

MASTER SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2011–2012
Clément Tauber
M2 Physique

Modèles WZW jaugés et anomalies globales

Résumé : *Les modèles WZW sont des théories des champs bidimensionnelles à valeur dans un groupe de Lie G et munies de la symétrie conforme, laissant la métrique bidimensionnelle invariante à une dilatation locale près. Si l'on quantifie puis l'on jauge l'action adjointe de G pour un tel modèle, des anomalies globales, qui empêchent l'invariance par des transformations de jauge non déformables à l'identité, peuvent persister dans le système. On décrit ici une condition générale pour l'existence de ces anomalies, puis on étudie cette condition pour tous les modèles dits cosets, où le champ de jauge est à valeur dans une des sous-algèbres de l'algèbre de Lie de G . C'est la suite directe du travail effectué en stage par Paul de Fromont pour les groupes classiques. En regardant cas par cas, une classification exhaustive est ainsi obtenue pour toutes les sous-algèbres semi-simples des algèbres de Lie exceptionnelles.*

Mots clefs : *Modèles WZW, Anomalie globale de jauge, Groupes de Lie exceptionnels, Sous-algèbres de Lie semi-simples*

Stage encadré par :

Krzysztof Gawędzki

kgawedzk@ens-lyon.fr / tél. (+33) 4 72 72 84 42

Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon

46, allée d'Italie

69007 Lyon

<http://www.ens-lyon.fr/PHYSIQUE/>



20 juillet 2012

Remerciements

Un grand merci à Krzysztof Gawędzki pour son encadrement, sa patience et sa disponibilité tout le long du stage : merci pour les minis cours particuliers, pour les réponses à mes questions (parfois répétitives) et pour toutes les discussions que nous avons pu avoir. Merci aussi à Thomas, Louis-Paul et Arnaud de m'avoir accepté dans leur bureau après un impitoyable casting et merci à tout les membres du laboratoire de physique de l'ENS pour leur accueil chaleureux.

Table des matières

Introduction	1
1 La symétrie conforme	1
1.1 Des transformations à l'invariance conforme	1
1.2 Symétrie conforme bidimensionnelle	2
2 Modèles de Wess-Zumino-Witten jaugés	3
2.1 Modèles WZW	3
2.2 Invariance de jauge et anomalies	5
2.3 Condition d'invariance globale	7
3 Anomalies globales de jauge pour les groupes exceptionnels	12
3.1 Cas de $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_7$, et \mathfrak{e}_8	12
3.2 Cas de \mathfrak{e}_6	13
3.2.1 Cas où $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$	13
3.2.2 Sous-algèbres régulières	14
3.2.3 S-algèbres et R-algèbres	16
Conclusion et perspectives	20
Bibliographie	21
A Poids et racines de \mathfrak{e}_6 et \mathfrak{e}_7	22
B Détail des calculs	22

Introduction

L'étude des symétries sous-jacentes d'un système physique est devenue une méthode fructueuse pour l'élaboration de modèles théoriques, qui se sont révélés extrêmement pertinents dans la description de la nature. Parmi ces symétries, il en existe une particulière, appelée invariance conforme et que l'on retrouve de façon transversale dans divers domaines de la physique [1]. Ce stage, et donc le présent rapport, s'inscrit dans le contexte de la théorie conforme bidimensionnelle, où l'invariance y est très particulière. Après avoir brièvement présenté et motivé l'étude de la théorie conforme, on construit pas à pas une théorie des champs très générale : les modèles de Wess-Zumino-Witten. Ce modèle est quantifiable, et fait apparaître des symétries internes que l'on souhaite jauger. Apparaissent alors des anomalies. D'abord, lorsqu'on rend la symétrie locale au niveau infinitésimal, on ne peut jauger que certaines symétries, ou bien le modèle s'écroule ; ce sont les anomalies locales. De plus, des anomalies moins courantes, dites globales et liés à la topologie du système, empêchent l'invariance de la théorie sous des transformations non déformables à l'identité, ce qui contraint encore plus le modèle.

