étude de la théorie inutile car il est attendu qu'une théorie de la gravité quantique en trois dimension ait des problèmes en communs avec celle en quatre dimension. On parle alors d'une théorie jouet.

Après avoir rappeler le programme de Dirac pour les systèmes contraints, nous étudions la gravitation euclidienne en trois dimension via le formalisme du premier ordre. Ceci introduit les concepts de triade et de connection de spin, concepts permettant de définir une action de Palatini, équivalente à celle d'Hilbert-Einstein. Le passage au Hamiltonien révèle alors qu'il n'est composé que de contraintes, ie de fonctions des champs canoniques, qui doivent être mises à zéro sur la surface dite de contrainte. L'étude se poursuit avec le calcul des crochets de Poisson de la projection de ces contraintes. La projection est le premier pas vers la théorie quantique à boucle. En effet cette dernière se propose, après avoir défini un espace de Hilbert composé de réseaux de spins - objets géométriques discrets, de prendre en compte ces contraintes projetées pour obtenir les espaces dits physiques de la gravitation. La deuxième partie est alors consacrée à la quantification covariante de l'action de Palatini via le modèle de Ponzano-Regge. Ce modèle permet de calculer la fonction de partition de la gravité et surtout de fournir un produit scalaire, dit physique, pour les réseaux de spins; et donc des états quantiques de la gravité. Cela fournit donc un véritable espace de Hilbert pour les états physiques et conclut l'approche covariante puisque toutes les contraintes furent présent en compte. La dernière partie se propose de quantifier l'approche canonique (et discrète) de la gravité. Ainsi, et c'est là l'originalité du papier, nous essayerons de montrer que cette quantification est équivalente, par égalité des fonctions de partition, à la quantification covariante étudiée juste avant. Comme nous le verrons des problèmes apparaissent, à plusieurs reprises nous obligeant quelque peu à ruser parvenir à notre but.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Gravitation en trois dimensions</b>	<b>5</b>
2.1	L'approche de Dirac pour les systèmes contraints . . . . .	5
2.2	Formalisme du premier ordre . . . . .	5
2.3	Contraintes et symétries . . . . .	6
2.4	Réseaux de spins . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Quantification covariante et discrète</b>	<b>10</b>
3.1	Modèle de Ponzano-Regge . . . . .	10
3.2	Ponzano-Regge comme un projecteur . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Quantification canonique et discrète</b>	<b>13</b>
4.1	Description du modèle . . . . .	13
4.2	Contraintes de Gauss et de courbure . . . . .	14
4.3	Contraintes scalaire et vectorielles . . . . .	14
4.4	Fonction de partition du modèle . . . . .	15
<b>A</b>	<b><math>\mathfrak{su}(2)</math> et <math>SU(2)</math></b>	<b>18</b>
A.1	Matrices de Pauli . . . . .	18
A.2	$\mathfrak{su}(2)$ . . . . .	18
A.3	$SU(2)$ . . . . .	18
A.4	Symboles $3j$ et $6j$ . . . . .	19

## 2 Gravitation en trois dimensions

### 2.1 L'approche de Dirac pour les systèmes contraints

Le programme de Dirac se propose de quantifier des systèmes contraints, ie des systèmes présentant des équations (de contraintes) liant les variables de phase  $\{(p, q)\}$  entre elles. Elles sont notées  $\psi_a(p, q)$ . L'indice  $a$  sert donc à labéliser les contraintes et parcourt donc le groupe dit de jauge. Si les contraintes sont stables par crochets de Poisson, nous disons qu'elles sont premières classes.

Les contraintes  $\psi$  définissent une surface de contraintes [ou de contrôle] lorsqu'elles sont mises à zéro, et nous obtenons un hamiltonien  $H$  sur cette surface. Ainsi nous écrivons l'action d'un système contraint comme

$$S = \int dt \vec{q} \cdot \dot{\vec{p}} - H_0[p, q] - u^a \psi_a[p, q]$$

où l'hamiltonien  $H_0$  ne doit coïncider avec  $H$  que sur la surface de contrainte a priori. On peut alors poser  $H = H_0[p, q] + u^a \psi_a[p, q]$  pour obtenir les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_a &= 0 \\ \dot{\vec{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \end{aligned}$$

J'en viens maintenant aux quantités physiques. Les observables ne dépendent que des points définissant la surface de contrainte, puisque ceux à l'extérieur ne seront jamais atteints. Cependant on peut supposer que leurs représentations sont définies sur l'espace entier, et que deux représentations d'une même observable sont équivalentes si elles sont égales sur la surface de contraintes. Mais les libertés de jauge nous contraignent à ne considérer que des quantités mesurables et ayant une évolution temporelle déterministe. Les observables physiques sont définies comme celles étant invariantes de jauge, donc comme celles qui ont un crochets de Poisson nul avec les contraintes de premières classe. Une charge conservée  $Q$  est alors une quantité telle que  $\{Q, H_0\} = 0$  et engendre une transformation sur la quantité  $F$  comme  $\{F, Q\} = \delta F$ .

Passons maintenant à la quantification des systèmes contraints. Nous partons d'un espace des états, et nous disons que les états physiques sont ceux qui sont dans le noyau de chaque opérateurs de contraintes. Les observables physiques sont celles qui ont un commutateur nul avec les opérateurs de contraintes de première classe et ce, sur la surface de contrôle. La prochaine étape est de munir cet espace des états d'un produit scalaire tel que les opérateurs physiques soient hermitiens. Le programme de Dirac ne fournit pas de méthode générale pour cette étape non-triviale. La première approche est de chercher un tel produit scalaire sur l'espace de tous les états. On intègre alors les contraintes une fois la loi trouvée, et l'on regarde si le produit interne est encore valable une fois celles-ci prises en compte.

La deuxième approche est de considérer d'abord les contraintes, puis de chercher un produit scalaire sur la surface de contraintes. Cette méthode a le mérite de fonctionner si nous avons assez de contraintes à disposition. Enfin, et c'est le cas de la théorie quantique à boucles, on peut prendre en compte quelques contraintes, chercher un produit scalaire viable, et considérer les contraintes inutilisées pour construire l'espace de Hilbert physique tout en espérant que le produit interne soit encore valide.

### 2.2 Formalisme du premier ordre

En trois dimension et dans le formalisme du premier ordre, l'espace-temps est une variété différentiable  $\mathbb{M}$  de dimension trois. On considère alors un fibré principal au-dessus de  $\mathbb{M}$  de groupe de structure  $SU(2)$ . Nous avons donc à notre disposition une connexion  $A$ , vue comme une 1-forme sur  $\mathbb{M}$ , prenant ses valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . Nous considérons d'autre part, un élément du fibré des repères au dessus de la variété  $\mathbb{M}$ . Ainsi au-dessus de chaque point de  $\mathbb{M}$  se trouve un repère, composé de 1-formes à valeur dans  $\mathfrak{su}(2)$ , et une connexion nous disant comment passer d'un repère associé à un point  $p$  à un repère associé à un point  $\tilde{p}$ . Le groupe de structure quant à lui permet de passer d'un repère à un autre tout en restant au même point sur la variété. On appelle une telle transformation, une transformation de jauge.

Les variables dynamiques dans le formalisme du premier ordre sont la connexion  $A(x) = A_a^i(x) dx^a \tau_i$ , dite de spin, et les 1-formes  $e(x) = e_a^i(x) dx^a \tau_i$  regroupées dans une triade. Les indices du début de l'alphabet tels  $a, b, c, d, \dots$  sont des indices, dits externes, d'espace-temps, ie qu'ils prennent les valeurs  $0, 1, 2$ ; et les indices tels que  $i, j, k, l, m, \dots$  sont des indices, dits internes, labelisant une base  $\{\tau_i\}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  et donc prennent les valeurs  $1, 2, 3$ .

