
Théorie cinétique des états stationnaires de l'équation d'Euler 2D

Résumé : Les écoulements turbulents bidimensionnels et géophysiques ont la propriété de s'auto-organiser en structures cohérentes à grande échelle. On cherche ici à construire une théorie permettant de décrire ces structures dans le cas de l'équation d'Euler 2D, en adoptant une approche similaire à la théorie cinétique des systèmes de particules : l'évolution du champ de vitesse moyen, associé à la structure cohérente, est influencée par un terme dû aux fluctuations. Les approximations permettant d'obtenir les équations associées sont formulées précisément, la convergence de ces équations est prévue par des arguments théoriques, et les méthodes numériques permettant de les résoudre sont présentées. Les futures applications à l'étude de la dynamique de l'atmosphère sont aussi discutées.

Mots clefs : *turbulence bidimensionnelle, structures cohérentes, états stationnaires hors-équilibre, théorie cinétique, approximation quasi-linéaire, fermetures en turbulence.*

Stage encadré par :

Freddy Bouchet

freddy.bouchet@ens-lyon.fr / tél. 04 72 72 86 40

Laboratoire de Physique de l'ENSL (UMR CNRS 5672).

École Normale Supérieure de Lyon

46, allée d'Italie

69007 Lyon

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/>



Remerciements

Je remercie d'abord Freddy Bouchet pour m'avoir confié ce travail, ainsi que pour son suivi précis et efficace, et bien sûr je le remercie de me faire confiance pour le travail de thèse que je ferai sous sa direction à partir de l'année prochaine.

Merci aussi à Cesare Nardini d'avoir consacré du temps pour m'aider, j'espère que l'on aura l'occasion de travailler à nouveau ensemble dès qu'il sera à Lyon.

Enfin, je remercie mes "co-bureau" Antoine Venaille et Remi Lemoy pour leur accueil.

Table des matières

Introduction et présentation du contexte	1
Turbulences bidimensionnelle et géostrophique	2
Mécanique statistique d'équilibre et turbulence 2D	3
Pourquoi une "théorie cinétique" ?	5
1 Présentation de la théorie cinétique	6
1.1 L'équation d'Euler 2D stochastique	6
1.2 Les approximations cinétiques	7
1.3 Lien entre dynamique stochastique et relaxation déterministe	8
2 L'équation d'Euler 2D linéarisée	11
2.1 Généralités	11
2.2 Stabilité spectrale	11
2.3 Stabilité asymptotique : mécanisme d'Orr	11
2.3.1 Cas simple : profil linéaire	11
2.3.2 Cas général	12
2.4 Conséquences pour le tenseur de Reynolds	13
2.4.1 Cas d'un opérateur normal	13
2.4.2 Cas d'un opérateur non-normal : mécanisme d'Orr stochastique	13
3 Premiers résultats	15
3.1 Méthode numérique	15
3.1.1 Limitation mathématique	15
3.1.2 Limitation numérique	15
3.2 Résultats	16
3.2.1 Profil linéaire	16
3.2.2 Profil parabolique	17
Conclusion	21
A Dérivation (ou plutôt intégration) de l'équation intégrale	23
B Propriétés de l'équation intégrale	24

Introduction et présentation du contexte

Les écoulements géophysiques — atmosphériques et océaniques — sont caractérisés par leur organisation en structures à très grandes échelles et de longue durée de vie : jet streams, cyclones et anti-cyclones, courants tels que le Gulf Stream, anneaux océaniques... Ces structures résultent d'un équilibre entre l'énergie injectée par les fluctuations turbulentes et l'énergie dissipée, il s'agit donc d'un phénomène essentiellement hors-équilibre, d'où leur nom d'**états stationnaires hors-équilibre**. Les structures principales dans l'atmosphère sont les jet-streams : il s'agit de courants intenses en haute altitude et latitudes moyennes, et sont une conséquence de la différence de température entre l'équateur et les pôles couplée à la rotation de la Terre. Des simulations numériques permettent de mettre en évidence ce phénomène (Fig. 1, [19]), et on observe que la dynamique non-linéaires très complexe de ce modèle d'atmosphère n'est pas nécessaire pour prédire ces états stationnaires : l'approximation dite quasi-linéaire peut suffire à les décrire.

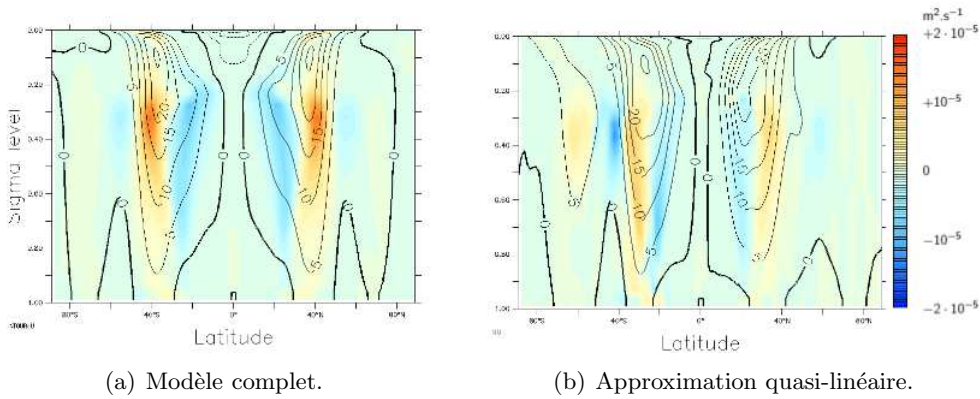


FIGURE 1 – Exemple de simulations numériques directes d'un modèle d'écoulement atmosphérique (équations primitives). La simulation est réalisée sur une sphère en rotation, et le "niveau sigma" représente l'altitude. Les couleurs représentent l'intensité du tenseur de Reynolds, et les contours sont les lignes de niveau de l'écoulement global (moyennés dans la direction parallèle à l'équateur). On voit la formation de deux courants intenses (jusqu'à 25 m/s), ce sont les jet-streams. Le résultat de la simulation complète (figure de gauche) est en accord avec le résultat de la simulation avec l'approximation quasi-linéaire (figure de droite), en particulier en ce qui concerne le champ de vitesse moyen (contours). Je remercie Farid Ait Chaalal et Tapio Schneider (Caltech) pour m'avoir fourni ces figures.

De manière générale en mécanique des fluides, une décomposition du champ de vitesse en une partie correspondant à la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle = U \vec{e}_x$ (pour le cas d'un écoulement moyen parallèle) et une partie correspondant aux fluctuations $\delta \vec{v}$ (décomposition de Reynolds [11]) permet d'aboutir à une équation de la forme

$$\partial_t U = -\alpha U - \langle \delta \vec{v} \nabla \delta \vec{v} \rangle \quad (1)$$

Le premier terme du membre de droite représente la dissipation d'énergie, et le deuxième, la divergence du **tenseur de Reynolds**, représente l'interaction avec les fluctuations turbulentes. Ce terme est déterminé par une autre équation, qui fait intervenir un tenseur d'ordre trois, et on peut ainsi dériver une hiérarchie infinie d'équations. L'approximation quasi-linéaire consiste à effectuer une troncature à l'ordre 2 dans cette hiérarchie (une formulation plus précise sera donnée plus tard, voir partie 1.2). Dans ces états stationnaires, les fluctuations sont faibles par rapport à l'écoulement moyen, c'est pourquoi cette approximation peut être valide. Cependant, une telle opération est *a priori* arbitraire, et donne généralement de mauvais résultats en turbulence quand les fluctuations sont importantes ; le fait qu'elle donne de bonnes prédictions dans le cas du jet-stream est donc relativement surprenant,

et motive une étude plus théorique.

L'appellation de "théorie cinétique" est justifiée par le fait que cette démarche (troncature dans une hiérarchie d'équations couplées) rappelle la dérivation de la théorie cinétique des systèmes de particules, une discussion plus précise sera donnée dans la suite. Pour cette étude théorique, on choisit le modèle le plus simple de mécanique des fluides qui présente ce phénomène de formation de structures cohérentes, il s'agit de l'équation d'Euler 2D, qui décrit le mouvement bidimensionnel d'un fluide sans viscosité. Le lien avec les modèles d'écoulements géophysiques sera précisé dans la suite.

Turbulences bidimensionnelle et géostrophique

La première étude de la turbulence hydrodynamique est généralement attribuée à Léonard de Vinci (1452-1519), qui en a fait une description précise, sans essayer d'en donner une explication théorique ^{-a-}. Il faut attendre le XIX^e siècle pour que l'ingénieur Osborne Reynolds (1842-1912) donne un critère précis d'apparition de la turbulence, basé sur la valeur du nombre qui porte son nom. La première ébauche de théorie est due à Andrei N. Kolmogorov (1903-1987), qui permet de quantifier la "cascade turbulente" [13, 11] (formation de tourbillons à partir de tourbillons plus grands, aussi appelée cascade de Richardson). Malgré les progrès plus récents (intermittence), il n'existe toujours pas d'explication satisfaisante du phénomène à partir des équations de la mécanique des fluides. C'est pourquoi la turbulence est parfois considérée comme « le problème non résolu le plus important de la physique classique » (Richard Feynman).

La théorie de Kolmogorov repose sur les hypothèses d'universalité, qui affirment qu'il existe une gamme d'échelles dites inertielles dans lesquelles les effets de la viscosité et du forçage sont négligeables, et dans lesquelles on observe un flux d'énergie à travers les échelles qui a un caractère "universel". L'adjectif "universel" signifie que ce flux a les mêmes caractéristiques pour tout écoulement turbulent, indépendamment de la viscosité et de la manière dont la turbulence est produite. Le flux d'énergie a alors une forme en loi de puissance (cascade auto-similaire) dont les exposants sont déterminés en première approximation par analyse dimensionnelle. On trouve un flux vers les petites échelles, conformément à la phénoménologie de la cascade de Richardson, et cette cascade d'énergie s'arrête à l'échelle à laquelle la viscosité n'est plus négligeable, dite échelle de Kolmogorov, et où l'énergie est dissipée en chaleur (schéma 2(a)).

Le même type de raisonnement a été fait pour la turbulence bidimensionnelle (théorie de Kraichnan [14]), et on trouve dans ce cas un flux d'énergie vers les grandes échelles. On a alors deux régimes distincts :

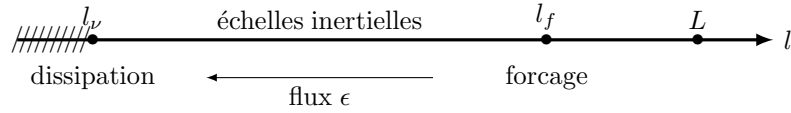
- Le régime de cascade inverse (schéma 2(b)), dans lequel l'énergie est dissipée par un mécanisme de friction à grande échelle.
- Le régime de formation de structures cohérentes à grande échelle (schéma 2(c)), comme des tourbillons ou des jets, qui évoluent sur des temps très longs comparés au temps d'évolution des fluctuations turbulentes. De telles structures se forment quand la taille du domaine de l'écoulement est inférieure à l'échelle caractéristique de dissipation par friction. Dans ce cas, le champ de vitesse moyen domine l'écoulement, ce qui brise les hypothèses nécessaires à la description du phénomène de cascade auto-similaire.