Une fois décrite la condition générale d'existence de ces dernières, mon travail a consisté à regarder au cas par cas les différents modèles, et les classifier selon ces anomalies. C'est la suite directe du stage effectué par Paul de Fromont il y a deux ans [2]. Après avoir retrouvé ses résultats sur les groupes classiques (non présentés ici), on traite en détails le cas des groupes exceptionnels, et les résultats obtenus sont a priori inédits. Tout ce travail m'a de plus permis de me familiariser avec les notions de base en géométrie différentielle et en topologie, et d'étudier en profondeur la structure des algèbres de Lie.

1 La symétrie conforme

1.1 Des transformations à l'invariance conforme

Les transformations conformes sont les transformations géométriques qui préservent les angles (et donc pas nécessairement les distances). Ces dernières sont connues depuis l'antiquité, puisque la projection stéréographique, due à Ptolémée, possède cette propriété, bien connue des navigateurs. La projection de Mercator en est un autre exemple. Au XIX^e siècle, les mathématiciens Hermann Schwarz et Elwin Christoffel développent ces transformations dans le cadre de la théorie du potentiel, dont on retrouve de nombreuses applications en mécanique des fluides. Ainsi, à la même période, l'aérodynamicien russe Nikolaï Joukovski utilise une transformation pour calculer le profil d'écoulement sur une aile d'avion à partir de l'écoulement sur un cylindre. Encore une fois, il s'agit d'une transformation conforme.

La notions d'invariance conforme apparaît ensuite en physique statistique, en constatant que la limite d'échelle de certains systèmes au point critique d'une transition de phase est précisément invariante par ces transformations. Le formalisme de théorie conforme des champs est alors développé. Dans un espace non bidimensionnel, l'invariance conforme impose une invariance par un nombre fini de générateurs : les rotations, les translations, les dilatations et les transformations conformes dites spéciales, qui sont la composée d'une réflexion et d'une inversion. En revanche, en dimension 2, les transformations conformes sont bien plus nombreuses puisqu'elle sont engendrées par une infinité de générateurs. L'invariance par de telles transformations devient ainsi extrêmement contraignante, et donc riche de conséquences. En 1984, un article fondateur [3] dû à Belavin, Polyakov, et Zamolodchikov montre comment l'invariance conforme permet de trouver des solutions exactes de certains modèles, dits minimaux, décrivant la limite d'échelle de certains systèmes bidimensionnels au point critique, comme par exemple le modèle d'Ising, modèle simplifié de matériau ferromagnétique. A la transition, les fluctuations sont telles que la longueur de corrélation devient infinie, la symétrie conforme apparaît, et on est alors capable de calculer exactement les fonctions de corrélation du système à tous les ordres.

De façon partiellement indépendante, l'invariance conforme est aussi apparue en théorie des cordes, candidat potentiel pour une théorie quantique de la gravitation. L'invariance par reparamétrisation d'un modèle de corde conduit nécessairement à l'invariance conforme. La théorie conforme des champs

s'applique donc à des systèmes très particuliers, mais elle est alors extrêmement puissante. Son étude en soi est donc motivée par des contextes physiques très différents, mais aussi, comme nous allons le voir, par la richesse des mathématiques qu'elle fait intervenir.

1.2 Symétrie conforme bidimensionnelle

Formalisons maintenant ces notions, en considérant un espace muni des coordonnées $\{x^\alpha\}$ et d'une métrique $\eta_{\alpha\beta}$. Une transformation conforme est une transformation de coordonnées $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha(x)$ qui préserve la métrique à un facteur d'échelle local près :

$$\eta_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow \lambda^2(x)\eta_{\alpha\beta}(x) \tag{1.1}$$

La puissance de la théorie conforme apparait à deux dimensions, on va donc s'y restreindre pour la suite. Une façon élégante de décrire les transformations conformes bidimensionnelles est de regarder le cas d'une métrique plate et euclidienne et de passer des coordonnées (x^1, x^2) aux variables complexes