Les indices internes sont montés ou descendus avec une métrique plate de signature  $(+++)$  dénotée  $\eta$ . La connexion de spin permet de définir une 2-forme à valeur dans  $\mathfrak{su}(2)$ , appelée courbure de la connexion, et notée  $F$  :

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \eta^{ij} \epsilon_{jkl} A_a^k A_b^l$$

mais aussi une dérivée covariante associée à la connexion  $A$  :

$$D_a[e^i(x)] = \partial_a[e^i(x)] + A_a^{ij} e_j(x)$$

L'action équivalente à celle de Hilbert-Einstein en trois dimensions s'écrit alors :

$$S_P[A, e] = \int_{\mathbb{M}} \text{Tr}(e \wedge F) = \int_{\mathbb{M}} d^3x \eta_{ij} \epsilon^{abc} e_a^i F_{bc}^j$$

Les equations du mouvement correspondantes sont  $F = 0$  et  $D_a[e^i(x)] = 0$ . En effet, une variation de l'action par rapport à  $A$  et  $e$  nous donne :

$$0 = \int_{\mathbb{M}} \text{Tr}(e \wedge \delta F + \delta e \wedge F) = \int_{\mathbb{M}} \text{Tr}(e \wedge D[\delta A] + \delta e \wedge F) = \int_{\mathbb{M}} \text{Tr}(D[e] \wedge \delta A + \delta e \wedge F)$$

Ainsi la courbure est plate et la torsion nulle. Par conséquent, nous en déduisons que la connexion  $A$  n'est autre que la connexion de Levi-Cevita usuelle et que ces égalités sont les analogues de l'équation d'Einstein de la relativité générale dans le vide.

Dans le cas classique, le lien avec le formalisme du deuxième ordre se fait via l'égalité  $g_{ab} \doteq \eta_{ij} e_a^i e_b^j$  et la supposition que la triade est inversible. Dans le cas quantique, il est supposé que que les triades non-inversibles puissent jouer un rôle et donc qu'il est nécessaire de les prendre en compte lors du calcul de la fonction de partition. Ceci fait encore débat aujourd'hui.

### 2.3 Contraintes et symmétries

Nous regardons maintenant l'aspect canonique du formalisme du premier ordre. Pour cela on découpe  $\mathbb{M}$  en une surface  $\Sigma$  évoluant dans le temps et décrite par le jeu de coordonnées  $\{x_a, x_b\}$ . Pour décrire cette évolution, on réécrit l'action de Palatini en mettant en évidence les dérivées temporelles (direction  $x_0$ ) de la connexion  $A$ . Ainsi nous brisons la covariance manifeste de l'action et nous obtenons alors la dérivée temporelle des champs physiques multipliés par leur moment conjugués, plus une somme de contraintes multipliées par des coefficients de Lagrange. Nous pouvons donc réécrire l'action en terme d'un hamiltonien  $H[A, e]$  qui se trouve être composé uniquement de contraintes :

$$S_P[A, e] = \int_{\mathbb{R}} dx_0 \int_{\Sigma} d^2x \epsilon^{0ab} e_a^i \partial_0(A_b^i) + \underbrace{e_0^i \epsilon^{0ab} F_{ab}^i + A_0^i \epsilon^{0ab} D_a[e_b^i]}_{H[A, e]}$$

Nous retrouvons alors les deux équations du mouvement  $F = 0$  et  $D_a[e^i(x)] = 0$  appelées respectivement contrainte de courbure (nulle) et contrainte de Gauss. Les variables canoniques sont la restriction à la surface  $\Sigma$  de la connexion et de la triade, et le crochet de Poisson fondamental est alors - tous les autres étant nuls :

$$\{A_a^i(x), e_b^j(y)\} = \epsilon_{0ab} \eta^{ij} \delta^{(2)}(x, y)$$

Suivant la théorie des systèmes contraints établie par Dirac, nous devons calculer les crochets de Poisson des deux contraintes. En effet, les contraintes de premières classes, ie celles dont les crochets de Poisson sont proportionnels de nouveau aux contraintes, engendrent les transformations de jauges. Ainsi, si  $C[A, e]$  est une contrainte de première classe alors sous la transformation générée par  $C$ , la quantité  $R$  se transforme en  $R + \{C[A, e], R\}$ . En posant  $\epsilon^{0ab} = \epsilon^{ab}$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \{\epsilon^{ab} D_a[e_b^i], \epsilon^{cd} D_c[e_d^j]\} &= 2\eta^{ij} \epsilon^{\alpha\gamma} D_\alpha[e_\gamma^j] \\ \{\epsilon^{ab} F_{ab}^i, \epsilon^{cd} D_c[e_d^j]\} &= 2\eta^{ij} \epsilon^{\alpha\gamma} F_{\alpha\gamma}^i \\ \{F_{ab}^i, F_{cd}^j\} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Nous pouvons alors regarder l'action des contraintes sur les champs  $A$  et  $e$  :

$$\begin{aligned}\{\lambda D[e], e\} &= [e, \lambda] \\ \{\lambda D[e], A\} &= D[\lambda] \\ \{\phi F, e\} &= D[\phi] \\ \{\phi F, A\} &= 0\end{aligned}$$

Nous en concluons que les contraintes forment l'algèbre de Poincaré, que la contrainte de Gauss génère les transformations de jauge  $SU(2)$  et que la contrainte de courbure engendre les translations locales. Notons au passage qu'il est possible de réécrire l'action de la gravité en une théorie de Chern-Simons. Il n'y a alors plus qu'une seule connexion qui regroupe à la fois la triade et la connexion de spin. La symétrie de jauge locale dans cette formulation reproduit alors les deux symétries ci-dessus. C'est en fait cette dernière qui correspond aux véritables difféomorphismes.

Une reformulation de la contrainte de courbure est possible et surtout utile lorsque l'on veut quantifier en utilisant l'approche canonique. En effet, en utilisant une nouvelle triade  $E_i^a = \epsilon^{ab} \eta_{ij} e_j^b$  et le vecteur normal  $n^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon^{ijk} E_j^a E_k^b$ , nous avons les égalités :

$$\begin{aligned}N^i F_i &= N^a V_a + NH \\ N^i = \epsilon_{ab} N^a E_i^b + N \frac{n^i}{\sqrt{\det[g]}} &\iff N_a = \epsilon_{ijk} \frac{n^i E_j^a N^k}{\det[g]} \text{ et } N = \frac{N^i n_i}{\sqrt{\det[g]}} \\ V_a &= e_a^i \cdot \vec{F} = e_i^b F_{ab}^i \\ V_0 \doteq H &= \frac{1}{2\sqrt{\det[g]}} \epsilon_{ijk} F_{ab}^i E_j^a E_k^b\end{aligned}\tag{2}$$

Ainsi nous voyons que la contrainte de courbure se décompose en deux contraintes. La première est suivant le shift  $N_a$  et est appelée contrainte vectorielle. Elle engendre les difféomorphismes spaciaux. La seconde est appelée contrainte scalaire et est suivant le lapse  $N$ . Elle correspond aux difféomorphismes temporels. D'autre part, nous voyons que l'inversion est toujours possible entre les coefficients de la courbure et ceux des contraintes projetées, tant que la triade est inversible - chose que nous supposons dans ce rapport. Il est intéressant de regarder l'algèbre de ces trois contraintes, ie les crochets de Poisson mutuels :

$$\begin{aligned}\{V_a, V_b\} &= \partial_a V_b - \partial_b V_a + V_c (\overrightarrow{A}_a \cdot \overrightarrow{E}_b \wedge \overrightarrow{E}^c - \overrightarrow{A}_b \cdot \overrightarrow{E}_a \wedge \overrightarrow{E}^c) \\ \{V_0, V_a\} &= -2 \partial_a V_0 + \partial_b V_0 E_a^k E_k^b + V_0 \overrightarrow{A}_a \cdot \overrightarrow{E}_c \wedge \overrightarrow{E}^c \\ \{H, H\} &= 0\end{aligned}$$

Nous constatons alors que les crochets de Poisson sont encore fermés, et donc que nous avons affaire à des contraintes engendrant des transformations de jauge, mais surtout que les crochets de Poisson s'expriment avec des dérivées temporelles de contraintes. Cela peut signifier que la résolutions de ces contraintes est difficile.

## 2.4 Réseaux de spins

Les réseaux de spins sont utilisés pour quantifier la gravitation dans les cadre de la théorie quantique à boucle. Le programme consiste tout d'abord à définir un espace de Hilbert pour la théorie, puis de prendre en compte les deux contraintes. L'approche de la théorie quantique à boucle se fait en considérant d'abord la contrainte de Gauss, puis en utilisant la projection de la courbure en contraintes vectorielles et scalaire. Une fois toutes les contraintes prises en compte, nous obtenons l'espace de Hilbert des états dits physiques.