D'un point de vue théorique, ces spécificités de la turbulence 2D sont interprétées comme des conséquences des propriétés de conservation de la dynamique associée [7]. En effet, l'équation d'Euler 2D prend la forme d'une équation de conservation de la vorticit   ^{-b-} :

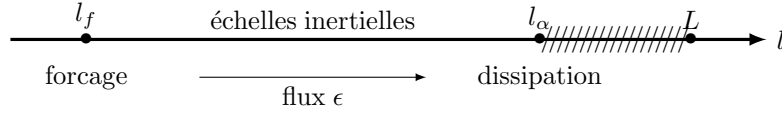
$$\partial_t \omega + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \omega) = 0 \quad (2)$$

-a-. <http://www.cnrs.fr/sciencespour tous/abecedaire/pages/vinci.htm>

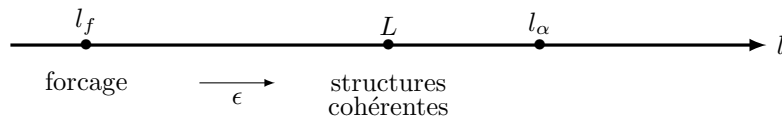
-b-. La vorticit   est d  finie par $\omega = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$ pour un   coulement dans le plan (x, y) .



(a) Cascade directe d'énergie en turbulence 3D. L est la taille du domaine, l_f est l'échelle du forçage et l_ν est l'échelle de Kolmogorov, à partir de laquelle la viscosité n'est pas négligeable.



(b) Cascade inverse d'énergie en turbulence 2D : régime $L \gg l_\alpha$ (l_α est l'échelle à partir de laquelle la friction n'est pas négligeable).



(c) Le cas qui nous intéresse : formation de structures cohérentes à grande échelle en turbulence 2D : régime $L \ll l_\alpha$.

FIGURE 2 – Schéma récapitulatif des mécanismes de la turbulence, en 2D et 3D.

alors qu'en 3D il existe un terme de source de vorticité. Ainsi, outre l'énergie cinétique totale, toutes les quantités (appelées Casimirs) de la forme $\mathcal{C}_s[\omega] = \int s(\omega)$ pour n'importe quelle fonction s suffisamment lisse sont conservées par la dynamique.

Les écoulements géophysiques [21] sont dominés par la force de Coriolis due à la rotation de la Terre, ce qui mène à un équilibre (dit géostrophique) entre cette force et le gradient de pression dans le fluide. Une des conséquences de cet équilibre est le théorème de Taylor-Proudman, qui affirme qu'un tel écoulement est essentiellement bidimensionnel. À l'ordre suivant, on obtient le modèle quasi-géostrophique, qui donne de bonnes prédictions pour les latitudes moyennes et élevées, et qui a la particularité d'avoir la même structure mathématique que l'équation d'Euler 2D : il s'agit d'une équation de transport d'une quantité scalaire par un champ de vitesse incompressible. L'équation quasi-géostrophique possède donc aussi la propriété de conservation d'une infinité de quantités (les Casimirs et l'énergie), qui est à l'origine d'un flux d'énergie vers les grandes échelles et de la formation de structures cohérentes. Cette propriété de conservation est aussi à la base de la théorie de la mécanique statistique d'équilibre des écoulements 2D et géophysiques, qui est résumée dans la partie suivante.

Mécanique statistique d'équilibre et turbulence 2D

Comme tous les phénomènes physiques complexes faisant intervenir un très grand nombre de degrés de liberté, la turbulence hydrodynamique semble pouvoir être étudiée par une approche de mécanique statistique. Cependant, le mécanisme de flux d'énergie à travers les échelles — présenté dans le paragraphe précédent — qui est le moteur essentiel de la turbulence tridimensionnelle et bidimensionnelle dans le régime de cascade inverse, en fait un système intrinsèquement hors-équilibre, et donc inadapté à une étude utilisant les outils de la mécanique statistique d'équilibre. La turbulence bidimensionnelle dans le régime de formation de structures cohérentes, au contraire, présente peu de flux d'énergie, et les fluctuations y sont négligeables au premier ordre. On s'attend donc à ce qu'une approche de mécanique statistique d'équilibre soit fructueuse dans ce cas.

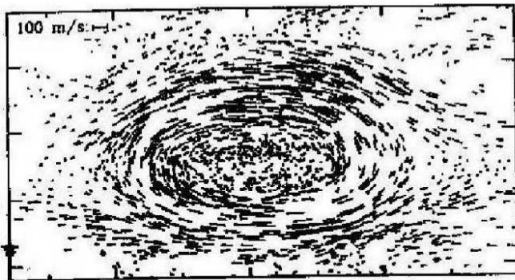
Cette théorie, développée dans sa version finale ^{-c-} dans les années 90 par Robert, Miller et Sommeria (théorie RMS [16, 22, 7]), repose sur les mêmes principes que la mécanique statistique des systèmes de particules. Un micro-état est défini par la donnée du champ de vorticité $\omega(\vec{r}, t)$, et un macro-état est l'ensemble des micro- tats qui satisfont une densité de probabilité $\rho(\vec{r}, \sigma)d\sigma$ d'observer la vorticité $\omega(\vec{r}) = \sigma$ à $d\sigma$ près (*coarse-graining*). L'entropie de Boltzmann, qui mesure le nombre de micro- tats correspondant au macro-état ρ , se calcule ensuite selon ^{-d-}

$$\mathcal{S}[\rho] = - \int \rho(\vec{r}, \sigma) \ln \rho(\vec{r}, \sigma) d\vec{r}d\sigma \quad (3)$$

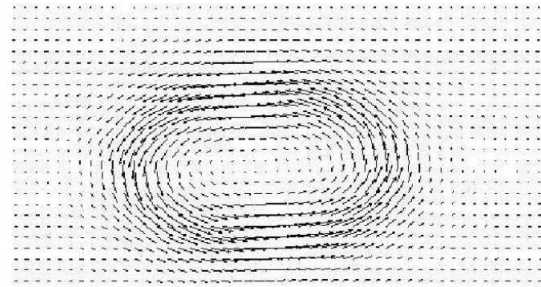
et l'entropie (micro-canonique) du système est le maximum de $\mathcal{S}[\rho]$ pour tous les ρ qui satisfont les conditions de normalisation, et de conservation de l'énergie et des Casimirs. Le macro-état ρ qui réalise ce maximum correspond à un très grand nombre d' tats microscopiques, c'est bien ce que l'on appelle un état d'équilibre statistique. On trouve que ces  tats d'équilibre statistique sont des  tats stationnaires de l'équation d'Euler, c'est-à-dire qui vérifient $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \omega = 0$. Un micro-état typique est donc un écoulement stationnaire auquel s'ajoutent des fluctuations turbulentes.

  partir de ces bases de la théorie RMS (dont j'ai négligé un grand nombre de subtilités), on peut définir des ensembles canoniques et grand-canoniques, avec des multiplicateurs de Lagrange correspondant à des "températures" inverses. Comme en mécanique statistique d'équilibre des systèmes de particules, une grande réussite de cette théorie est la description des transitions de phases, qui ont aussi été observ es dans des simulations numériques et des expériences [7, 5].

Un des résultats les plus fascinants est l'explication de la stabilité de la Grande Tache Rouge de Jupiter (Fig. 3, [3, 6, 7]). Il s'agit d'un anticyclone de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres de diamètre ^{-e-}, et qui est le si ge d'un écoulement de gaz fortement turbulent, avec des vents allant jusqu'à 700 km/h. Elle fut observ e pour la première fois par Cassini en 1665, la stabilité pendant plus de trois siècles d'une structure turbulente de cette taille est un phénomène assez surprenant. Dans le cadre de la théorie RMS, la Grande Tache Rouge est interpr t e comme un état d'équilibre statistique qui maximise l'entropie (3), et sa forme elliptique est vue comme celle de l'interface entre deux phases.



(a) Champ de vitesse dans la Grande Tache Rouge, observé par la sonde Voyager [9].



(b) Champ de vitesse dans la Grande Tache Rouge, prédit par la théorie RMS [3].

FIGURE 3 – La Grande Tache Rouge de Jupiter : un des grands résultats de la théorie Robert-Miller-Sommeria.

-c-. La première approche de ce type remonte à Onsager, en 1949 [14].

-d-. Cette relation ne correspond pas directement à la définition de l'entropie de Boltzmann, mais on peut montrer dans ce cas que les deux définitions sont équivalentes, il s'agit d'un résultat de la théorie des grandes déviations [7].

-e-. La Grande Tache Rouge mesure environ 25 000 km de long et 12 000 km de large, soit 3 fois la taille de la Terre!

Pourquoi une “théorie cinétique” ?

Les états stationnaires hors-équilibre sont dus à une compensation entre une injection d'énergie par un forçage et une dissipation d'énergie par friction (voir le schéma 2), avec des flux d'énergie et de quantités conservées, faibles par rapport aux flux présents dans un écoulement turbulent 3D, mais non nuls. Dans le cadre de l'étude des systèmes de particules avec interactions à longue portée, une théorie cinétique permettant la description de ces états a récemment été développée, avec des résultats concluants [18]. Dans ce cas, il s'agit d'une extension de la théorie cinétique déjà existante (équations cinétiques de Vlasov, Landau et Lenard-Balescu [1]) pour des systèmes dont la dynamique hamiltonienne est perturbée par une dissipation et un forçage aléatoire. On trouve alors que ce forçage induit des corrélations entre les particules, et que ces corrélations apportent une correction à l'équation de Vlasov, ce qui constitue l'équation cinétique finale.

Dans ce cas, l'appellation de théorie cinétique est évidente, puisqu'il s'agit d'une extension de la théorie cinétique des systèmes de particules avec interactions à longue portée, originalement développée pour les systèmes auto-gravitants et les plasmas. De manière générale, une théorie cinétique consiste à développer les grandeurs pertinentes (fonctions de distribution dans le cas des systèmes de particules, champ de vitesse en mécanique des fluides) en fonction d'un petit paramètre qui est le rapport du temps caractéristique d'évolution des fluctuations et du temps caractéristique d'évolution des grandeurs globales. Dans le régime de formation de structures cohérentes, les fluctuations turbulentes évoluent beaucoup plus vite que la structure à grande échelle, c'est-à-dire que le temps caractéristique d'advection et de cisaillement des fluctuations est beaucoup plus faible que le temps caractéristique de dissipation ou de formation de la structure cohérente. L'approche de type théorie cinétique pour ce système est donc justifiée : on va développer le champ de vitesse en une partie correspondant à la structure à grande échelle et une partie pour les fluctuations, et le paramètre perturbatif sera le rapport des temps d'évolution de ces deux quantités. De plus, on verra dans la suite que ce petit paramètre contrôlera aussi l'intensité de la dissipation et du forçage, de manière à assurer que les flux sont faibles.

D'autre part, les fortes similitudes entre l'équation de Vlasov et l'équation d'Euler 2D — il s'agit d'équations de transport de quantités scalaires par des champs de vitesses incompressibles, et l'équation d'Euler possède certaines propriétés des systèmes avec interactions à longue portée — font que l'approche présentée ici suit de près la théorie cinétique développée pour l'équation de Vlasov forcée [18].

1 Présentation de la théorie cinétique

1.1 L'équation d'Euler 2D stochastique

On cherche à décrire les états stationnaires hors-équilibre observés dans les écoulements géophysiques, qui sont caractérisés par une injection d'énergie et une dissipation par friction qui se compensent. Le modèle le plus simple que l'on peut considérer^{-f} est celui décrit par l'équation d'Euler 2D incompressible, avec forçage stochastique et friction linéaire : si on note $\vec{v} = (v_x, v_y)$ le champ de vitesse, la vorticité est donn e par $\omega = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$ et vérifie

$$\partial_t \omega + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \omega = -\alpha \omega + \sqrt{\sigma} f \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4)$$

La friction linéaire $-\alpha \omega$ représente un mécanisme de dissipation d'énergie à grande échelle, par exemple l'effet de la couche limite   la surface de la Terre. On verra que le régime intéressant est celui de friction α faible. On pourrait de même étudier une équation de Navier-Stokes (avec viscosité ν non nulle), et étudier la limite $\nu \rightarrow 0$, mais cela poserait des problèmes théoriques inutiles puisque l'on peut prendre cette limite dès maintenant en considérant l'équation d'Euler ($\nu = 0$).