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \bar{z} = x - iy \tag{1.2}$$

de sorte que

$$\partial := \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} := \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \tag{1.3}$$

et l'élément de longueur, qui donne la métrique, devient

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = dzd\bar{z}. \tag{1.4}$$

On constate alors que si l'on prend $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe **quelconque**, la transformation

$$\begin{matrix} z \rightarrow f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad dzd\bar{z} \rightarrow \left| \frac{df}{dz} \right|^2 dzd\bar{z}, \tag{1.5}$$

c'est donc une transformation conforme! Et il en serait de même si on prenait f anti-holomorphe quelconque. Ainsi en deux dimensions, les transformations conformes sont en nombre infini. Une théorie des champs conforme est donc par définition une théorie invariante sous toutes ces transformations.

2 Modèles de Wess-Zumino-Witten jaugés

On développe ici une approche lagrangienne de théorie conforme des champs bidimensionnelle, en construisant un modèle très général doté de la symétrie précédemment définie. On cherche ensuite à quantifier, puis à jauger les symétries internes sous-jacentes. Cette construction est basée sur [2] et [6], elle permet d'introduire les notions nécessaires pour la partie suivante (3).

2.1 Modèles WZW

Modèle sigma sur un groupe

Les modèles de Wess-Zumino(-Novikov)-Witten, ou modèles WZW, sont construits à partir d'un modèle sigma non linéaire, une théorie des champs bidimensionnelle sur une surface Σ , où les champs sont à valeur dans une variété cible M , toutes deux munies d'une métrique, respectivement η et γ . Dans le cas d'une théorie euclidienne, l'action est donnée pour un champ $X : \Sigma \rightarrow M$ par

$$S_0[X] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \gamma_{\mu\nu}(X) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta^{\alpha\beta} \sqrt{\eta} \quad (2.1)$$

où $\sqrt{\eta}$ est l'élément de volume riemannien sur Σ . Cette action, encore très générale, est déjà invariante sous le changement de métrique donné par (1.1), la théorie correspondante est donc conforme. On peut alors, via la variable complexe définie précédemment, absorber le facteur conforme et se ramener à la métrique (1.4). L'action devient :

$$S_0[X] = \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} \gamma_{\mu\nu}(X) \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} dz d\bar{z} \quad (2.2)$$

La variété Σ sera supposée compacte et sans bord par la suite. Si l'on s'intéresse maintenant au cas $M = G$ où G est un groupe de Lie complexe, on peut alors utiliser la forme de Killing $(k/2)\text{tr}(XY)$ sur l'algèbre de Lie, notée \mathfrak{g} et supposée simple. Ainsi, pour $g : \Sigma \rightarrow G^{\mathbb{C}}$, la forme $g^{-1}dg$ est à valeur dans \mathfrak{g} , de sorte que

$$S_0[g] = \frac{k}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} (g^{-1} \partial g) (g^{-1} \bar{\partial} g) dz d\bar{z} \quad (2.3)$$

Enfin, k est une constante, appelée *niveau* du modèle. Les équations du mouvement sont alors obtenues par principe variationnel $g \rightarrow g + \delta g$, et en intégrant par parties, il vient

$$0 = \delta S_0 = -\frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} \{ g^{-1} \delta g (\partial(g^{-1} \bar{\partial} g) + [g^{-1} \partial g, g^{-1} \bar{\partial} g]) \} dz d\bar{z} \quad (2.4)$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie sur \mathfrak{g} . Les équations correspondantes semblent compliquées à résoudre, et de plus, il se trouve que la quantification d'une telle théorie (notamment sa renormalisation) brise la symétrie : la théorie quantique correspondante n'est alors plus conforme.