Pour commencer on se place sur la surface  $\Sigma$  et on considère les connexions  $A_a$  avec  $a = 1, 2$ . Les fonctions d'onde utilisées font appel à des holonomies. Ces dernières sont définies en considérant un chemin  $\gamma$  paramétrisé par la variable  $s \in [0, 1]$  et sont à valeur dans le groupe  $SU(2)$  :

$$h_\gamma[A] \doteq P \exp \int_0^1 ds \frac{d\gamma^a}{ds} A_a^i \tau_i$$

où  $\{\tau_i\}$  est une base de  $\mathfrak{su}(2)$ , et  $P$  désigne l'exponentielle ordonnée. Pour obtenir les fonctions d'onde, on se munie d'un ensemble de chemins constituant un graph  $\Gamma$  [ $N$  liens et  $V$  vertex] et d'une fonction  $\phi$  prenant  $N$  éléments de  $SU(2)$  à

valeur dans  $\mathbb{C}$ . La fonction d'onde est alors est définie comme:

$$\Psi_{\Gamma, \phi}[A] = \phi(h_{\gamma_1}[A], \dots, h_{\gamma_N}[A])$$

L'ensemble des fonctionnelles cylindriques est alors muni d'un produit scalaire via l'égalité:

$$\langle \Psi_{\Gamma, \phi_1}[A] | \Psi_{\Gamma, \phi_2}[A] \rangle = \int_{(SU(2))^N} dg_1 dg_2 \dots dg_N \overline{\phi_1(g_1 \doteq h_{\gamma_1}[A], \dots, g_N \doteq h_{\gamma_N}[A])} \phi_2(h_{\gamma_1}[A], \dots, h_{\gamma_N}[A])$$

grâce à la mesure de Haar présente sur  $SU(2)$ .

La seconde étape est d'élever les variables canoniques au rang d'opérateurs sur les fonctions cylindriques. Les opérateurs doivent être hermitiens et avoir des relations de commutations ressemblant au crochets de Poisson. L'opérateur correspondant à la connexion  $A$  et définit simplement par une multiplication via la trace de son l'holonomie:

$$\hat{A}[\gamma] \Psi_{\Gamma, \phi_1}[A] = \text{Tr}(h_\gamma[A]) \Psi_{\Gamma, \phi_1}[A]$$

L'opérateur correspondant à la triade est alors sensé être une dérivée par rapport à la connexion  $A$ . On s'aide de l'action de  $e$  sur une seule holonomie:

$$\hat{e}_a^i(x) h_\gamma[A] = \frac{\delta(h_\gamma[A])}{\delta A_a^i(x)} = \int_0^1 ds \frac{d\gamma^a(s)}{ds} \delta(\gamma(s), x) h_{\gamma_1} \tau_i h_{\gamma_2}$$

où  $\gamma$  passe par le point  $x$ , créant ainsi deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  [arrivant et partant du point  $x$ ], et  $\tau_i$  est un générateur de  $\mathfrak{su}(2)$ . L'action formelle de  $e$  est d'insérer un générateur de  $\mathfrak{su}(2)$  entre les deux holonomies.

La généralisation aux cas des réseaux de spins ce fait rapidement. On définit le flux  $E$  d'un élément  $e$  d'une triade comme l'intégrale de  $e$  sur le contour délimité par une surface quelconque. Ainsi l'action sur un réseau de spins quelconque est d'introduire un générateur de  $\mathfrak{su}(2)$  entre toutes les holonomies intersectant la surface d'intégration.

La troisième étape est la résolution des contraintes en elles-mêmes. L'approche de la théorie des boucles est de commencer par la contrainte de Gauss, ie celle générant les transformations de jauge. Prendre en compte cette contrainte signifie alors avoir un espace de Hilbert composé d'états invariants de jauge. Pour arriver à ce but on considère un graph  $\Gamma$  dont les liens portent un entier ou demi-entier  $j$  ainsi que la représentation dans l'espace vectoriel de dimension  $2j + 1$  de l'élément de groupe  $h_l[A]$ , élément qui n'est rien d'autre que l'holonomie de la connexion  $A$  le long du lien  $l$ . Enfin, à chaque vertex on associe un entrelaceur, entrelacant les représentations associées aux liens se rencontrant à ce vertex. Ainsi, nous voyons un entrelaceur comme un isomorphisme entre l'espace tensoriel de toutes les représentations arrivant à ce vertex et l'espace tensoriel de toutes les représentations sortant de ce vertex. On peut également voir un entrelaceur comme une map allant de l'espace tensoriel de toutes les représentations connectées au vertex (aussi bien sortantes qu'entrantes) vers l'espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . La dernière étape est alors de redefinir les réseaux de spins, sous entendu invariants de jauge, par le résultat de l'appariement des indices matriciels des entrelaceurs avec les indices matriciels des représentations des holonomies.



Par exemple nous avons le diagramme:

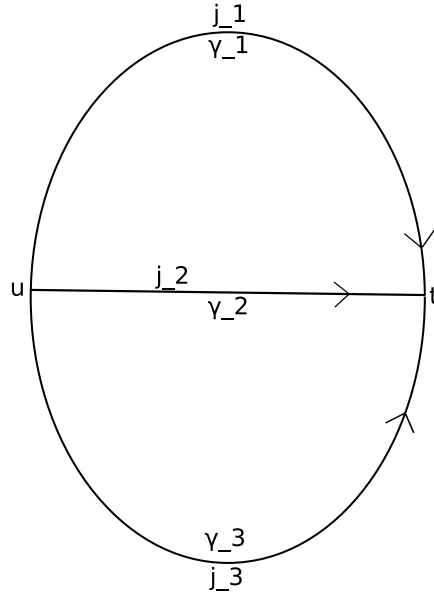


FIG. 1 – Réseau de spins

avec les entrelaceurs  $u$  et  $t$  avec des représentations  $\{j\}$ . Le réseau de spin est alors

$$\Psi(\{\gamma\}, \{j\}) = u_{j_1, j_2, j_3}^{a_1, a_2, a_3} D_{j_1}[h_{\gamma_1}[A]] |_{a_1}^{b_1} D_{j_2}[h_{\gamma_2}[A]] |_{a_2}^{b_2} D_{j_3}[h_{\gamma_3}[A]] |_{a_3}^{b_3} t_{j_1, j_2, j_3}^{b_1, b_2, b_3}$$

On montre alors que les réseaux de spins forment une base de l'espace de Hilbert des états invariants de jauge. A partir de ces considérations, on peut définir la longueur d'une courbe intersectant plusieurs fois le réseau de spin, et on est capable de montrer que cet opérateur de longueur possède un spectre discret. Ceci constitue le résultat le plus prometteur de la théorie quantique à boucles. Il resterait à tenir compte de la contrainte de difféomorphisme. Les difféomorphismes spaciaux sont pris en compte en utilisant les réseaux de spins abstraits, ie des éléments de l'espace des réseaux de spins quotienté par la relation d'équivalence suivante: deux réseaux de spins sont équivalents s'ils sont liés par un difféomorphisme. Nous obtenons alors l'espace de Hilbert cinématique.

Malheureusement, la contrainte des difféomorphismes temporels posent des problèmes. Nous savons au moins que les réseaux de spins sont modifiés au niveaux des noeuds pour former une structure en trois dimensions. C'est ici qu'intervient les mousses de spins, car celles-ci correspondent à l'histoire, ou évolution dans le temps, d'un réseau de spin. Elles fournissent une approche covariante et discrète de la gravité.

### 3 Quantification covariante et discrète

La quantification covariante fait appel au modèle de Ponzano-Regge. Il peut être vu comme une discrétisation de la gravité en trois dimension vue comme une théorie BF, mais aussi comme définissant un projecteur sur les réseaux de spins, permettant ainsi de décrire leurs évolutions. Enfin il permet de montrer que toutes les discrétisations sont équivalentes et donc que la fonction de partition est un invariant topologique.