$\sqrt{\sigma} f$ est une force^{-g} aléatoire, plus précisemment un processus gaussien, qui est donc défini par sa fonction de corrélation

$$\langle f(\vec{r}, t) f(\vec{r}', t') \rangle = C(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \delta(t - t') \quad (5)$$

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique totale $\langle E \rangle = \frac{1}{2} \int \langle \vec{v}^2 \rangle$ est obtenue à partir de (4) par application de la formule d'It ^{-h} :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -2\alpha \langle E \rangle + \sigma \quad (6)$$

Avec la normalisation de f choisie ($\sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} / 2|\vec{k}|^2 = 1$), σ représente l'intensité de l'injection d'énergie, et $1/\alpha$ est le temps caractéristique de la dissipation par friction.

Comme expliqué en introduction, la turbulence 2D est caract eris e par l'existence de deux régimes :

- Dans le régime de la cascade inverse d'énergie, on observe un flux d'énergie ϵ vers les grandes échelles.   partir de (6), on peut donner un ordre de grandeur de ce flux d'énergie : $\epsilon \sim \sigma L^{-2}$, où L est la taille du domaine de l'écoulement. Cette cascade d'énergie vers les grandes échelles s'arrête quand la friction $-\alpha \omega$ n'est plus négligeable (de même qu'en turbulence 3D, où la cascade d'énergie vers les petites échelles s'arrête quand la viscosité devient importante, voir Fig. 2). Cette échelle l_α , suppos e universelle, ne peut dépendre que de α (s^{-1}) et ϵ ($m^2 s^{-3}$), d'où par analyse dimensionnelle :

$$l_\alpha \sim \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2} \quad (7)$$

La condition d'obtention de ce régime, $l_\alpha \ll L$, s'écrit alors

$$\frac{\sigma^{1/2}}{L^2 \alpha^{3/2}} \ll 1 \quad (8)$$

- Dans le régime — qui nous intéresse — de formation de structures cohérentes, le temps caractéristique de dissipation $\tau_\alpha = 1/\alpha$ est beaucoup plus long que le temps caractéristique d'advection des fluctuations par la structure cohérente $\tau = L/U$, où U est l'ordre de grandeur de la vitesse dans cette structure. D'après le bilan d'énergie (6), l'énergie dans un état stationnaire

-f-. C'est un modèle similaire à celui utilisé pour développer la théorie cinétique des  tats stationnaires hors-équilibre pour des systèmes de particules avec interactions à longue port e [18].

-g-. Plus précisemment, f est le rotationnel d'une force.

-h-. Voir [12] pour tous les détails concernant le calcul stochastique.

est $\langle E \rangle \sim \sigma/2\alpha$, ce qui correspond à une vitesse moyenne $U \sim \sqrt{\langle E \rangle}/L$ et donc à un temps caractéristique

$$\tau \sim L^2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} \quad (9)$$

La condition d'obtention de ce régime est donc

$$\tau \ll \tau_\alpha \iff \frac{\sigma^{1/2}}{L^2 \alpha^{3/2}} \gg 1 \quad (10)$$

On peut adimensionner les variables avec ces longueurs et temps caractéristiques L et τ , l'équation d'Euler forcée (4) devient ⁻ⁱ⁻, avec $R_\alpha = \frac{\sigma^{1/2}}{L^2 \alpha^{3/2}}$

$$\partial_t \omega' + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla}' \omega' = -\frac{1}{R_\alpha} \omega' + \sqrt{\frac{2}{R_\alpha}} f' \quad (11)$$

Dans la suite, on ne notera pas les symboles "prime", et on identifiera α à $1/R_\alpha$, pour obtenir :

$$\partial_t \omega + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \omega = -\alpha \omega + \sqrt{2\alpha} f \quad , \quad \alpha \ll 1 \quad (12)$$

La condition d'obtention de structures (ou de séparation des échelles temporelles) $R_\alpha \gg 1$, qui s'écrit alors $\alpha \ll 1$, implique aussi un forçage et une dissipation faibles. Avec cette condition, on s'attend à obtenir des flux de quantités conservées (caractéristiques des états stationnaires hors-équilibre) aussi faibles. On peut donc supposer que les solutions sont proches des solutions prédites par la théorie de mécanique statistique d'équilibre (résumée en introduction), c'est-à-dire de solutions stationnaires de l'équation d'Euler. Il n'existe pas d'argument rigoureux pour l'affirmer, mais des simulations numériques directes [5] permettent de le mettre en évidence dans certains cas.

Dans la théorie d'équilibre, l'énergie et les Casimirs sont les paramètres qui caractérisent un état d'équilibre. Ces paramètres ne peuvent pas être déterminés par cette théorie d'équilibre, c'est le rôle d'une théorie hors-équilibre. La théorie cinétique consiste donc à considérer à l'ordre dominant une solution prédite par la théorie d'équilibre, et d'étudier comment les termes à l'origine des flux d'énergie et de Casimirs (friction et forçage dans (12)) sélectionnent les invariants et cette solution d'équilibre.

1.2 Les approximations cinétiques

À l'ordre dominant, on a donc une solution stationnaire stable de l'équation d'Euler 2D (Ω_0, \vec{V}_0) , c'est-à-dire qui vérifie

$$\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \Omega_0 = 0 \quad (13)$$

Les écoulements parallèle $\vec{V}_0(x, y) = U(y) \vec{e}_x$ constituent une classe de tels écoulements, c'est ce cas que l'on va considérer dans la suite. On décompose donc la vorticité totale $\omega(x, y)$ sous la forme du terme dominant $\Omega_0(x, y) = -U'(y)$ et de fluctuations $\delta\omega(x, y)$:

$$\omega = \Omega_0 + \sqrt{\alpha} \delta\omega \quad , \quad \vec{v} = \vec{V}_0 + \sqrt{\alpha} \delta\vec{v} \quad (14)$$

Le facteur $\sqrt{\alpha}$ permet d'être en accord avec la forme du forçage dans (12) ^{-j-}. Plus précisément, Ω_0 est la projection du champ total sur le mode de Fourier $k = 0$ dans la direction x :

$$\Omega_0(y) = \mathcal{P}[\omega] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L_x} \int dx \omega(x, y) \quad (15)$$

⁻ⁱ⁻. Les différents facteurs numériques imposent $f' = 2^{1/4} L^2 \tau^{1/2} f$.

^{-j-}. Ce *scaling* est en fait nécessaire pour l'auto-consistance de la théorie, en lien avec les particularités de l'équation d'Euler 2D linéarisée (voir partie 2).

et

$$\begin{aligned}\omega &= \mathcal{P}[\omega] + (1 - \mathcal{P})[\omega] \\ &= \Omega_0 + \sqrt{\alpha}\delta\omega\end{aligned}\quad (16)$$

L'équation d'Euler forcée (12) se décompose donc, de manière exacte, sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{P}[12] & : \quad \partial_t \Omega_0 = -\alpha \Omega_0 - \alpha \mathcal{P}[\delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega] + \sqrt{2\alpha} \mathcal{P}[f] \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(1 - \mathcal{P})[12] & : \quad \partial_t \delta\omega + L_{\Omega_0}[\delta\omega] = -\alpha \delta\omega - \sqrt{\alpha}(1 - \mathcal{P})[\delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega] + \sqrt{2}(1 - \mathcal{P})[f] \end{cases}\quad (17)$$

avec l'opérateur d'Euler linéarisé :

$$L_{\Omega_0}[\delta\omega] = \vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla} \delta\omega + \delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Omega_0 \quad (18)$$

En prenant la moyenne de l'équation pour Ω_0 — moyenne sur les réalisations de la force f —, on a

$$\partial_t \langle \Omega_0 \rangle = -\alpha \langle \Omega_0 \rangle - \alpha \mathcal{P} \langle \delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega \rangle \quad (19)$$

Ω_0 , la quantité que l'on cherche, est donc déterminée par le tenseur de Reynolds, terme non linéaire dû aux fluctuations. Cette quantité étant déterminée par la deuxième équation, notre stratégie consiste à résoudre cette équation qui porte sur les fluctuations, et d'injecter la solution dans l'équation qui porte sur l'écoulement global. Ceci n'est possible qu'après avoir fait certaines approximations, mentionnées en introduction, et que l'on peut maintenant formuler précisément :

Séparation des échelles temporelles — On a vu que la condition d'obtention de structures cohérentes revient à dire que les fluctuations évoluent beaucoup plus rapidement que l'écoulement global, le rapport entre les temps caractéristiques étant $\alpha \ll 1$. On va donc chercher la solution asymptotique de l'équation aux fluctuations, en supposant Ω_0 constant, et l'injecter dans l'équation pour Ω_0 :

$$\partial_t \langle \Omega_0 \rangle = -\alpha \langle \Omega_0 \rangle - \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P} \langle \delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega \rangle \quad (20)$$

C'est ce que l'on appelle l'équation cinétique.

Approximation quasi-linéaire — Cette approximation, discutée en introduction, peut être ici précisée : elle consiste à négliger le terme $\sqrt{\alpha}(1 - \mathcal{P})[\delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega]$ dans (17). On peut montrer que cela ne modifie pas le bilan d'énergie $^{-k}$, ce qui la rend acceptable du point de vue physique. Un des objectifs de l'approche cinétique est d'étudier l'auto-consistance de cette approximation.

Le travail consiste donc à calculer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P} \langle \delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta\omega \rangle \quad (21)$$

où $\delta\omega$ est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire (Ω_0 constant)

$$\partial_t \delta\omega + L_{\Omega_0}[\delta\omega] = -\alpha \delta\omega + \sqrt{2}(1 - \mathcal{P})[f] \quad (22)$$

et $\delta\vec{v}$ se déduit de $\delta\omega$ par une transformation linéaire (inversion du rotationnel).

1.3 Lien entre dynamique stochastique et relaxation déterministe

De manière à résoudre (22), on commence par prendre la transformée de Fourier dans la direction x , $\delta\omega(x, y, t) = \sum_k \omega_k(y, t) e^{ikx}$ et $C(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{2} \sum_k c_k(y) c_k^*(y') e^{ikx}$ pour la fonction de corrélation du forçage (5) :

$$\partial_t \omega_k + L_k[\omega_k] = -\alpha \omega_k + c_k \eta_k \quad , \quad k \neq 0 \quad (23)$$

$^{-k}$. Pour cela, il faut remarquer que l'opérateur \mathcal{P} est un projecteur orthogonal pour le produit scalaire $(f, g) = \int f g^*$. On peut montrer de la même manière que l'approximation conserve l'énstrophie $\mathcal{C}_2 = \int \omega^2$, qui est un des paramètres essentiels de la théorie RMS.

avec l'opérateur d'Euler linéarisé

$$L_k[\omega_k] = ikU\omega_k - ikU''\psi_k \quad (24)$$

où $\delta\psi(x, y) = \sum_k \psi_k(y)e^{ikx}$ est la fonction de courant ^{-l}, qui vérifie $\Delta\delta\psi = \delta\omega$. Les η_k sont des bruits blancs gaussiens indépendants, c'est-à-dire qui vérifient $\langle \eta_k(t)\eta_k^*(t') \rangle = \delta_{kk'}\delta(t-t')$.