Terme topologique de Wess-Zumino

Pour pallier à ce problème Witten propose dans [4] d'ajouter à l'action un terme S_{WZ} , dit topologique :

$$S_{\text{WZ}} = \frac{k'}{4\pi i} \int_B \tilde{g}^* \chi \quad (2.5)$$

avec les définitions suivantes :

- k' est une constante, dite de couplage.
- B est une variété tridimensionnelle de sorte que $\partial B = \Sigma$, où ∂B est le bord de B
- \tilde{g} est le prolongement de g à B , c'est à dire :

$$\tilde{g} : B \rightarrow G \quad \text{tel que} \quad \tilde{g}|_{\partial B} = g \quad (2.6)$$

– $\chi = \frac{1}{3} \text{tr}(g^{-1}dg)^{\wedge 3}$ une 3-forme sur G , qui est transportée sur B via l'application pull-back \tilde{g}^* .

Ce terme étant indépendant de la métrique de Σ (donc purement topologique), l'invariance conforme de l'action est préservée. Cependant, deux ambiguïtés apparaissent dans cette définition : le prolongement \tilde{g} existe-t-il toujours, et comment l'action S_{WZ} dépend-elle de ce prolongement ? En admettant l'existence, on peut d'abord regarder les équations du mouvement. En utilisant la relation géométrique $\delta \int f^* \alpha = \int \mathcal{L}_X f^* \alpha$, où \mathcal{L}_X est la dérivée de Lie selon le champ de vecteur X , on obtient :

$$\delta S_{WZ} = \frac{k'}{4\pi i} \int_B d [\text{tr} (\tilde{g}^{-1} \delta \tilde{g} (\tilde{g}^{-1} d\tilde{g})^{\wedge 2})], \quad (2.7)$$

qui permet, via le théorème de Stokes, de ramener l'intégrale sur $\partial B = \Sigma$ où l'on a $\tilde{g} = g$,

$$\delta S_{WZ} = \frac{k'}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} (g^{-1} \delta g (g^{-1} dg)^{\wedge 2}). \quad (2.8)$$

Enfin, en utilisant l'expression explicite $dg = \partial g dz + \bar{\partial} g d\bar{z}$, on obtient les équations du mouvement pour $\delta(S_0 + S_{WZ}) = 0$, soit :

$$k \partial (g^{-1} \bar{\partial} g) + (k - k') [g^{-1} \partial g, g^{-1} \bar{\partial} g] = 0. \quad (2.9)$$

Les équations du mouvement sont modifiées, mais elles sont indépendantes du prolongement \tilde{g} . Il n'y a donc pas de problème au niveau classique.

Cohérence du modèle

Il reste tout de même une ambiguïté qui peut avoir de l'influence au niveau quantique. Soit B_1 et B_2 deux variétés tridimensionnelles ayant Σ pour bord, et \tilde{g}_1 et \tilde{g}_2 les prolongements respectifs de g . La différence des deux termes donne

$$\frac{k'}{4\pi i} \int_{B_1} \tilde{g}_1^* \chi - \frac{k'}{4\pi i} \int_{B_2} \tilde{g}_2^* \chi = \frac{k'}{4\pi i} \int_{B_0} \tilde{g}_0^* \chi := H(B_0) \quad (2.10)$$

où $B_0 = B_1 \cup B_2^{\vee}$ (on inverse l'orientation de B_2) et \tilde{g}_0 défini comme \tilde{g}_i sur B_i pour $i = 1, 2$. En particulier, $\partial B_0 = \emptyset$. Si cette différence n'intervient pas au niveau classique, elle peut influencer dans les amplitudes de Feynmann $\exp(-S_{WZ})$, qui permettent de quantifier la théorie via l'intégrale de chemin. Les termes ambigus doivent alors être à valeur uniquement dans $2\pi i \mathbb{Z}$ pour que ces amplitudes restent inchangées. La condition de cohérence du modèle impose donc ici $H(B_0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ pour tout B_0 de dimension 3 et tel que $\partial B_0 = \emptyset$. Cela revient en fait à calculer les périodes de la 3-forme χ sur le groupe G . Dans le cas où le groupe est simplement connexe, la condition de cohérence impose