#### 3.1 Modèle de Ponzano-Regge

Comme nous l'avons vu, la gravité peut-être formulée dans un formalisme du premier ordre. L'action la décrivant est appelée action de Palatini et il est alors naturel de considérer la fonction de partition associée, ie d'un point du vu formel

$$Z = \int_{\mathfrak{su}(2)} DA De \exp i \int_{\mathbb{M}} \text{Tr}(e \wedge F[A])$$

Ici  $\mathbb{M}$  est une variété fermée, ie sans bord. La première étape est de discrétiser cette action. Pour cela on considère une triangulation  $\Delta$  et son dual  $\Delta^*$ . Cela signifie qu'à chaque vertex, lien, surface [triangle], volume [tétraèdre] de  $\Delta$  est associé un volume, surface [plaquette], lien, vertex de  $\Delta^*$  respectivement. La connexion sur  $\mathbb{M}$  est alors la donnée d'un élément  $g_{e^*}$  du groupe  $SU(2)$  pour chaque lien  $e^*$  de  $\Delta^*$ , correspondant à l'holonomie de la connexion sur le lien considéré. La courbure est équivalente à un élément  $U_e$  du groupe  $SU(2)$ . Plus précisément, c'est le produit orienté des éléments attachés aux liens définissant une plaquette dans  $\Delta^*$ . La surface est alors duale à un lien  $e$  de  $\Delta$ . Enfin la triade est considéré comme un élément  $X_e$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  lié à une surface de  $\Delta^*$ . Physiquement, cet élément est interprété comme le flux à travers la surface de  $\Delta^*$  de la triade qui est sur les liens de  $\Delta$ .

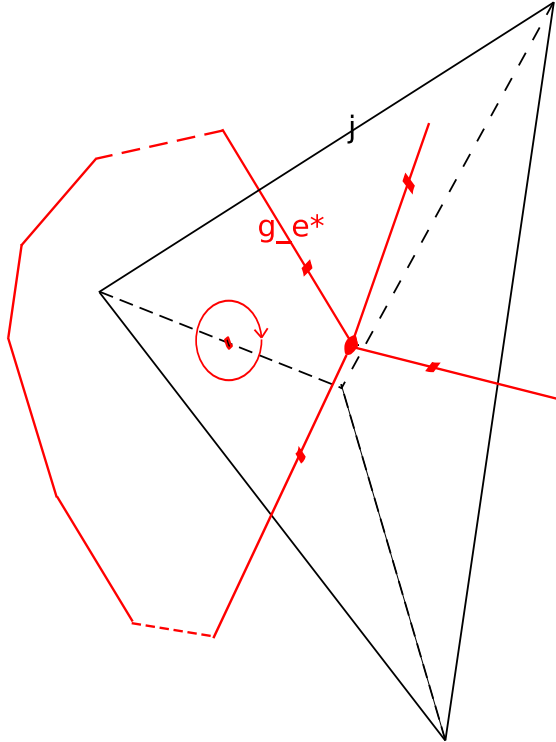


FIG. 2 – Tétraèdre et holonomie entourant un lien non dual

L'action naturelle est alors  $S = \sum_e \text{Tr}(U_e X_e)$  et la fonction de partition s'exprime donc comme :

$$Z = \int_{SU(2)} dg_{e^*} \int_{\mathfrak{su}(2)} dX_e \exp i \sum_e \text{Tr}(U_e X_e)$$

Le calcul de  $Z$  se fait en intégrant sur les variables d'algèbre de Lie. Pour cela on se sert de l'équation :

$$\forall U \in SU(2), \int_{\mathfrak{su}(2)} dX \exp(i \text{Tr}[X U]) = \delta(U) \quad (3)$$

où  $\delta(U)$  est la fonction  $\delta$  sur  $SU(2)$  appliquée à l'élément  $U$ . On a donc  $Z = \int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_e \delta(U_e)$ .

Ensuite, nous utilisons la décomposition en caractère de la fonction  $\delta$  (formule de Plancherelle):

$$\delta(U) = \sum_j \Delta_j \chi_j(U) = \sum_j \Delta_j \text{Tr}_j(U) \quad \text{où } \Delta_j = 2j + 1$$

D'où

$$Z = \int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_e \sum_{\{j\} \rightarrow e} \Delta_j \text{Tr}_j(U_e) = \sum_{\{j\} \rightarrow \{e\}} \prod_e \Delta_{j_e} \int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_e \text{Tr}_{j_e}(U_e)$$

La première somme porte sur toutes les colorations possibles d'un seul lien, tandis que la seconde porte sur toutes les colorations possibles de tous les liens.

En développant le produit sur les liens, on remarque que l'on a réalisé un produit d'intégrales de trois éléments de matrices correspondant à trois représentations d'un éléments  $g$

$$Z = \sum_{\{j\} \rightarrow \{e\}} \prod_e \Delta_{j_e} \prod_{e^*} \int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_{i=1}^3 D_{j_i}[g_{e^*}]_{b_i}^{a_i}$$

car chaque lien dual est partagé par trois holonomies, et donc porte trois colorations.

Une formule utile lie ce type d'intégrale aux symboles  $3j$ :

$$\int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_{i=1}^3 D_{j_i}[g_{e^*}]_{b_i}^{a_i} = C_{a_1}^{j_1} C_{a_2}^{j_2} C_{a_3}^{j_3} C_{b_1}^{j_1} C_{b_2}^{j_2} C_{b_3}^{j_3}$$

Un vertex dual étant 4-valent, on associe alors un des deux  $3j$  (d'un lien dual) à chaque vertex dual auquel il est connecté. On le fait de telle manière que les quatre  $3j$  d'un vertex se combinent pour former un  $6j$ , en utilisant le fait que tous les indices matriciels des représentations sont sommés grâce à la trace initiale. Finalement on a l'expression - purement géométrique - suivante pour la fonction de partition du modèle de Ponzano-Regge :

$$Z = \sum_{\{j\} \rightarrow \{e\}} \prod_e \Delta_{j_e} \prod_{v^*} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{pmatrix}$$

### 3.2 Ponzano-Regge comme un projecteur

Le modèle de Ponzano-Regge fournit un noyau d'intégration pour les états de spins de la théories des boucles. En effet, le cas de la section précédente considère une variété fermée, mais dans le cas d'un variété où il y a un bord - un réseau de spins - le modèle de Ponzano-Regge nous fournit une méthode pour décrire l'évolution du réseau initial vers le réseau final.

On considère donc le dual de deux réseaux de spins qui constituent alors les deux bords d'une triangulation d'une variété en trois dimension, variété vue comme un cylindre supposé de la forme  $\Sigma \times \mathbb{R}$ . Pour rappel, un réseau de spins est ici défini comme l'appariement d'intertwiners vivant sur les vertex [trivalents et duaux à la triangulation de  $\Sigma$ ] avec des représentation de  $SU(2)$  labélisées par un spin  $j$  vivant sur les liens [duaux à la triangulation de  $\Sigma$ ]. On écrit alors le produit scalaire physique entre ces deux réseaux comme:

$$\langle \Psi[\{g_{e^*}\}, \{j\}]_{\Gamma_f}, \Psi[\{g_{e^*}\}, \{j\}]_{\Gamma_i} \rangle = \int_{SU(2)} \prod_{e^*, e} dg_{e^*} \overline{\Psi[\{g_{e^*}\}, \{j\}]_{\Gamma_f}} \prod_e \delta(U_e) \Psi[\{g_{e^*}\}, \{j\}]_{\Gamma_i}$$

où l'intégrale est sur tous les éléments de groupe vivant sur chacun des liens duaux, aussi bien des tétraèdres du modèle de Ponzano-Regge que des deux réseaux de spins. Pour que cette expression est un sens, il faut que les liens du modèle de Ponzano-Regge connectés aux vertex duaux à un tétraèdre qui est sur le bord, soient également connectés aux vertex duaux des réseaux de spins considérés. Ainsi tout est bien défini et cohérent, notamment au niveau des holonomies. En effet, chaque face triangulaire d'un tétraèdre sur le bord de  $\mathbb{M}$  est collée à une face triangulaire d'un réseau de spins. Le calcul du produit scalaire fait intervenir les mêmes équations que pour le cas de la fonction de partition. On utilise aussi le fait que deux représentation d'un groupe compacte sont orthogonales, ie:

$$\int_{SU(2)} dg_{e^*} \prod_{i=1}^2 D_{j_i}[g_{e^*}]_{b_i}^{a_i} = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta(j_1, j_2) \delta(a_1, a_2) \delta(b_1, b_2)$$

L'expression finale est alors

$$Z = \sum_{\{j\} \rightarrow \{e\}} \prod_e \Delta_{j_e} \prod_{v^*} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{pmatrix}$$

où la coloration ne porte que sur les représentation du modèle de Ponzano-Regge et laisse les colorations des réseaux de spins intouchées.