Avec la transformée de Fourier, l'opérateur \mathcal{P} — c'est-à-dire l'intégrale sur x — devient une somme (on note $\vec{v}_k = (v_k^{(x)}, v_k^{(y)})$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\langle \delta\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\delta\omega \rangle &= \sum_k \left(ik \langle \omega_k v_{-k}^{(x)} \rangle + \langle (\partial_y \omega_k) v_{-k}^{(y)} \rangle \right) \\ &= \sum_k ik \left(\langle \omega_k \partial_y \psi_{-k} \rangle + \langle \partial_y \omega_k \psi_{-k} \rangle \right) \\ &= \sum_k ik \left(\partial_y + \partial_{y'} \right) \langle \omega_k(y, t) \psi_{-k}(y', t) \rangle|_{y=y'} \\ &= \frac{d}{dy} \sum_k ik h_k(y, y, t) \end{aligned} \quad (25)$$

avec $h_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \psi_{-k}(y', t) \rangle$. La vorticité et la fonction de courant sont li es par $\Delta\psi_k = \omega_k \iff \psi_k = \Delta^{-1}\omega_k$, la fonction h_k peut donc se déduire de la fonction de corrélation $g_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \omega_{-k}(y', t) \rangle$ par une transformation linéaire.

C'est alors que l'on peut faire le lien avec la dynamique de relaxation déterministe : on r ecrit (23) sous la forme stochastique

$$d\omega_k = -(\alpha + L_k)\omega_k dt + c_k dW_k \quad (26)$$

où les processus de Wiener W_k vérifient $\eta_k = dW_k/dt$. On intègre formellement cette équation pour obtenir le résultat sous la forme d'une intégrale stochastique (au sens d'Itˆo) :

$$\omega_k(y, t) = \omega_k(y, 0) + \int_0^t dW_k(s) e^{(\alpha+L_k)(s-t)} [c_k](y) \quad (27)$$

On peut alors calculer g_k , en utilisant la propriété du calcul d'Itˆo $\langle dW_k(s) dW_k^*(s') \rangle = \delta(s-s')ds$ (et en supposant une vorticité initiale nulle) :

$$g_k(y, y', t) = \int_0^t ds e^{2\alpha(s-t)} e^{L_k(s-t)} [c_k](y) \cdot e^{L_{-k}(s-t)} [c_k^*](y') \quad (28)$$

Il faut alors remarquer que $e^{L_k(s-t)} [c_k](y)$ est la solution de l'équation d'Euler 2D linéarisée déterministe et sans friction, avec la condition initiale $c_k(y)$. Le résultat final est donc

$$g_k(y, y', t) = \int_0^t ds e^{2\alpha(s-t)} \tilde{g}_k(y, y', s-t) \quad (29)$$

avec la fonction de corrélation déterministe $\tilde{g}_k(y, y', t) = \tilde{\omega}_k(y, t) \tilde{\omega}_{-k}(y', t)$ où $\tilde{\omega}_k(y, t)$ est la solution de l'équation d'Euler 2D linéarisée sans forçage et sans friction, avec la condition initiale $c_k(y)$. Cette relation peut ˆetre simplement vue comme un principe de superposition : $\tilde{g}_k(y, y', s-t)$ est la fonction de corrélation au temps t correspondante à la relaxation de l'équation d'Euler linéarisée, forcée uniquement à l'instant s par c_k . La fonction de corrélation pour la solution de l'équation totale (avec forçage et friction) est donc la somme de ces contributions, avec la dissipation $e^{2\alpha(s-t)}$.

^{-l}. Dans un écoulement bidimensionnel incompressible, la fonction de courant est définie par $\vec{v} = (-\partial_y \psi, \partial_x \psi)$. La condition d'incompressibilité est alors automatiquement vérifiée, et l'étude de l'écoulement est simplifiée [17].

Pour la théorie cinétique des systèmes de particules avec interactions à longue portée et forçage stochastique [18], la relation équivalente lie la fonction de distribution à deux points à la solution de l'équation de Vlasov linéarisée, avec une condition initiale particulière. La solution explicite de cette équation étant connue^{-m-}, on peut calculer explicitement la fonction de distribution à deux points, et obtenir une équation cinétique fermée pour la fonction de distribution à un point. Dans le cas de l'équation d'Euler 2D linéarisée, la solution explicite n'est pas connue, on va donc plutôt chercher à évaluer le tenseur de Reynolds h_k numériquement, pour un profil de base $U(y)$ donné.

Les problèmes de mécanique des fluides sont caractérisés par la formation de structures à des échelles très fines (en particulier en turbulence 3D, mais cela est aussi vrai dans le cas qui nous intéresse), ce qui mène souvent à des instabilités numériques dans la résolution des équations aux dérivées partielles. En général, le terme de viscosité dans les équations dynamiques permet de régulariser les solutions, mais ici, on a choisi de prendre dès le départ une viscosité nulle. On va donc chercher à transformer l'équation différentielle en équation intégrale, qui pose moins de problèmes numériques. La première partie de mon stage a consisté à obtenir cette équation portant sur h_k , qui découle de la dynamique (23). On obtient, pour $\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(y, y', t) = h_k^\infty(y, y')$:

$$\begin{aligned}
 h_k^\infty(y, y') = & -\frac{i}{k} \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) c_k(y) c_k^*(y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \\
 & + \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} [U''(y) h_k^{\infty*}(y'_1, y) - U''(y'_1) h_k^\infty(y, y'_1)]
 \end{aligned} \tag{30}$$

où H_k est la fonction de Green du Laplacien (ou plutôt de sa transformée de Fourier). L'obtention de cette équation est décrite en Annexe A. Pour comprendre cette équation et sa solution — et notamment la limite inertielle $\alpha \rightarrow 0$ — il faut comprendre les caractéristiques de la dynamique sous-jacente, c'est-à-dire de l'équation d'Euler 2D linéarisée. C'est l'objet de la prochaine partie.

^{-m-}. Cette solution, due à Landau, est exprimée sous la forme d'une transformée de Fourier-Laplace inverse, voir par exemple [1].

2 L'équation d'Euler 2D linéarisée

2.1 Généralités

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\partial_t \omega_k = -L_k[\omega_k] \quad (31)$$

avec l'opérateur $L_k[\omega_k] = ikU\omega_k - ikU''\psi_k$. On cherche des solutions de la forme $\omega_k(y, t) = \omega_k(y)e^{-ikct}$ (modes propres), qui vérifient donc

$$L_k[\omega_k] = ikc\omega_k \quad (32)$$

Si l'on trouve une base de fonctions régulières $\{\omega_k^c\}$ solutions de cette équation, on peut écrire toute solution de (31) sous la forme $\omega_k(y, t) = \sum_c \omega_k^c(y)e^{-ikct}$, et on peut étudier directement la stabilité d'une condition initiale donnée, en fonction du signe de $\text{Im}(c)$. On parle alors de stabilité spectrale. Dans de nombreux cas, (32) n'a pas de solutions ⁻ⁿ⁻. Ceci est dû au fait que l'opérateur L_k est non-normal, c'est-à-dire qu'il ne commute pas avec L_k^\dagger (contrairement à la mécanique quantique par exemple, où l'hamiltonien vérifie $H^\dagger = H$, et est donc toujours diagonalisable). C'est en partie cette propriété qui rend l'équation d'Euler si singulière.

S'il existe une solution (ω_k, c) de (32), alors (ω_k^*, c^*) est aussi solution (réversibilité temporelle de l'équation d'Euler). On a donc existence de solutions exponentiellement instables ($\text{Im}(c) > 0$) si et seulement si on a aussi existence de solutions exponentiellement stables ($\text{Im}(c) < 0$). Autrement dit, pour que U soit stable, l'équation (32) ne doit posséder que des solutions avec $c \in \mathbb{R}$, appelées modes neutres. Pour chercher des critères d'instabilité, il suffit donc de chercher à quelles conditions (32) possède une solution avec $c \notin \mathbb{R}$. On a donc la dichotomie :

- L'existence de modes non-neutres ($c \notin \mathbb{R}$) implique directement l'instabilité spectrale du profil U . C'est ce qui est étudié en partie 2.2.
- Si il n'existe que des modes neutres ($c \in \mathbb{R}$), ou pas de modes du tout, il faut envisager une autre approche, c'est ce qui est fait en partie 2.3.

2.2 Stabilité spectrale

On cherche à quelle(s) condition(s) l'équation aux modes (32) admet des solutions avec $\text{Im}(c) \neq 0$. Ce point de vue a été adopté très tôt dans l'étude de l'équation d'Euler 2D, le premier résultat important est dû à Rayleigh, c'est le célèbre théorème du point d'inflexion (1880, [10]) : pour qu'un profil de base U soit instable, il doit nécessairement posséder un point d'inflexion, c'est-à-dire y_I tel que $U''(y_I) = 0$. Ce résultat, très élégant, n'est qu'une condition nécessaire d'instabilité (ou une condition suffisante de stabilité), et des généralisations existent [2].

2.3 Stabilité asymptotique : mécanisme d'Orr

On se place ici dans le cas où l'équation aux modes (32) n'admet aucune solution régulière. Dans ce cas, qui est un cas générique pour l'équation d'Euler [4], on a apparition d'un phénomène de relaxation, comparable à l'amortissement Landau dans la physique des plasmas [1], appelé mécanisme d'Orr [20]. Le cas où il existe des modes neutres ($c \in \mathbb{R}$) est plus compliqué, on verra qu'il correspond à un comportement diffusif du tenseur de Reynolds. On ne considèrera pas ce cas dans la suite.

2.3.1 Cas simple : profil linéaire

Pour expliquer ce phénomène, on prend le cas simple d'un profil de base linéaire $U(y) = sy$, $y \in [-1, 1]$ [8]. L'équation d'Euler (31) est alors simplifiée :

$$\partial_t \omega_k + ik s y \omega_k = 0 \quad (33)$$

⁻ⁿ⁻ sauf bien sûr pour $k = 0$, ce qui correspond à des fluctuations uniformes.

On est bien dans un cas d'absence totale de modes, car l'équation aux modes (32) s'écrit alors $(sy - c)\omega_k = 0$, et n'admet pas de solutions régulières autres que la solution identiquement nulle. Par contre, on est dans un cas où l'on peut directement résoudre l'équation d'Euler :

$$\omega_k(y, t) = \omega_k(y, 0)e^{-iksyt} \quad (34)$$

On en déduit le champ de vitesse :

$$\vec{v}_k(y, t) = \int dy' \vec{G}_k(y, y') \omega_k(y', 0) e^{-iksyt} \quad , \quad \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}_k(y, y') \right) \cdot \vec{e}_z = \delta(y - y') \quad (35)$$

avec la fonction de Green du rotationnel \vec{G}_k . Pour des temps longs, il s'agit d'intégrales oscillantes [4], dont le comportement est donné par les singularités de la fonction de Green. On trouve

$$v_k^{(x)}(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} v_{k,\infty}^{(x)}(y) \frac{e^{-iksyt}}{t} \quad \text{et} \quad v_k^{(y)}(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} v_{k,\infty}^{(y)}(y) \frac{e^{-iksyt}}{t^2} \quad (36)$$

où $\vec{v}_{k,\infty}$ est calculé à partir de la condition initiale $\omega_k(y, 0)$. On a une décroissance algébrique du champ de vitesse (contrairement à l'amortissement Landau qui est exponentiel), qui se produit sans dissipation par friction ou par viscosité. Pour comprendre ce phénomène, on peut regarder l'équation d'Euler linéarisée complète, qui prend ici la forme très simple

$$\frac{\partial \delta\omega}{\partial t} + sy \frac{\partial \delta\omega}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\omega(x, y, t) = \delta\omega(x - syt, y, 0) \quad (37)$$

La vorticité est advect e par le champ de base U , qui tend alors à mélanger le fluide, et la vitesse finalement calcul e est réduite (voir Fig. 4). Physiquement, c'est le cisaillement qui est à l'origine de l'amortissement. On comprends alors que ce phénomène va présenter une singularité aux points sans cisaillement, c'est-à-dire soit aux points tels que $U'(y_0) = 0$, qui sont appelés points stationnaires, soit aux bords du domaine.