$$k' \in \mathbb{Z} \quad (2.11)$$

Cette condition peut cependant ne pas être suffisante pour le cas non simplement connexe, la contrainte sur k est alors plus forte, et donnée dans [11]. Le terme topologique est ainsi défini indépendamment de l'extension B et du prolongement \tilde{g} , autant au niveau classique que quantique. Enfin, si l'existence d'un tel terme peut être prouvée « à la main » pour la plupart des groupes, certains cas sont fastidieux et il y en a d'autres où le plongement explicite n'existe même pas. Une approche plus générale en terme d'objets particuliers appelées *gerbes*, qu'il serait bien trop long et peu pertinent de détailler ici [5], permet de définir proprement ce terme d'action topologique, ce qui nous permet de poursuivre sereinement.

Symétries

Les équations du mouvement se simplifient considérablement si l'on prend $k = k'$:

$$\partial (g^{-1} \bar{\partial} g) = 0 \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad \bar{\partial} (g \partial g^{-1}) = 0 \quad (2.12)$$

On a donc deux courants conservés, respectivement $\bar{j}(z) = g^{-1}\bar{\partial}g$ et $j(\bar{z}) = \partial gg^{-1}$, ce qui fait apparaître une symétrie à droite et à gauche liée aux transformations

$$g(z, \bar{z}) \mapsto g_L(z)g(z, \bar{z})g_R^{-1}(\bar{z}) \quad (2.13)$$

où g_L et g_R sont des fonctions holomorphes et anti-holomorphes quelconques. On vient donc de mettre en évidence, en plus de la symétrie conforme, une symétrie interne du système, dite « chirale ». De plus, pour $k = k'$, on peut montrer [4] que le modèle WZW ainsi construit préserve toutes les symétries au niveau quantique. On a ainsi construit un modèle WZW cohérent, même après quantification et donné par :

$$S = S_0 + S_{WZ} = \frac{k}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} (g^{-1}\partial g) (g^{-1}\bar{\partial}g) dzd\bar{z} + \frac{k}{4\pi i} \int_B \tilde{g}^* \chi \quad (2.14)$$

avec notamment $k(= k') \in \mathbb{Z}$.

2.2 Invariance de jauge et anomalies

Les théories de jauges ont été très fructueuses pour expliquer les interactions en physique des particules, et ont largement contribué à l'élaboration de l'actuel modèle standard. C'est de plus devenu un outil fréquent en théorie des champs. On cherche donc à savoir s'il est possible de jauger les symétries internes du modèle WZW. Pour cela, on considère ces dernières comme des symétries rigides,

$$g(z, \bar{z}) \mapsto g_L g(z, \bar{z}) g_R^{-1}, \quad (2.15)$$

où g_L et g_R sont maintenant des éléments fixés de G . L'action est invariante par ces transformations, mais ce n'est plus le cas si on rend la symétrie locale : $g_{L/R} \mapsto g_{L/R}(z, \bar{z})$; il faut alors jauger le modèle. Pour cela, on traite chaque terme de l'action séparément. De plus, en vue de quantifier le modèle, il suffit de considérer l'invariance de jauge pour les amplitudes (euclidiennes) de Feynmann :

$$a(g) := e^{-S[g]} \quad (2.16)$$

qui interviennent dans l'intégrale de chemin¹ (on prend bien sûr ici, et pour toute la suite, $\hbar = 1$). Il suffit donc que l'action S soit invariante modulo $2\pi i\mathbb{Z}$.

Couplage minimal

Pour le terme S_0 du modèle sigma, on procède de façon standard par couplage minimal : les dérivées sont remplacées par des dérivées covariantes D_A , soit de façon compacte :

$$g^{-1}dg \mapsto g^{-1}D_A g := g^{-1}(dg + A_L g - g A_R), \quad (2.17)$$

où A_L et A_R sont des 1-formes sur Σ à valeur dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Ce sont les champs de jauge correspondant à la symétrie $G \times G$, respectivement de gauche et de droite, et que l'on peut voir comme deux parties « chirales » de la transformation de jauge locale

$$\begin{aligned} g &\mapsto h_L g h_R^{-1} \\ A_L &\mapsto h_L A_L h_L^{-1} + h_L d(h_L^{-1}) \\ A_R &\mapsto h_R A_R h_R^{-1} + h_R d(h_R^{-1}) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad h_L, h_R : \Sigma \rightarrow G \quad (2.18)$$

En remplaçant les dérivées de S_0 par la dérivée covariante (en décomposant les champs de jauge sur d_z et $d_{\bar{z}}$), le terme devient complètement invariant sous les transformations de jauge (2.18).