Une propriété essentielle du modèle de Ponzano-Regge est d'être topologique, ie que les amplitudes ne dépendent pas du type de discrétisation employée. On aurait pu prendre une discrétisation avec des prismes, des cubes etc., le résultat serait le même. Cela se montre en utilisant les mouvements de Pachner. Le premier est un raffinement d'un tétraèdre en quatre autres. Il se transcrit en une relation liant un  $6j$  à quatre autres. Le deuxième mouvement est la transformation de deux tétraèdres (collés par une face commune) en un troisième. On a alors une relation entre le produit de deux symboles  $6j$  et trois symboles  $6j$ . De cette invariance d'écoule que le modèle discret décrit réellement la gravité quantique, et que ce n'est pas une simple approximation discrète.

## 4 Quantification canonique et discrète

Après avoir vu l'approche covariante via le modèle de Ponzano-Regge, nous étudions l'approche canonique. L'idée générale est de partir d'une surface discrétisée et de la décrire dans le temps. Par conséquent on aura une variété du type  $\Sigma \times \mathbb{R}$ .

### 4.1 Description du modèle

On considère toujours une triangulation  $\Delta$  de  $\Sigma$ . Ainsi nous avons qu'un vertex, lien, surface [triangle] est dual à une surface [plaquette], lien, un vertex respectivement. Les liens duaux et non duaux sont donc en bijection. Les non-duaux portent des éléments d'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , notés  $E_e$ ; et les liens duaux portent les éléments du groupes  $SU(2)$ . Ces derniers sont notés  $M_e$  et sont l'analogues de la connexion du cas continu. L'ensemble des  $E$  et  $M$  constituent alors l'espace des phases. Pour des raisons que nous expliquerons plus tard, nous considérons également les wedges, ie l'intersection des plaquettes avec la triangulation. Ainsi, en confondant surface avec contour de surface, nous voyons qu'un wedge est composé de quatre liens, deux faisant partis de l'holonomie définissant la plaquette projetée, et deux faisant partis de la triangulation  $\Delta$ .

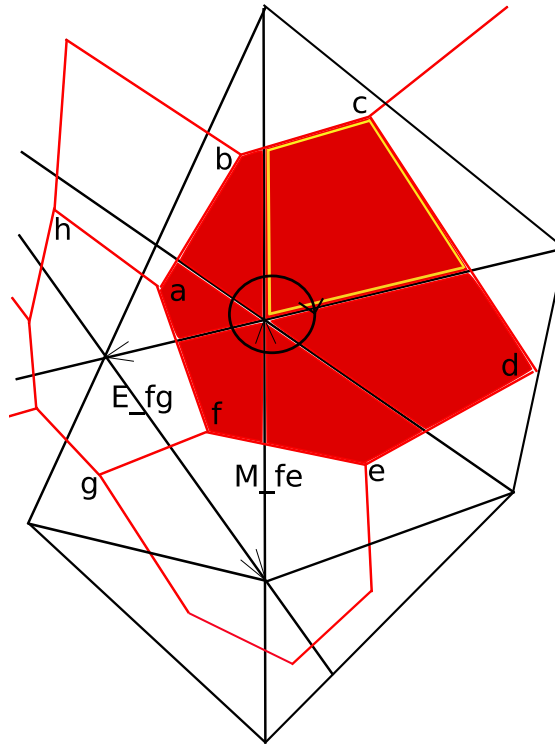


FIG. 3 – Triangulation d'une surface avec une plaquette colorée en rouge et un wedge de bordure jaune.

La prochaine étape est d'introduire des crochets de Poisson et pour cela nous introduisons les notations suivantes: un vertex dual sera dénoté par  $a, b, c, d, \dots$ , les  $E$  et les  $M$  seront alors indexés par les deux vertex auxquels la variable du groupe est connectée. Ainsi nous écrirons  $M_{ab}$  pour la connexion allant du vertex dual  $b$  vers le vertex dual  $a$ . L'interprétation physique de l'élément  $M$  se mime sur le cas de la connexion  $A$ : à chaque triangle de  $\Delta$  est associé un repère, composé des trois vecteurs  $E$  de  $\mathfrak{su}(2)$  formant ce triangle, et pour passer d'un triangle à un autre; ie d'un repère à un autre, nous utilisons les matrices de transitions  $M$ . La transcription en termes mathématiques se fait par les égalités:

$$\begin{aligned} M_{ab}|_j^i M_{ba}|_k^j &= \delta(i, k) \\ M_{ab}|_j^i M_{ab}|_j^k &= \eta^{ik} = \delta(i, k) \\ E_{ba}^i M_{ab}|_j^i &= -E_{ab}^j \end{aligned}$$

Les crochets de Poisson non-nuls sont alors:

$$\begin{aligned} \{E_{ab}^i, E_{ab}^j\} &= \epsilon^{ijk} E_{ab}^k \\ \{E_{ab}^i, M_{ab}|_k^j\} &= \epsilon^{iju} M_{ab}|_k^u \end{aligned}$$

## 4.2 Contraintes de Gauss et de courbure

Ensuite nous étudions les contraintes équivalentes à la contraintes de Gauss et de courbure nulle. Dans le cas du modèle de Ponzano-Regge la courbure était le produit des éléments de groupes présents sur les liens duaux et formant une plaquette (surface fermée duale à un lien de la triangulation). Ici, nous adoptons la même démarche pour former la courbure avec le produit des matrices  $M$  appartenant à une plaquette (duale à un vertex de  $\Delta$ ).

La courbure est donc un élément de  $SU(2)$  et la contrainte de courbure nulle correspond alors à le mettre à l'unité. Ainsi nous posons, sur la surface de contraintes:

$$W_a|_j^i \doteq [M_{ab}M_{bc} \cdots M_{ka}]|_k^j \approx \delta(j, k)$$

où  $b, c, d, \dots, k$  sont des triangles participant à l'holonomie  $W_a$  partant du vertex dual  $a$ .

La contrainte de Gauss est obtenue en utilisant la formule de Stokes. En effet, nous avons formellement

$$\int_V D[e] = \int_{\partial V} e = 0 \Rightarrow \sum E_{ab}^i = 0$$

Autrement dit, la contrainte de Gauss n'est que la conditions que la surface délimitée par les trois vecteurs  $E$ , autour d'un vertex dual  $a$ , soit un triangle (fermé). Ainsi nous posons, sur la surface de contraintes:

$$J_a^i \doteq E_{ab}^i + \cdots E_{ka}^i \approx 0$$

où  $b, \dots, k$  désigne des triangles voisins au triangle  $a$ .

Enfin nous regardons les crochets de Poisson des deux contraintes entre-elles, pour voir si nous avons de nouveau des contraintes de premières classes. Pour cela, nous projettons la courbure sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ , ie que nous définissons  $P_{v^*}^i \doteq \epsilon_{ijk} W_{v^*}|_k^j$ . Après calcul nous obtenons

$$\begin{aligned} \{J_a^i, J_a^j\} &= \epsilon_{ijk} J_a^k \\ \{J_a^i, W_a|_k^j\} &= \epsilon_{iju} W_a|_k^u - \epsilon_{iuk} W_a|_u^j \\ \{P_a^i, P_a^j\} &= 0 \end{aligned}$$

Nous voyons donc que les contraintes sont bien de première classe et donc qu'elles engendrent des transformations de jauge. On peut mettre ces relations en parallèle avec celles de l'algèbre de Poincaré comme au (1). Leurs actions sur les champs  $E$  et  $M$  sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \{J_a^i, E_{ak}^j\} &= \epsilon_{ijk} E_{ak}^k \\ \{J_a^i, M_{ak}|_k^j\} &= \epsilon_{iju} M_{ak}|_k^u \\ \{\phi_d P_v^d, E_{ak}^j\} &= \phi_j \\ \{\phi_d P_v^d, M_{ak}|_k^j\} &= 0 \end{aligned}$$

où  $k$  est un vertex (dual) voisin de  $a$ .