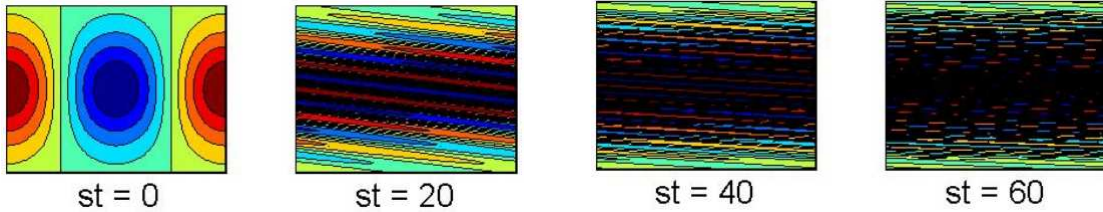


FIGURE 4 –  volution de la perturbation de la vorticité $\delta\omega$ advect e par un cisaillement constant, $U(y) = sy$. Le mélange tend à uniformiser la vorticité, et donc à annuler la vitesse, c'est le mécanisme d'Orr.

2.3.2 Cas général

Dans le cas général d'un profil quelconque U qui n'admet aucun mode, on retrouve l'expression de la vorticité asymptotique (34), [4] :

$$\omega_k(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \omega_{k,\infty}(y) e^{-ikU(y)t} + O\left(\frac{1}{t^\gamma}\right) \quad (38)$$

dont on peut déduire le champ de vitesse asymptotique, pour tout point non-stationnaire et en dehors des bords :

$$v_k^{(x)}(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega_{k,\infty}(y)}{ikU'(y)} \frac{e^{-ikU(y)t}}{t} \quad \text{et} \quad v_k^{(y)}(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega_{k,\infty}(y)}{ik(U'(y))^2} \frac{e^{-ikU(y)t}}{t^2} \quad (39)$$

On aura aussi besoin de la fonction de courant (qui peut être obtenue par exemple avec $v_k^{(y)} = ik\psi_k$) :

$$\psi_k(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega_{k,\infty}(y)}{(ikU'(y))^2} \frac{e^{-ikU(y)t}}{t^2} \quad (40)$$

La terme $\omega_{k,\infty}(y)$ peut être calculé numériquement à partir de la condition initiale $\omega(y, 0)$, sans avoir à simuler l'équation d'Euler. Ces résultats sont obtenus en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace de l'équation d'Euler, et le prolongement analytique du profil U dans le plan complexe. Ils sont valables en tout point non-stationnaire, mais quand même en présence de points stationnaires dans le profil. En un point stationnaire y_0 , on a $\omega_{k,\infty}(y_0) = 0$, la vorticité décroît donc en loi de puissance, mais on n'a pas plus de prédictions théoriques.

2.4 Conséquences pour le tenseur de Reynolds

On s'intéresse à l'équation d'Euler forc e (dans cette partie on note ω les champs stochastiques et $\tilde{\omega}$ les champs déterministes) :

$$\partial_t \omega_k = -L_k[\omega_k] + c_k \eta_k \quad (41)$$

On cherche à étudier la convergence du tenseur de Reynolds $h_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \psi_{-k}(y', t) \rangle$ et de ses dérivées, qui apparaissent dans (25). Comme en partie 1.3, on peut faire le lien entre cette dynamique forc e aléatoirement et la dynamique de relaxation déterministe  tudi e dans les paragraphes précédents : on a ^{-o-}

$$h_k(y, y', t) = \int_0^t ds \tilde{h}_k(y, y', s) \quad (42)$$

avec $\tilde{h}_k(y, y', t) = \tilde{\omega}_k(y, t) \tilde{\psi}_{-k}(y', t)$, où $\tilde{\omega}_k$ est la solution de l'équation d'Euler lin aris e sans forçage, avec la condition initiale $\tilde{\omega}_k(y, 0) = c_k(y)$, et $\tilde{\psi}_k = \Delta^{-1} \tilde{\omega}_k$.

2.4.1 Cas d'un opérateur normal

De manière générale, si L_k est diagonalisable (avec des valeurs propres λ), on a directement les différents comportements de la fonction de corrélation $g_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \omega_{-k}(y', t) \rangle$:

- si tous les modes sont stables ($\text{Re}(\lambda) < 0$), \tilde{g}_k tend vers 0 de façon exponentielle, donc g_k converge exponentiellement vers une limite finie.
- s'il existe des modes instables ($\text{Re}(\lambda) > 0$), \tilde{g}_k et g_k divergent exponentiellement.
- pour les modes neutres ($\text{Re}(\lambda) = 0$), \tilde{g}_k est constante donc g_k a un comportement diffusif ($g_k \propto t$).

2.4.2 Cas d'un opérateur non-normal : mécanisme d'Orr stochastique

Dans le cas (qui nous intéresse) d'un opérateur ne possédant pas de modes propres, c'est le mécanisme d'Orr qui contrôle la convergence de \tilde{h}_k , et donc de h_k . Les formes asymptotiques (38,39,40) donnent

$$\tilde{h}_k(y, y', t) = \tilde{\omega}_k(y, t) \tilde{\psi}_{-k}(y', t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \Rightarrow h_k(y, y', t) = \int_0^t ds \tilde{h}_k(y, y', s) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} C + \frac{C'}{t} \quad (43)$$

Et donc h_k^∞ est bien définie. Au contraire, les quantités qui interviennent directement dans le calcul de $\mathcal{P} \langle \delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta \omega \rangle$ (25) divergent :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_k(y, t) \tilde{v}_{-k}^{(x)}(y, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t} & \Rightarrow (\partial_{y'} h_k(y, y', t))|_{y=y'} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \ln t \\ \partial_y \tilde{\omega}_k(y, t) \tilde{v}_{-k}^{(y)}(y', t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t} & \Rightarrow (\partial_y h_k(y, y', t))|_{y=y'} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \ln t \end{cases} \quad (44)$$

-o-. Il s'agit de la même relation que celle d montr e dans 1.3, avec $\alpha = 0$ et le changement de variable $s \rightarrow s - t$.

Cependant, le calcul précis de $[\partial_{y'} h(y, y', t) + \partial_y h(y, y', t)]|_{y=y'}$, avec les préfacteurs donnés par (39) montre que ces divergences logarithmiques se compensent exactement, et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\partial_{y'} h(y, y', t) + \partial_y h(y, y', t)]|_{y=y'} = (\partial_y + \partial_{y'}) h_k^\infty|_{y=y'} = \frac{d}{dy} h_k^\infty(y, y) \quad (45)$$

qui est une quantité finie.

On s'attend donc à avoir une fonction $h_k^\infty(y, y')$ qui présente des dérivées partielles infinies en $y = y'$, mais une dérivée bien définie le long de la diagonale $y = y'$, sauf aux bords (Fig. 5).

Ces résultats théoriques sont illustrés dans la dernière partie par des calculs numériques. D'autre part, on peut voir ces résultats comme des conséquences des propriétés de convergence des intégrales intervenant dans l'équation intégrale pour h_k^∞ (30), c'est ce qui est expliqué en Annexe B.

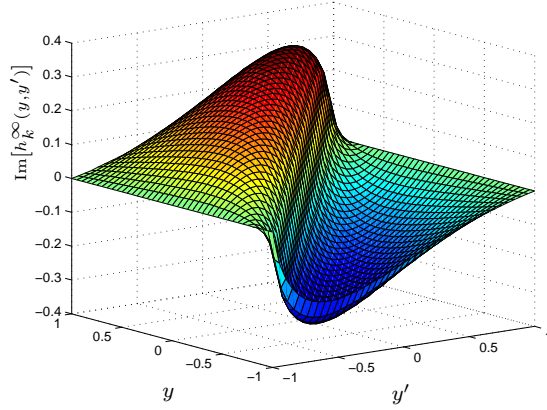


FIGURE 5 – Le tenseur de Reynolds $\text{Im}[h_k^\infty(y, y')]$ pour $k = 1, 5$ et $\alpha = 0$, dans le cas d'un profil de base linéaire (cas particulièrement simple, voir partie 3.2.1). On voit que cette surface présente une pente raide le long de la diagonale, ce qui montre le caractère divergent des dérivées partielles (à y ou y' fixé), et qui montre que ces divergences peuvent éventuellement se compenser pour donner une dérivée totale bien définie.

La convergence de $dh_k^\infty(y, y)/dy$ implique la convergence de $\mathcal{P}\langle \delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta \omega \rangle$ pour $t \rightarrow \infty$, quelle que soit la valeur de α . On a donc montré que l'équation cinétique

$$\partial_t \langle \Omega_0 \rangle = -\alpha \langle \Omega_0 \rangle - \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\langle \delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta \omega \rangle \quad (46)$$

est bien définie, pour tout α . C'est un point important pour la cohérence de la théorie cinétique.

3 Premiers résultats

3.1 Méthode numérique

On souhaite résoudre numériquement l'équation intégrale (30), qui est de la forme

$$h_k^\infty = S + T[h_k^\infty] \quad (47)$$

avec

$$S(y, y') = -\frac{i}{k} \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) c_k(y) c_k^*(y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \quad (48)$$

$$T[h](y, y') = \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} (U''(y) h^*(y'_1, y) - U''(y'_1) h(y, y'_1)) \quad (49)$$

où H_k est la fonction de Green du Laplacien.

Pour cela, on adopte un algorithme itératif, de la forme

$$h_{n+1} = S + T[h_n] \quad (50)$$

L'élaboration de cet algorithme a été l'autre tâche principale de mon stage.

3.1.1 Limitation mathématique

De manière générale, une suite définie par la relation de récurrence $\phi_{n+1} = F[\phi_n]$ converge vers le point fixe ϕ^* de F^{-p} si cette application est contractante (théorème du point fixe de Banach^{-q-}), c'est-à-dire si

$$\forall \phi, \psi \quad \frac{|F[\phi] - F[\psi]|}{|\phi - \psi|} < 1 \quad (51)$$

Dans le cas d'une application affine $F[\phi] = S + T[\phi]$, cette condition est équivalente à

$$\|T\| = \sup_{\phi} \frac{|T[\phi]|}{|\phi|} < 1 \quad (52)$$

Dans le cas qui nous concerne, la valeur de $\|T\|$ varie avec les paramètres α et k , on ne s'attend donc pas à avoir une convergence de l'algorithme dans tous les cas. De plus, la valeur de cette borne supérieure est difficile à obtenir, on n'a donc pas accès à un critère clair de convergence de l'algorithme défini par (50).

Concrètement, la convergence de l'algorithme est mesurée empiriquement en traçant $\ln \|h_n - h\|_2$ en fonction de n , où h_n est la n -ième itération et h est la dernière, et $\|\cdot\|_2$ est la norme L_2 ^{-r-} (Fig. 8(a)). Grossièrement, la valeur de $\|T\|$ est liée à la pente de la droite obtenue.