1. Dans la théorie quantique, les amplitudes sont calculés pour des champs à valeur dans le sous-groupe de G réel et compact.

Terme topologique

Le terme S_{WZ} n'est pas défini comme une intégrale locale sur Σ , la procédure de couplage minimale semble donc un peu compromise. On peut tout de même coupler ce terme topologique aux champs de jauge et ainsi maintenir l'invariance, mais seulement pour les symétries du type

$$g \longmapsto hg\phi^{-1}(h), \quad \text{avec } \phi : G \rightarrow G \text{ un automorphisme de } G, \quad (2.19)$$

ce qui revient à prendre $h_{\text{L}} = h, h_{\text{R}} = \phi(h)$ et $A_{\text{L}} = A, A_{\text{R}} = \phi(A)$ dans la transformation (2.18). On parle ici d'*anomalies locales* : certaines symétries deviennent inconsistantes lorsqu'on veut les rendre locales, c'est ici le cas pour les symétries rigides (2.15) qui ne sont pas du type (2.19). Dans la suite on considère donc uniquement ces dernières, et même spécifiquement le cas $\phi(h) = h$, dit « sans torsion » (untwisted). Une suite intéressante de ce travail serait de regarder le cas où ϕ est quelconque, i.e. « avec torsion ». Ensuite, comme il a été montré dans [6], on peut coupler le terme S_{WZ} au champ de jauge en lui ajoutant un autre terme topologique S_{j} :

$$S_{\text{WZ}} \mapsto S_{\text{WZ}} - \frac{1}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} [gdg^{-1} \wedge A + A \wedge g^{-1}dg + g^{-1}Ag \wedge A] := S_{\text{WZ}} + S_{\text{j}} \quad (2.20)$$

C'est de plus le seul terme possible (à cet ordre en g et A) pour assurer l'invariance de jauge du modèle. Cependant, il reste quelques subtilités.

Anomalie globale

On travaille donc maintenant avec les transformations de jauge $h : \Sigma \rightarrow G$ telle que :

$$g \longmapsto hgh^{-1} := g^h, \quad A \longmapsto hAh^{-1} + hdh^{-1} := A^h \quad (2.21)$$

L'action $S = S_0 + S_{\text{WZ}} + S_{\text{j}}$ est maintenant invariante sous les transformations de jauge. Toutes ? Non ! Un petit nombre d'irréductibles résiste encore et toujours à l'invariance. En effet, le terme topologique total $S_{\text{top}}[g^h, A^h] = S_{\text{WZ}}[g^h] + S_{\text{j}}[g^h, A^h]$ dépend par définition de la topologie du système considéré. Il est facile de voir que ce terme ne change pas si on déforme continument les fonctions h , ce qui assure l'invariance pour les transformations h homotopes (ou continument déformables) à l'identité 1 , définie par

$$1 : \begin{cases} \Sigma \longrightarrow G \\ z, \bar{z} \mapsto e \end{cases} \quad (2.22)$$

avec e l'élément neutre du groupe. De telles transformations $h \sim 1$ sont dites *petites*. Il reste donc à vérifier l'invariance de jauge pour les transformations non homotopes à cette application constante, que l'on dira *grandes*. L'absence d'une telle invariance se révèle néfaste pour la théorie quantique, où l'on somme aussi sur les champs de jauge dans l'intégrale fonctionnelle. Le modèle sera donc jaugeable, si et seulement si

$$a_{\text{top}}(g^h, A^h) = a_{\text{top}}(g, A) \quad \text{avec } a_{\text{top}}(g, A) := \exp(iS_{\text{top}}) \quad (2.23)$$