Nous concluons donc que les  $J$  génèrent les transformations  $SU(2)$  comme prévu - sorte de rotations, et que les  $P$  génèrent les translations locales tout comme le faisait la courbure  $F$ .

## 4.3 Contraintes scalaire et vectorielles

Comme pour le cas continu, et dans l'optique de la théorie des boucles, nous cherchons maintenant à projeter la contrainte de courbure en contraintes vectorielles et scalaire. Pour cela, nous mimons symboliquement l'expression du cas continu. Les expressions seront valables pour un vertex dual  $a$  fixé, et nous notons les trois liens (non-duaux) composant un triangle par  $k, k+1, k+2$  [désignant donc les trois vertex duaux entourant  $a$ ]. Nous savons que chaque lien de  $\Delta$  coupe deux plaquettes. Nous supposons alors que  $E_{ak}$  coupe les plaquettes numéro 1 et 2. Ainsi on aurait naïvement:

$$\begin{aligned} V_{ak} &= (\overrightarrow{P_{1,a}} + \overrightarrow{P_{2,a}}) \cdot \overrightarrow{E_{ak}} \\ V_a(k, k+1) &= (\overrightarrow{P_{1,a}} + \overrightarrow{P_{2,a}} + \overrightarrow{P_{3,a}}) \cdot \overrightarrow{E_{ak} \wedge E_{a(k+1)}} \end{aligned}$$

Il y aurait donc trois contraintes scalaires, formées par produit scalaire (sur  $\mathfrak{su}(2)$ ) du produit vectoriel de deux liens non duaux avec la somme des plaquettes qui intersectent ces dits liens. Les contraintes vectorielles seraient aux nombres de trois, formées du produit scalaire d'un vecteur d'un lien non-dual, avec la somme des plaquettes qui intersectent se vecteur. Ces définitions fournissent des contraintes invariantes de jauge, ie  $\{V_{a(k)}, J_a\} = 0$ , et aussi des contraintes de

premières classes, mais leurs crochets de Poisson entre-elles ne miment pas ceux du cas continu. Le mieux est alors de faire une sorte de moyenne par vertex dual. Ainsi nous considérons  $\overrightarrow{P}_a \doteq \overrightarrow{P}_{1,a} + \overrightarrow{P}_{2,a} + \overrightarrow{P}_{3,a}$ , et nous posons :

$$\begin{aligned} V_{ak} &= \overrightarrow{P}_a \cdot \overrightarrow{E}_{ak} \\ V_a &= \overrightarrow{P}_a \cdot \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{E}_{ak} \wedge E_{a(k+1)} \quad \text{où } E_{a4} \doteq E_{a1}. \end{aligned}$$

Dans ce cas nous obtenons encore des contraintes invariantes de jauge, et leurs crochets de Poisson peuvent être considérés comme analogues à ceux du cas continu :

$$\begin{aligned} 4\{V_{ak}, V_{ap}\} &= V_{ap} \text{Tr}(W_1 - W_2) - V_{ak} \text{Tr}(W_3 - W_1) + V_{ak} \frac{\overrightarrow{(W_3 - W_1)E_{ak}} \cdot \overrightarrow{E}_{ak}}{\|\overrightarrow{E}_{ak}\|} - V_{ap} \frac{\overrightarrow{(W_1 - W_2)E_{ap}} \cdot \overrightarrow{E}_{ap}}{\|\overrightarrow{E}_{ap}\|} \\ \{V_{ak}, V_a\} &= -V_a \text{Tr}(W_1 - W_2) + V_a \frac{\overrightarrow{(W_1 - W_2) \sum_{k=1}^3 E_{ak} \wedge E_{a(k+1)}} \cdot \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{E}_{ak} \wedge E_{a(k+1)}}{\|\sum_{k=1}^3 \overrightarrow{E}_{ak} \wedge E_{a(k+1)}\|} \end{aligned}$$

où le vecteur  $E_{ak}, E_{ap}$  intersecte l'holonomie 1 et 3 ; 1 et 2, respectivement. Ainsi, formellement nous identifions la dérivée temporelle avec la trace. Notons également que nous supposons la norme des vecteur  $E$  non nulle. L'étude de l'action d'une combinaison linéaire de contraintes sur un triangle de  $\Delta$  nous confirme de plus que la seule quantité invariante sous ces transformations est le fait que le triangle soit de nouveau fermé à l'arrivée. Ceci est logique et est attendu puisque si ces contraintes sont les analogues des difféomorphismes, elle doivent laisser le seul invariant topologique que possède un triangle, ie le fait d'être un triangle.

#### 4.4 Fonction de partition du modèle

Nous voulons maintenant savoir si la fonction de partition du modèle avec les contraintes  $V$  est équivalente à celle du modèle de Ponzano-Regge . Si c'est le cas nous dirons alors que la discrétisation de la gravité euclidienne en trois dimension sera équivalente aussi bien dans l'approche covariante que canonique.

Nous sommes donc amené à calculer

$$\begin{aligned} Z &= \int_{SU(2)} D[M] \int_{su(2)} D[E]D[N] \exp i \int dt \text{Tr} \left[ \sum_a (\tilde{N}_a V_a + \sum_{e_a} \bar{N}_{a,e_a} V_{a,e_a}) \right] \\ Z &= \int_{SU(2)} D[M] \int_{su(2)} D[E]D[N] \exp i \int dt \text{Tr} \left[ \sum_{a,e_a,pl_a} P_{pl_a} (\tilde{N}_a E_{a,e_a} + \bar{N}_{a,e_a} E_{a,e_a} \wedge E_{a,e_a+1}) \right] \end{aligned}$$

Cependant cette intégrale est difficile à calculer lorsque l'on se ramène à des intégrales sur  $\mathbb{R}^3$  du fait du produit vectoriel. Pour éviter ce calcul, nous montrons qu'il est possible de remonter à la contrainte de courbure nulle, ie à une équivalence du type (2). En effet, en posant  $\forall a, N_{a,pl_a} = \sum_{e_a} N_{a,pl_a,e_a}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{a,pl_a} N_{a,pl_a} P_{a,pl_a} &= \sum_{a,e_a,pl_a} N_{a,pl_a,e_a} P_{a,pl_a} = \sum_{a,e_a,pl_a} P_{pl_a} (\tilde{N}_a E_{a,e_a} + \bar{N}_{a,e_a} E_{a,e_a} \wedge E_{a,e_a+1}) \\ &\iff \overrightarrow{N_{a,pl_a,e_a}} = \overrightarrow{\bar{N}_{a,e_a} E_{a,e_a}} + \tilde{N}_a \overrightarrow{E_{a,e_a} \wedge E_{a,e_a+1}} \\ &\iff \bar{N}_{a,e_a} = \frac{\overrightarrow{N_{a,pl_a,e_a}} \cdot \overrightarrow{E_{a,e_a}}}{\|\overrightarrow{E_{a,e_a}}\|} \quad \text{et} \quad \tilde{N}_a = \frac{\overrightarrow{N_{a,pl_a,e_a}} \cdot \overrightarrow{E_{a,e_a} \wedge E_{a,e_a+1}}}{\|\overrightarrow{E_{a,e_a} \wedge E_{a,e_a+1}}\|} \end{aligned}$$

Ainsi on considère la contrainte  $\sum_{a,pl_a} N_{a,pl_a} P_{a,pl_a}$  dans l'action discrétisée, ie la contrainte de courbure nulle, et non plus les contraintes scalaire et vectorielles. Lors de l'écriture de l'action dans le cas continu nous avons également des termes dus à la dérivée temporelle de la connexion et aussi un terme correspondant à la contrainte de Gauss :

$$S_P[A, e] = \int_{\mathbb{R}} dx_0 \int_{\Sigma} d^2 x \epsilon^{0ab} e_a^i \partial_0 (A_b^i) + e_0^i \epsilon^{0ab} F_{ab}^i + A_0^i \epsilon^{0ab} D_a [e_b^i]$$

Par conséquent, en posant formellement  $M = \ln A$ , nous obtenons une action pour la gravité discrète :

$$S = \int_{\mathbb{R}} dx_0 \text{Tr} \left( \sum_e E_e M_e^{-1} \partial_0 M_e + \sum_a N_a P_a + N_a J_a \right) \quad (4)$$

Notons une ambiguïté sur l'ordre de la dérivée temporelle de la matrice et l'inverse de la matrice.