3.1.2 Limitation numérique

Formellement, les intégrales de la forme

$$\int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \quad (53)$$

convergent vers des valeurs principales de Cauchy dans la limite $\alpha \rightarrow 0$, et c'est ce qui assure la bonne définition de ces termes (voir l'Annexe B). Cependant, dans notre calcul numérique, les fonctions sont

^{-p-} tel que $F(\phi^*) = \phi^*$.

^{-q-} Ce théorème est valide pour toute application d'un espace métrique complet dans lui-même, ce qui est le cas ici.

^{-r-}

$$\|f\|_2 = \int dx dy |f(x, y)|^2$$

calculées en des points discrétisés, séparés d'un pas Δy , et les intégrales sont évaluées par un algorithme d'intégration numérique. Pour avoir des résultats corrects, il faut s'assurer que la discrétisation est suffisamment fine pour l'intégrande : il faut s'assurer que le dénominateur vérifie

$$|U(y) - U(y \pm \Delta y)| \ll \frac{2\alpha}{k} \quad (54)$$

On peut préciser cette condition : en tout point y non stationnaire, et pour Δy suffisamment petit, on a $U(y) - U(y \pm \Delta y) \simeq \pm U'(y)\Delta y$, la condition s'écrit donc

$$\alpha \gg \alpha_c(\Delta y) = \frac{k|U'|_{max}\Delta y}{2} \quad (55)$$

Pour prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$ — qui permet de vérifier les résultats de la partie précédente — il faut donc s'attendre à devoir prendre aussi $\Delta y \rightarrow 0$.

La variable h est discrétisée et les intégrales sont calculées pour des interpolations cubiques de cette variable (avec la fonction Matlab *spline*), avec la fonction *quadl* qui utilise la quadrature de Lobatto. Ces opérations ne rallongent pas beaucoup le temps de calcul, et permettent d'obtenir des résultats plus fiables, notamment dans la limite $\alpha \rightarrow 0$. Cet algorithme a été testé de différentes manières, en utilisant des intégrandes dans T qui rendent l'équation soluble analytiquement.

Ces intégrales sont calculées en chacun des points de la grille de discrétisation, chaque itération correspond donc à un temps de calcul de l'ordre de N^2 , avec $N \sim 1/\Delta y$. Le fait de raffiner la grille rallonge donc beaucoup le temps de calcul, c'est un frein à la compréhension du comportement de l'algorithme dans la limite inertielle.

3.2 Résultats

On considère pour ces calculs le cas d'une géométrie périodique dans la direction x , et avec des conditions aux limites rigides dans la direction y , c'est-à-dire que la perturbation de la vitesse est nulle sur les bords $y = \pm 1$. Pour la fonction de courant, cela revient aussi à imposer $\delta\psi(y = \pm 1) = 0$. Pour le forçage, on choisit de forcer uniquement selon le mode de Fourier $k = 1, 5$, avec une fonction de corrélation $c_k(y) = e^{iy}$.

3.2.1 Profil linéaire

Comme en partie 2.3.1, le cas d'un profil linéaire $U(y) = sy$ est particulièrement simple, en effet $\|T\| = 0$ et la solution de l'équation intégrale est alors :

$$h_k^\infty(y, y') = S(y, y') = -\frac{i}{k} \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) c_k(y) c_k^*(y'_1)}{s(y - y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \quad (56)$$

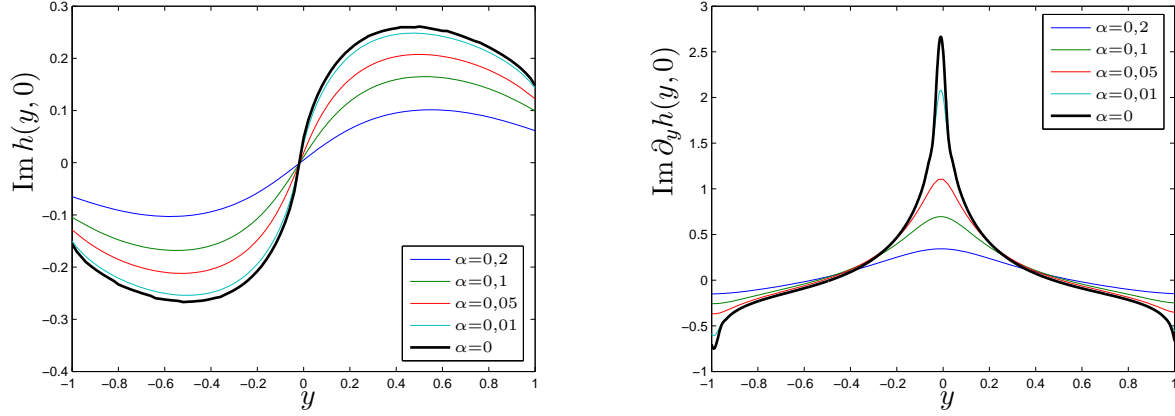
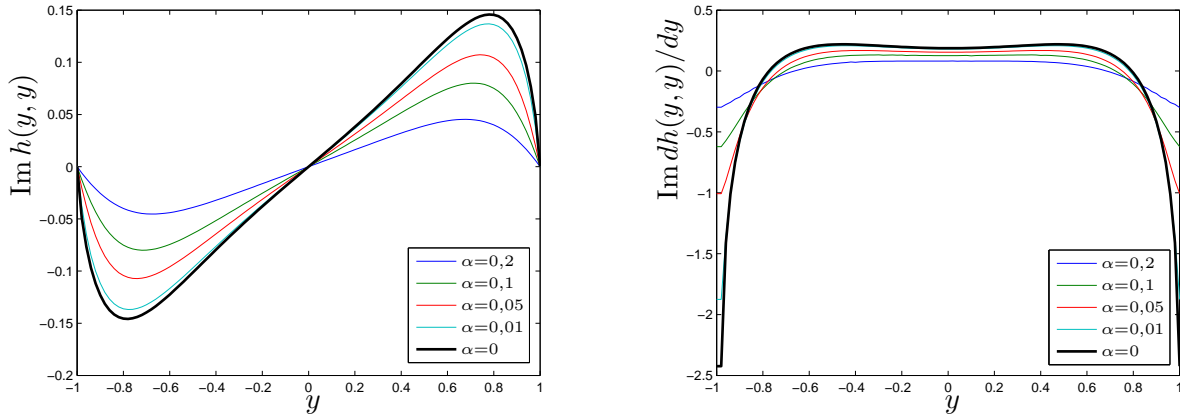
On peut calculer directement la limite de h_k^∞ pour $\alpha \rightarrow 0$, en particulier :

$$\text{Im } h_k^\infty(y, y') \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{ks} \int^* dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) \text{Re} [c_k(y) c_k^*(y'_1)]}{y'_1 - y} \quad (57)$$

où \int^* désigne la partie principale de Cauchy (voir l'annexe B). On vérifie bien les résultats de la partie précédente dans ce cas : dans la limite inertielle $\alpha \rightarrow 0$, les dérivées partielles de h_k^∞ divergent le long de la diagonale $y = y'$, alors que la dérivée totale est bien définie, sauf aux bords (Fig. 6).

L'équation cinétique (20) se réécrit pour la vitesse moyenne

$$\partial_t \langle U \rangle = -\alpha \langle U \rangle - \alpha \sum_k k \text{Im } h_k^\infty(y, y) \quad (58)$$

(a) Fonction h dans la direction transverse $y' = \text{cte} = 0$.(b) Apparition de la singularité en $y = y' = 0$ de la dérivée partielle de la fonction h .(c) Divergence du tenseur de Reynolds le long de la diagonale $y = y'$.

(d) Apparition des singularités aux bords de la dérivée totale de la divergence du tenseur de Reynolds.

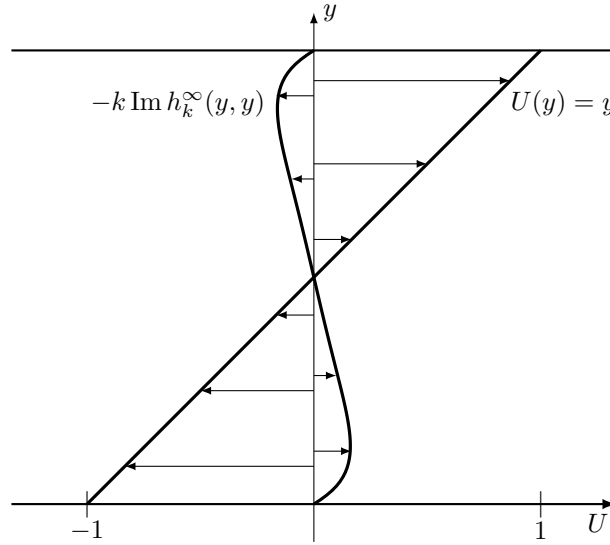
FIGURE 6 – Résultats dans le cas du profil linéaire $U(y) = y$, pour $\Delta y = 1/50$. On observe bien une convergence vers la valeur principale de Cauchy (en trait noir, il s'agit en fait d'une approximation numérique de la valeur principale, calculée numériquement avec la définition (68), avec $\epsilon = 10^{-5}$).

La contribution des fluctuations à l'écoulement moyen est mesurée par le terme $-k \text{Im } h_k^\infty(y, y)$ (divergence du tenseur de Reynolds), il faut donc comparer ces deux quantités pour évaluer l'influence de ces fluctuations (Fig. 7(a)). On observe que le terme $-k \text{Im } h_k^\infty(y, y)$ conserve la symétrie du profil U par rapport à $y = 0$, et qu'il s'annule bien aux bords $y = \pm 1$ (conditions aux limites rigides). On voit que les fluctuations ont tendance à réduire le cisaillement au centre et à l'augmenter aux bords, et qu'elles tendent à faire apparaître des points stationnaires dans le profil. On voit aussi que les fluctuations ont tendance à diminuer la vitesse moyenne, et donc l'énergie de l'écoulement moyen. Ceci est dû au fait que le profil $U = y$ n'est pas un état stationnaire (en particulier il ne respecte pas le bilan d'énergie (6)), il ne faut donc pas forcément s'attendre dans ce cas à ce que l'énergie injectée dans les fluctuations soit transférée dans l'écoulement moyen.

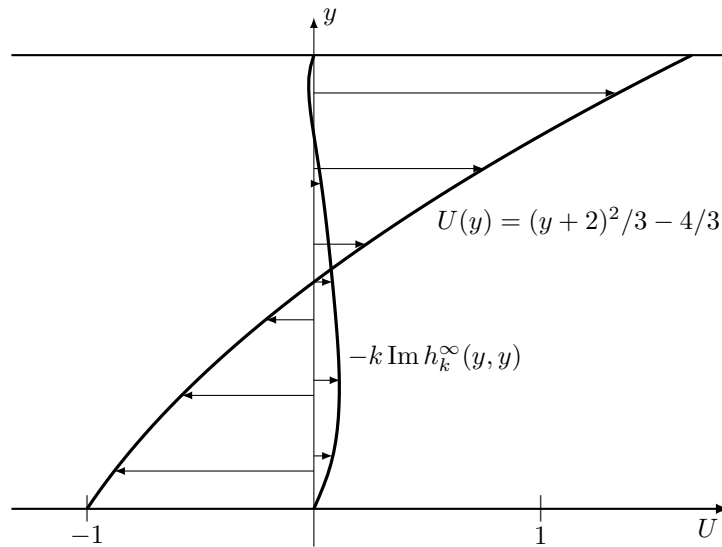
3.2.2 Profil parabolique

On étudie maintenant le cas de l'écoulement de base $U(y) = (y + 2)^2$. Cet écoulement est l'un des plus simples que l'on puisse considérer, en effet il ne possède pas de point d'inflexion ($U''(y) = 2$), il est donc spectralement stable, par application directe du théorème du point d'inflexion de Rayleigh (voir partie 2.2); et il ne possède pas de point stationnaire.