Nous voyons donc qu'entre l'expression  $\sum_e N_e P_e$  et  $\sum_{a,pl_a} N_{a,pl_a} P_{a,pl_a}$ , il y a au final une redondance de la contrainte

$\delta(P_e)$  lorsque l'on intègre sur les  $N$ . En effet, dans la deuxième expression nous sommes sur les vertex duaux  $a$  et donc nous supposons que différents points de départ d'une holonomie sont inéquivalents, même si l'holonomie considérée est définie à partir même plaquette. Il y a alors deux moyens pour contourner ce problème. D'une part, nous pouvons continuer le calcul de  $Z$  en enlevant les redondance à la main. D'autre part, nous pouvons utiliser les wedges introduits ci-dessus. Dans les deux cas les expressions suivantes sont vraies et nous choisissons la première solution. Une remarque sur l'utilisation des wedges se trouve à la fin de cette partie.

Dans la suite nous travaillerons avec l'action (4) plus le temps discrétisé en intervalles de longueur  $\epsilon$ :

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \left( \sum_t \sum_e \frac{1}{\epsilon} E_e^t (M_e^t)^{-1} M_e^{t+1} + \sum_a N_a^t P_a^t + N_a^t J_a^t \right) \quad (5)$$

Nous en venons maintenant au calcul de  $Z$ . La remarque immédiate que l'on peut faire au sujet de (5), et que nous aurons la contrainte  $(M_e^t)^{-1} = M_e^{t+1}$ , ie que la surface ne semble pas évoluée, où autrement dit, et dans le but de comparer à Ponzano-Regge, que les liens joignant deux surfaces portent l'élément unité de  $SU(2)$ .

L'approche naïve est de partir de l'action (5) et de remonter vers la fonction de partition du modèle de Ponzano-Regge. Cependant, cette approche est problématique car nous devons intégrer sur les variables d'algèbre de Lie  $E$  et  $N$ , ce qui n'est pas facile et ce, quelque soit l'ordre d'intégration. On préférera partir du modèle covariant, de l'écrire sous une forme adaptée et bien choisie, puis de montrer qu'il est égale au model canonique. Nous commençons donc par écrire:

$$\begin{aligned} Z &= \int_{SU(2)} dg_{e^*} \int_{\mathfrak{su}(2)} dE_e \exp i \sum_e \text{Tr}(U_e E_e) \\ &= \int_{\mathfrak{su}(2)} D[N] D[G] D[E] \int_{SU(2)} D[M] \exp i \sum_t \text{Tr} \left( \sum_e E_e^t M_{t,e}^{-1} G_{s[e]}^{t,t+1} M_{t+1,e} (G_{t[e]}^{t,t+1})^{-1} \right) \exp i \text{Tr} \left( \sum_a N_a^t P_a^t \right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire que nous découpons la variété  $M$  en plusieurs surfaces triangulées et jointes par des liens connectant deux vertex duaux. Ces liens portent les éléments  $G$  de  $SU(2)$  et sont indexés par la source  $s(e^*)$  et la cible  $t(e^*)$  des liens duaux  $e^*$  d'une triangulation. Ce la correspond bien au modèle de Ponzano-Regge car nous avons initialement des triangles, nous mettons la contrainte de courbure nulle, nous lions les différentes surfaces entre elles par des éléments  $G$ . Nous avons donc bien une structure discrète en trois dimension. Le but est d'obtenir la fonction de partition de (5). Nous faisons alors une approximation en posant :

$$\begin{aligned} M_e^{t,t+1} &\simeq M_e^t + \epsilon \delta M_e^t \\ G_{s[e]}^{t,t+1} &\simeq \exp i \epsilon \theta_g \overrightarrow{g[t, t+1, s(e)]} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{tel que } \|\overrightarrow{g[t, t+1, s(e)]}\| = 1 \end{aligned}$$

Autrement dit nous découpons le temps en intervalles de longueur  $\epsilon$  et donc supposons que les différentes surfaces sont très proches les une des autres. De plus, on suppose que  $G$  est proche de l'identité - ce qu'il semble attendu d'après ci-dessus. Enfin, on suppose que l'on peut intervertir limite et intégrale. Avec ces hypothèses nous obtenons:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{SU(2)} D[M] \int_{\mathfrak{su}(2)} D[N] D[E] \int_{\mathbb{R}^3} (d^3[\vec{g}] \text{sinc}^2(\epsilon_g \theta_g)) \exp i \text{Tr} \left( \sum_a N_a^t P_a^t \right) \\ &\quad \exp i \sum_t \text{Tr} \left( \sum_e \epsilon E_e^t M_{t,e}^{-1} \delta(M_e^t) - i \epsilon \theta_g \overrightarrow{g[t, t+1, s(e)]} \cdot \vec{\sigma} E_e^t + i \epsilon M_e^t E_e^t M_{t,e}^{-1} \theta_g \overrightarrow{g[t, t+1, t(e)]} \cdot \vec{\sigma} \right) \end{aligned}$$

L'étape suivante est de réaliser l'intégration sur les vecteurs  $\vec{g}$ . Pour cela on remarque que chaque  $\vec{g}$  est en facteur de trois vecteurs de type  $E$ . Plus précisément, les vecteurs sont soit du genre  $E_e^t$  soit du genre  $M_e^t E_e^t M_{t,e}^{-1}$ . L'intégration se fait plus ou moins facilement lorsque l'on prend en compte le sinus cardinal (jacobien du passage groupe à l'algèbre de Lie). Au lieu d'obtenir un  $\delta$  de dirac sur  $\mathbb{R}^3$  comme dans (3), on a  $\alpha_\epsilon(\|\Sigma \vec{E}\|) \doteq \int_0^{2\pi \epsilon} d\epsilon_g \theta_g \sin^2(\epsilon_g \theta_g) \text{sinc}^2(\epsilon_g \theta_g \|\Sigma \vec{E}\|)$ , fonction piquée en 0. J'appel la fonction  $\alpha$  un delta flou. Quoiqu'il en soit, nous pouvons redéfinir les vecteurs  $M_e^t E_e^t M_{t,e}^{-1}$  en vecteurs  $E'_{e,t}$  pour obtenir à la fin:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{SU(2)} D[M] \int_{\mathfrak{su}(2)} D[N] D[E] \exp i \sum_t \text{Tr} \left( \sum_e \epsilon E_e^t M_{t,e}^{-1} \delta M_e^t + \sum_a N_a^t P_a^t \right) \prod_{v^*} \alpha_\epsilon \left( \sum_e E_{e \in v^*}^t \right) \\ &= \int_{SU(2)} D[M] \int_{\mathfrak{su}(2)} D[N] D[E] \exp i \int dt \text{Tr} \left( \sum_e E_e \partial_0 M_e + \sum_a N_a P_a \right) \prod_{v^*} \delta \left( \sum_e E_{e \in v^*} \right) \end{aligned}$$



Nous retrouvons la constraints de Gauss nous disant que la somme des trois vecteurs  $E_e$  entourant le vertex  $v^*$  est bien fermée. Nous retrouvons donc la fonction de partition avec l'action (5).

J'en viens maintenant à l'utilisation des wedges pour réduire le nombre de redondances. Tout d'abord, il y en a deux types d'après la définition  $\sum_{a, pl_a} N_{a, pl_a} = \sum_{a, e_a, pl_a} N_{a, pl_a, e_a}$ . La première porte sur les  $pl_a$  et est naturellement enlevée par les wedges car ils sont indexés par un  $a$  et un  $pl_a$  [en lisant  $pl_a$  non plus comme une holonomie mais comme un wedge  $w_a$ ]. La deuxième porte sur les  $e_a$  et ne disparaît pas. Il y a également une ambiguïté sur le type de liens sur lesquels porte la somme. Il faut préciser sur quels types de lien nous sommes, tout en gardant en tête que la même somme se retrouve du côté des contraintes projetées puisque de leur côté, la somme porte sur les liens sur lesquels nous projetons le wedge. Nous pouvons sommer soit sur tous les liens [duaux], soit sur les trois liens duaux à l'intérieur d'un triangle [partagé par deux wedges], soit sur les six liens duaux - ceux qui sont rajoutés à la main et parallèles au bords d' un triangle - et qui ne sont partagés que par un seul wedge. Le nombre de wedge auquel un lien dual appartient est important lorsque l'on regarde les crochets de Poisson . Lorsque l'on considère des holonomies, les liens duaux sont partagés par deux holonomies ; donc si l'on remplace naïvement holonomie par wedge, la somme sur les liens du côté des contraintes projetée est en fait une somme sur les liens duaux et à l'intérieur d'un triangle de  $\Delta$  . Quoiqu'il en soit la somme sur les liens ne se simplifie pas a priori et il reste encore des redondances. La question de l'utilisation des wedges et donc encore ouverte.