Pour $\alpha = 0,2$ et $\Delta y = 1/20$, on trouve une bonne convergence de l'algorithme : la courbe $\ln \|h_n - h\|_2 = f(n)$ est bien décroissante (Fig. 8(a)), et le même calcul avec des grilles plus fines — c'est-à-dire des α_c plus petits — donne le même résultat. La comparaison de la divergence du tenseur de Reynolds et du profil (Fig. 7(b)) montre que l'on n'a plus la symétrie par rapport à $y = 0$, et que les fluctuations sont plus fortes dans la zone où l'écoulement est plus faible.



(a) Cas du profil linéaire, $\alpha = 0,05$.



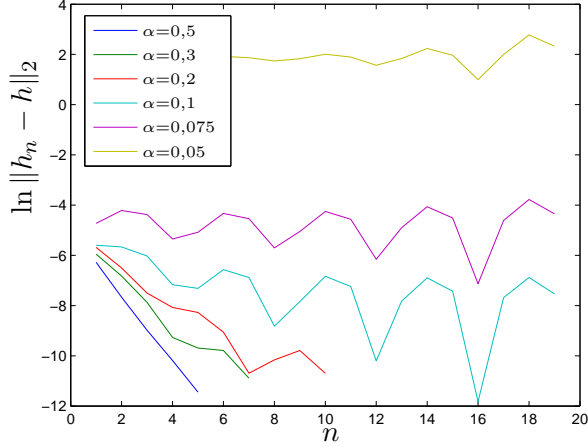
(b) Cas du profil parabolique, $\alpha = 0,2$. Il s'agit ici d'un écoulement moins intense (d'un facteur $1/3$), de manière à ce que la divergence du tenseur de Reynolds soit comparable à U .

FIGURE 7 – Comparaison du profil de base et de la divergence du tenseur de Reynolds associée.

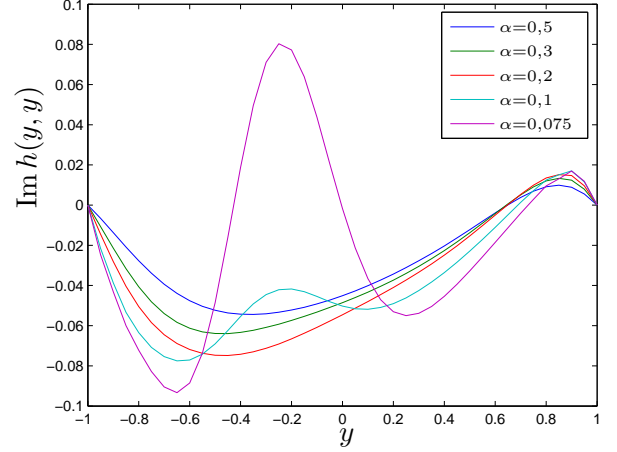
En faisant varier α , on remarque que l'on a dans ce cas à faire face aux différentes difficultés numériques mentionnées plus haut (parties 3.1.1, 3.1.2) : l'algorithme itératif ne converge pas pour toutes les valeurs de α . Comme attendu, l'algorithme converge pour des valeurs de α supérieures et

de l'ordre de $\alpha_c = k|U'|_{max}\Delta y/2 = 0,225$ (défini plus haut, (55)). Pour ces valeurs de α , la courbe $\ln \|h_n - h\|_2 = f(n)$ est décroissante ($\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,3$, $\alpha = 0,2$ sur la figure 8(a)), et la pente diminue avec α : si l'on réduit la dissipation, l'algorithme converge moins rapidement.

Pour les autres valeurs de α ($\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,075$, $\alpha = 0,05$), la courbe $\ln \|h_n - h\|_2 = f(n)$ présente des oscillations, et de plus la comparaison avec des calculs plus fins ($\Delta y < 1/20$) montre que le résultat n'est pas correct.



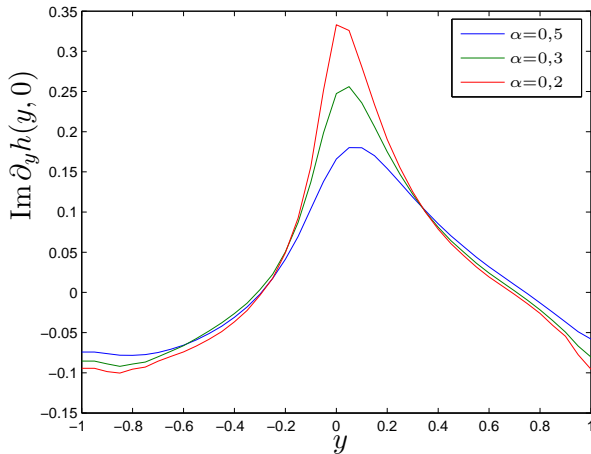
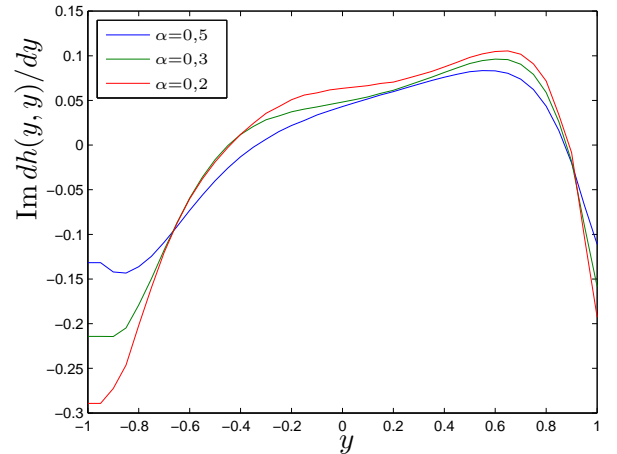
(a) Test de la convergence de l'algorithme.



(b) Résultat de l'algorithme.

FIGURE 8 – Convergence de l'algorithme, dans le cas du profil parabolique, pour $\Delta y = 1/20$, c'est-à-dire pour $\alpha_c = 0,225$. Pour $\alpha = 0,1$ et $\alpha = 0,075$, l'algorithme n'a pas bien convergé, et le résultat présente une erreur qui continue à augmenter pour des valeurs de α encore plus faibles.

Dans ce cas, on a donc accès à des résultats pour peu de valeurs de α , mais cela est suffisant pour observer, comme dans le cas d'un profil linéaire, les propriétés attendues du tenseur de Reynolds (Fig. 9).

(a) Apparition de la singularité en $y = y' = 0$ de la dérivée partielle de la fonction h .

(b) Apparition des singularités aux bords de la dérivée totale de la divergence du tenseur de Reynolds.

FIGURE 9 – Résultats dans le cas du profil parabolique $U(y) = (y + 2)^2$, pour $\Delta y = 1/20$.

Pour $\Delta y = 1/20$, l'algorithme converge jusqu'à $\alpha = 0,2$, ce qui semble être en accord avec la valeur prévue de α_c . Pour le vérifier, il faut chercher la valeur minimale de α que l'on peut atteindre

avec d'autres grilles. Pour $\Delta y = 1/10$, on observe le même comportement : la courbe $\ln \|h_n - h\|_2 = f(n)$ commence à présenter des oscillations pour $\alpha = 0,35$, ce qui est encore une fois en accord avec l'expression de α_c . Cependant, ce résultat ne se poursuit pas pour des grilles plus fines que $\Delta y = 1/20$: pour $\Delta y = 1/60$, on observe toujours les oscillations à partir de $\alpha = 0,1$, alors que $\alpha_c(\Delta y = 1/60) = 0,075$. On pourrait alors être dans un cas où l'algorithme ne peut pas converger, indépendamment de la discrétisation, pour la raison évoquée en partie 3.1.1 : l'opérateur T qui définit l'algorithme de point fixe pourrait ne pas être contractant. La suite du travail consistera en partie à vérifier ces affirmations, en faisant varier les différents paramètres (intensité du profil de base, forme du forçage).

Conclusion

La formation de structures cohérentes est un aspect essentiel de la climatologie, et motive des études approfondies sur les plans expérimental, numérique et théorique. Les calculs numériques semblent montrer que l'approximation quasi-linéaire suffit à décrire ce phénomène dans certains cas [15, 19, 23], mais cette approche ne permet pas de donner un domaine de validité précis de l'approximation, et ne fournit pas une compréhension satisfaisante du phénomène.

Les premiers pas de l'approche théorique qui sont présentés ici permettent déjà d'éclaircir certains points. D'abord, le lien entre la formation de structures cohérentes, la séparation des échelles temporelles et la faiblesse du flux d'énergie est fait en partie 1.1 : on a montré que cela revient à considérer le régime $\frac{\sigma^{1/2}}{L^2 \alpha^{3/2}} \gg 1$. Cette séparation des échelles temporelles permet de formuler les "approximations cinétiques" (partie 1.2), qui permettent de découpler l'équation pour l'écoulement moyen de l'équation pour les fluctuations, et de linéariser l'équation portant sur les fluctuations. Ceci constitue une étude assez générale de l'équation d'Euler forcée.

La nouveauté dans le travail que j'ai effectué est la résolution de l'équation dynamique pour les fluctuations sous forme d'une équation intégrale (annexe A). La résolution numérique de cette équation (partie 3) donne directement la forme asymptotique de la divergence du tenseur de Reynolds, c'est-à-dire la contribution moyenne des fluctuations turbulentes à l'évolution de l'écoulement global. C'est un apport considérable par rapport aux méthodes numériques directes qui consistent à résoudre les équations dynamiques avec des codes plus complexes, pendant des temps très longs de manière à pouvoir ensuite faire une moyenne [15]. Grâce à l'étude approfondie de l'équation d'Euler [4], la limite inertielle (de forçage et friction nuls) est relativement bien comprise, et ces résultats théoriques sont confirmés par le calcul numérique.

La suite du travail, que je compte faire en thèse dès l'année prochaine, consistera à comprendre les aspects plus techniques de convergence de l'algorithme calculant le tenseur de Reynolds, notamment dans la limite inertielle. Ce calcul du tenseur de Reynolds n'est qu'une étape du calcul de l'évolution de l'écoulement moyen, qui sera effectué soit par une résolution itérative de l'équation cinétique (méthode d'Euler par exemple), soit par un algorithme de point fixe qui donnerait directement l'état stationnaire. Ensuite, il faudra analyser ces résultats en fonction des paramètres du forçage, on espère observer des phénomènes intéressants comme des cas de bistabilité. Enfin, il faudra tenter de généraliser ces résultats à des modèles pertinents d'écoulements atmosphériques. La généralisation au modèle barotrope avec effet β devrait être immédiate : il s'agit du modèle le plus simple, qui prend en compte la force de Coriolis par un terme linéaire (l'effet β) :

$$\partial_t q + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} q = -\alpha q + \sqrt{2\alpha} f \quad , \quad q = \omega + \beta y \quad (59)$$

L'approximation quasi-linéaire pour ce modèle a déjà été étudiée par des collaborateurs [23], avec des résultats encourageants. Le modèle barotrope est le plus simple d'une hiérarchie de modèles allant des équations primitives — utilisées dans les codes GCM (Global Climate Models) pour l'étude du climat et de la météorologie — aux équations *shallow water* et quasi-géostrophiques. Les études théoriques se concentrent généralement sur les modèles les plus simples, il est donc intéressant de chercher à atteindre des modèles plus réalistes.