## A $\mathfrak{su}(2)$ et $SU(2)$

### A.1 Matrices de Pauli

Les matrices de Pauli sont les matrices  $2 \times 2$  complexes vérifiant  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta(i, j)$ , avec  $i, j$  des indices de comptages. On montre alors qu'il n'existe que trois matrices vérifiant de telles propriétés, dont une expression possible est :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les propriétés élémentaires sont alors :

- leur trace est nulle
- leur carré vaut 1
- leur déterminant vaut -1
- elles sont hermitiennes

De plus nous avons :

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2\epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) &= 2\delta(i, j) \end{aligned}$$

Enfin, grâce à la relation  $\sigma_i \sigma_j = \delta(i, j) + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$ , nous pouvons montrer que :

$$\exp i\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \cos \theta + i \sin \theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad (6)$$

servant pour  $\mathfrak{su}(2)$ .

### A.2 $\mathfrak{su}(2)$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  est définie comme l'algèbre générée par les matrices de Pauli et définie sur le corps  $\mathbb{R}$ . Avec la formule (6) nous pouvons passer de  $\mathfrak{su}(2)$  à  $SU(2)$  en pensant l'exponentielle comme une série,  $\vec{n}$  doit alors être un vecteur unitaire, et  $\theta \in [0, 2\pi]$  pour ne couvrir qu'une seule fois  $\mathfrak{su}(2)$ .

D'autre part, nous explicitons l'isomorphisme entre  $\mathfrak{su}(2)$  et  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{su}(2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \cdot i\vec{\sigma} &\longmapsto \vec{x} \end{aligned}$$

### A.3 $SU(2)$

Le passage au groupe  $SU(2)$  se fait par exponentiation de  $\mathfrak{su}(2)$ . On a donc une map :

$$\begin{aligned} \phi : \mathfrak{su}(2) &\longrightarrow SU(2) \\ i\vec{x} \cdot \vec{\sigma} &\longmapsto \exp i\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Autrement dit,  $SU(2)$  est le groupe de matrices hermitiennes  $2 \times 2$  complexes sur le corps des réels et telles que leur déterminant soit l'unité. On peut expliciter leur forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

La mesure de Haar sur le groupe  $SU(2)$  est une mesure invariante à droite mais aussi à gauche et telle que  $\int_{SU(2)} dg = 1$ .

De plus, elle est unique. On peut l'exprimer via l'isomorphisme  $SU(2) \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} \psi : SU(2) &\longrightarrow S^3 \\ A = \begin{pmatrix} a & b^* \\ -b & -a^* \end{pmatrix} &\longmapsto a + jb \end{aligned}$$

où  $\mathbb{H} \doteq \{a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = k^2 = j^2 = ijk = -1\}$  sont les quaternions.

La mesure de Haar  $dg$  est alors égale à celle sur  $S^3$  ie  $\sin^2 \theta d\theta d^2 \vec{u}$  où  $\vec{u} \in S^2, \theta \in [0, 2\pi]$ . Quant au passage du groupe à l'algèbre de Lie, il se fait avec le jacobien  $P(\psi) = \text{sinc}(\psi) \doteq \frac{\sin(\psi)}{\psi}$ , ie:

$$\int_{SU(2)} dg (g \doteq \exp i\psi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \int_{\mathfrak{su}(2)} P^2(\psi) \psi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

Enfin, nous pouvons définir une fonction  $\delta$  sur le groupe :

$$\forall f \int_{SU(2)} dg f(g) \delta(g) = f(e)$$

Des relations basiques mais néanmoins importantes sont prouvées via le théorèmes de Peter-Weyl: les éléments de matrice d'une représentation irréductible et de dimension fini d'un groupe compact  $G$ , forment une base orthogonale de  $L^2(G)$ . On montre alors la relation:

$$\forall g \in SU(2), \int_{\mathfrak{su}(2)} dX \exp i \text{Tr}(Xg) = \delta(g)$$

#### A.4 Symboles $3j$ et $6j$

Finalement nous introduisons les symboles  $3j$  et  $6j$ .

Soit une représentation  $D$  de  $SU(2)$  sur l'espace vectoriel  $V$  de dimension  $2j + 1$ , alors:

$$\int_{SU(2)} dg \prod_{i=1}^2 D_{j_i}[g]_{b_i}^{a_i} = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta(j_1, j_2) \delta(a_1, a_2) \delta(b_1, b_2)$$

$$\int_{SU(2)} dg \prod_{i=1}^3 D_{j_i}[g]_{b_i}^{a_i} = i_{j_1, j_2, j_3}^{a_1, a_2, a_3} i_{j_1, j_2, j_3}^{b_1, b_2, b_3}$$

où  $i$  est un enrelaceur à trois entrées, ie un symbol  $3j$ . Autrement dit c'est un coefficient de Clebsh-Gordan:

$$i_{j_1, j_2, j_3}^{a_1, a_2, a_3} \doteq \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + a_3}}{\sqrt{2j_3 + 1}} \langle j_1, j_2; a_1, a_2 | j_3, a_3 \rangle$$

ie une map

$$i : V_{j_1} \otimes V_{j_2} \longrightarrow V_{j_3}$$

avec les  $V_j$  des représentations de  $SU(2)$ .

Le symbole  $6j$  est quant à lui défini par:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{pmatrix} = \sum_{\{a\}} i_{j_1, j_2, j_3}^{a_1, a_2, a_3} i_{j_3, j_4, j_5}^{a_3, a_4, a_5} i_{j_5, j_2, j_6}^{a_5, a_2, a_6} i_{j_6, j_4, j_1}^{a_6, a_4, a_1}$$

## Références

- [1] J. C. Baez. An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory. *Lect.Notes Phys.*, 1999.
- [2] A. Corichi and J. Zapata. On diffeomorphism invariance for lattice theories. *Nucl.Phys. B*, 1996.
- [3] P. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. 1965.
- [4] B. Dittrich and J. P. Ryan. Phase space descriptions for simplicial 4d geometries. *arXiv :0807.2806v1*, 2008.
- [5] L. Freidel, E. R. Livine, and C. Rovelli. Spectra of length and area in 2+1 lorentzian loop quantum gravity. *Class.Quant.Grav.*, 2003.
- [6] M. Gaul and C. Rovelli. Loop quantum gravity and the meaning of diffeomorphism invariance. *Lect.Notes Phys*, 1999.
- [7] K. Krasnov. *Spin foam models*. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 1999.
- [8] E. Livine. *Boucles et mousses de spin en gravité quantique*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2003.
- [9] H.-J. Matschull. Three dimensional canonical quantum gravity. *Class.Quant.Grav.*, 1995.
- [10] K. Noui and A. Perez. Dynamics of loop quantum gravity and spin foam models in three dimensions. *arXiv :gr-qc/0402112v2*, 2004.
- [11] H. Ooguri. Partition functions and topology-changing amplitudes in the three-dimensional lattice gravity of ponzano and regge. *Nuclear Physics B*, 1992.
- [12] P. Peldan. Actions for gravity, with generalizations : A review. *Class.Quant.Grav.*, 1993.
- [13] A. Perez. Spin foam models for quantum gravity. *Class.Quant.Grav.*, 2003.
- [14] C. Perin, C. Rovelli, and S. Speziale. Self-energy and vertex radiative corrections in lqg. *arXiv :08101714*, 2008.
- [15] T. Thiemann. Qsd iv : 2+1 euclidean quantum gravity as a model to test 3+1 lorentzian quantum gravity. *Class.Quant.Grav.*, 1997.