Références

- [1] Radu Balescu. *Statistical dynamics – Matter out of equilibrium*, chapter 5–8. Imperial College Press, 1997.
- [2] N. J. Balmforth and P. J. Morrison. A necessary and sufficient instability condition for inviscid shear flow. *Studies in Applied Mathematics*, 102 :309–344, 1999.
- [3] Freddy Bouchet and Thierry Dumont. Emergence of jupiter’s vortices and jets from random initial conditions. *arXiv :cond-mat/0305206v1*, 2003.
- [4] Freddy Bouchet and Hidetoshi Morita. Large time behavior and asymptotic stability of the 2d euler and linearized euler equations. *Physica D : Non Linear Phenomena*, 239 :948–966, 2010.
- [5] Freddy Bouchet and Eric Simonnet. Random changes of flow topology in two-dimensional and geophysical turbulence. *Physical Review Letters*, 102(9) :094504, 2009.
- [6] Freddy Bouchet and Joel Sommeria. Emergence of intense jets and jupiters great red spot as maximum-entropy structures. *Journal of Fluid Mechanics*, 464 :165–207, 2002.
- [7] Freddy Bouchet and Antoine Venaille. Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows. *Physics Report*, 515(5) :227–295, 2012.
- [8] K. M. Case. Stability of inviscid plane couette flow. *The Physics of Fluids*, 3(2) :143–148, 1960.
- [9] T. E. Dowling and A. P. Ingersoll. Potential vorticity and layer thickness variations in the flow around jupiters great red spot and white oval bc. *Journal of Atmospheric Sciences*, 45 :1380–1396, 1988.
- [10] P. G. Drazin and William H. Reid. *Hydrodynamic Stability*, chapter 4. Cambridge University Press, 1982.
- [11] Uriel Frisch. *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*, chapter 6. Cambridge University Press, 1995.
- [12] Crispin W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*, chapter 3.8.1, 4. Springer, 1985.
- [13] Andrey N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluids for very large reynolds number. *Daukl. Akad. Nauk. SSSR*, 30 :9–13, 1941.
- [14] Robert H. Kraichnan and David Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43 :547–619, 1980.
- [15] Brad Marston, E. Conover, and Tapio Schneider. Statistics of an unstable barotropic jet from a cumulant expansion. *American Meteorological Society*, 65, 2008.
- [16] Jonathan Miller. Statistical mechanics of euler equations in two dimensions. *Physical Review Letter*, 65(17) :2137–2140, 1990.
- [17] Louis Melville Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*, chapter 4, 6. Courier Dover Publications, 1968.
- [18] Cesare Nardini, Shamik Gupta, Stefano Ruffo, Thierry Dauxois, and Freddy Bouchet. Kinetic theory for non-equilibrium stationary states in long-range interacting systems. *Journal of Statistical Mechanics*, 2012.
- [19] Paul O’Gorman and Tapio Schneider. Recovery of atmospheric flow statistics in a general circulation model without nonlinear eddy-eddy interactions. *Geophysical Research Letters*, 34, 2007.
- [20] William M’F. Orr. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 27 :6–69, 1907.
- [21] Joseph Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*, chapter 1–3. Springer, 1987.
- [22] Raoul Robert and Joel Sommeria. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 229 :291–310, 1991.
- [23] Kaushik Srinivasan and W. R. Young. Zonostrophic instability. *en preparation*, 2012.

A Dérivation (ou plutôt intégration) de l'équation intégrale

Comme expliqué en partie 1.3, on cherche à trouver une équation intégrale pour $h_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \psi_{-k}(y', t) \rangle$, où ω_k vérifie

$$\partial_t \omega_k + L_k[\omega_k] = -\alpha \omega_k + c_k \eta_k \quad (60)$$

avec l'opérateur d'Euler linéaire

$$L_k[\omega_k] = ikU\omega_k - ikU''\psi_k \quad (61)$$

et $\psi_k = \Delta^{-1}\omega_k$. Plus explicitement,

$$\omega_k(y, t) = \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \psi_k(y, t) \iff \psi_k(y, t) = \int dy_1 H_k(y, y_1) \omega_k(y_1, t) \quad (62)$$

où H_k est la fonction de Green de la transformée de Fourier du Laplacien.

Par application de la formule d'Itô à (60), on a une équation d'évolution pour $g_k(y, y', t) = \langle \omega_k(y, t) \omega_{-k}(y', t) \rangle$ (équation de Lyapunov) :

$$\partial_t g_k + \left(L_k^{(1)} + L_k^{(2)} \right) g_k = -2\alpha g_k + c_k(y) c_k^*(y') \quad (63)$$

où $L_k^{(i)}$ est l'opérateur d'Euler linéarisé appliqué à la i -ème variable. Explicitement, cette équation s'écrit^{-s-}

$$\begin{aligned} \partial_t g_k(y, y', t) = & - [ik(U(y) - U(y')) + 2\alpha] g_k(y, y', t) \\ & + ikU''(y)h_k^*(y', y, t) - ikU''(y')h_k(y, y', t) + c_k(y)c_k^*(y') \end{aligned} \quad (64)$$

On peut intégrer formellement cette équation en considérant les trois derniers termes comme des termes de source, on obtient (en supposant une vorticité initiale nulle) :

$$\begin{aligned} g_k(y, y', t) = & c_k(y)c_k^*(y') \int_0^t ds e^{-[ik(U(y)-U(y'))+2\alpha](s-t)} \\ & + ik \int_0^t ds [U''(y)h_k^*(y', y, s) - U''(y')h_k(y, y', s)] e^{[ik(U(y)-U(y'))+2\alpha](s-t)} \end{aligned} \quad (65)$$

et on en déduit l'équation intégrale pour h_k , avec (62) :

$$\begin{aligned} h_k(y, y', t) = & \int dy'_1 H_k(y', y'_1) c_k(y) c_k^*(y'_1) \int_0^t ds e^{-[ik(U(y)-U(y'_1))+2\alpha](s-t)} \\ & + ik \int dy'_1 H_k(y', y'_1) \int_0^t ds [U''(y)h_k^*(y'_1, y, s) - U''(y'_1)h_k(y, y'_1, s)] e^{[ik(U(y)-U(y'_1))+2\alpha](s-t)} \end{aligned} \quad (66)$$

Dans la limite $t \rightarrow \infty$, on peut effectuer les intégrales temporelles (avec le changement de variable $s' = s - t$) et on obtient l'équation intégrale (30) pour $h_k^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t)$:

$$\begin{aligned} h_k^\infty(y, y') = & -\frac{i}{k} \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) c_k(y) c_k^*(y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \\ & + \int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} [U''(y)h_k^{\infty*}(y'_1, y) - U''(y'_1)h_k^\infty(y, y'_1)] \end{aligned} \quad (67)$$

-s-. Ici on utilise

$$g_{-k}(y, y', t) = g_k^*(y, y', t) = g_k(y', y, t)$$

et la présence de ψ_k dans $L_k[\omega_k]$ pour faire apparaître h_k .

B Propriétés de l'équation intégrale

On précise ici quelques propriétés de convergence des intégrales intervenant dans l'équation intégrale pour h_k^∞ . Pour cela, il faut d'abord rappeler quelques généralités sur la valeur principale de Cauchy d'une intégrale impropre.

Valeur principale de Cauchy et formule de Plemelj

La valeur principale de Cauchy de l'intégrale d'une fonction $g(x)$ qui présente une singularité en 0 est définie par

$$\int^* dx g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int^{-\epsilon} dx g(x) + \int_{\epsilon} dx g(x) \right) \quad (68)$$

Cela consiste à ne garder que la partie non-divergente de l'intégrale de la fonction g , en particulier cette intégrale converge pour les fonctions de la forme $g(x) = f(x)/x$ où f est continue en 0. La distribution valeur principale de Cauchy de g , notée Pg , est alors définie par

$$\int Pg = \int^* g \quad (69)$$

La formule de Plemelj [1] donne deux moyens d'obtenir cette distribution :

$$\frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi e^{i\xi x} = \delta(x) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x} \quad (70)$$

Ces relations sont des égalités entre distributions, qui ne prennent de sens que lorsqu'elles sont intégrées avec une fonction test f :

$$\frac{i}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int dx \frac{f(x)}{x + i\epsilon} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int dx f(x) e^{i\xi x} = f(0) + \frac{i}{\pi} \int^* dx \frac{f(x)}{x} \quad (71)$$

Conséquences pour l'équation intégrale

L'équation intégrale pour h_k^∞ (30) fait intervenir des intégrales de la forme

$$\int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \quad (72)$$

où $H_k(y, z)$ est la fonction de Green de l'opérateur qui transforme la vorticité en fonction de courant. En tout point y non stationnaire, c'est-à-dire tel que $U'(y) \neq 0$, on a $U(y) - U(y'_1) \sim U'(y)(y - y'_1)$. En utilisant la première relation de (71), on voit donc que cette intégrale peut se rapporter, par un changement de variable, à une valeur principale de Cauchy dans la limite $\alpha \rightarrow 0$:

$$\int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \int^* dY'_1 \frac{\hat{H}(Y', Y'_1)}{Y'_1 - Y} - \frac{i}{\pi} \hat{H}(Y', Y) \quad (73)$$

où \hat{H} est telle que $\hat{H}(Y', Y'_1) dY'_1 = H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1) dy'_1$. Ce changement de variable fait notamment apparaître un facteur U' au dénominateur, cette relation présente donc une singularité aux points stationnaires.

Limites $\alpha \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$ — Dans la dérivation de l'équation intégrale, on pourrait aussi prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$ avant la limite $t \rightarrow \infty$. En effet, prendre $\alpha = 0$ dans (66) fait apparaître des intégrales de la forme

$$\int_0^t ds \int dy'_1 H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1) e^{-ik(U(y) - U(y'_1))s} \quad (74)$$

qui convergent aussi vers des intégrales de Cauchy dans la limite $t \rightarrow \infty$ (sauf aux points stationnaires), grâce à la deuxième relation de (71). D'un point de vue formel, prendre la limite $t \rightarrow \infty$ est donc équivalent à prendre la limite $\alpha \rightarrow 0$. D'un point de vue pratique, l'équation intégrale avec α fait intervenir moins d'intégrations, elle est donc plus simple à résoudre numériquement.

Convergence des fonctions de corrélation — La différence de comportement entre h_k^∞ et ses dérivées partielles, présentée dans la partie 2.4, doit être visible dans les équations intégrales associées. En effet, quelle que soit la géométrie (canal ou boîte périodique), la fonction de Green $H_k(y, z)$ est continue mais possède des dérivées partielles discontinues en $y = z$.

$H_k(y, z)$ est continue en $y = z$ donc le terme de droite de (73) est bien défini dans la limite $Y' \rightarrow Y$ (ou $y' \rightarrow y$). Ceci assure la bonne définition de l'équation intégrale donnant h_k^∞ (30) en $y = y'$, et donc de $h_k^\infty(y, y)$. Au contraire, la dérivée par rapport à y' de (30) fait apparaître des termes de la forme

$$\int dy'_1 \frac{\partial_{y'} H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1)}{U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k}} \quad (75)$$

et comme $\partial_y H_k(y, z)$ n'est pas continue en $y = z$, l'argument précédent ne s'applique pas, et $\partial_{y'} h_k^\infty|_{y'=y}$ diverge. De même, la dérivée par rapport à y de (30) fait apparaître des termes de la forme

$$\int dy'_1 \frac{H_k(y', y'_1) f_k(y, y'_1) U'(y)}{(U(y) - U(y'_1) - \frac{2i\alpha}{k})^2} \quad (76)$$

qui ne convergent pas vers une intégrale de Cauchy quand $\alpha \rightarrow 0$, donc $\partial_y h_k^\infty|_{y'=y}$ diverge.