pour h une transformation de jauge quelconque (le terme S_0 n'est pas concerné par ces problèmes). Si on trouve des grandes transformations qui ne préservent pas les amplitudes a_{top} , il y aura alors une *anomalie globale de jauge*. Après calcul, et en décomposant $a_{\text{top}}(g, A) = a_{\text{WZ}}(g)a_{\text{j}}(g, A)$, la condition précédente se réécrit :

$$a_{\text{WZ}}(g^h) = a_{\text{WZ}}(g) \exp(\alpha(g, h)) \quad (2.24)$$

avec

$$\alpha(g, h) = -\frac{k}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr} (g^{-1}dg \wedge h^{-1}dh + h^{-1}dh \wedge gd(g^{-1}) + h^{-1}dh \wedge gh^{-1}(dh)g^{-1}). \quad (2.25)$$

En particulier, cette condition ne dépend plus du champ de jauge A , mais uniquement de la transformation h . Reste à regarder en détail l'existence de ces grandes transformations et la possibilité d'une

anomalie globale. Il faut donc chercher les classes d'homotopie de h : toutes les applications qui ne sont pas continument déformables l'une à l'autre. Pour cela, la structure des groupes de Lie va nous permettre de passer d'un problème topologique (décrire les classes d'homotopie) à un problème complètement algébrique (donner des éléments particuliers du groupe), beaucoup plus simple à résoudre en pratique.

Les anomalies en physique

Avant de continuer, arrêtons nous un peu sur les différentes anomalies rencontrées jusqu'ici. Il arrive que certaines symétries classiques soient brisées lorsque l'on quantifie la théorie : des effets quantiques (comme le principe d'incertitude par exemple) permettent en effet de violer certaines lois de conservations valables dans le cadre classique. C'est un premier type d'anomalie, qui apparaît ici dès la quantification du modèle Sigma (2.1). La quantification crée une théorie effective qui devient massive : ce qui empêche toute invariance conforme et motive l'introduction du terme topologique de Wess-Zumino.

Pour les symétries de jauge, les anomalies sont plus graves : la violation de la conservation d'un courant classique signale une brisure de la symétrie de jauge, la théorie construite est alors inconsistante, donc non utilisable. C'est le cas des anomalies locales rencontrées en 2.2 : certaines symétries chirales ne peuvent être rendues locales. Viennent ensuite les anomalies globales, toujours liées aux symétries de jauge : ce n'est plus la dépendance locale de la transformation qui pose problème, mais le fait qu'elle contienne des propriétés topologiques non triviales du modèle, et qui peuvent encore une fois le rendre inconsistant. Ce type d'anomalie a été observé la première fois pour des champs fermioniques dans un espace à quatre dimensions [7], puis analysé en détails dans [6] pour les modèles WZW.

Tenter d'éviter des anomalies, quand c'est possible, permet de contraindre fortement un modèle théorique, voire d'en sélectionner un parmi plusieurs. C'est ce processus qui à par exemple permis la prédiction de l'existence du quark top. D'autre part, les anomalies sont aussi utilisées à l'inverse pour expliquer certains faits expérimentaux étranges. Cet usage à double sens fait de l'étude des anomalies un processus très enrichissant pour la compréhension du monde physique [8].

2.3 Condition d'invariance globale

On prend maintenant le problème par l'autre bout : soit donc G un groupe de Lie simple, compact et connexe (mais pas nécessairement simplement connexe : toute la subtilité est ici!) et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. L'intérêt de travailler sur l'algèbre plutôt que le groupe est que l'on passe d'un objet non linéaire à un espace vectoriel. De nombreuses propriétés du groupes sont ensuite obtenues à partir de celles de l'algèbre. De plus, les algèbres de Lie simples sont complètement classifiées, ce qui va nous permettre de traiter G de façon exhaustive.

Groupe(s) de Lie d'une algèbre de Lie

S'il n'y a pas d'identification exacte entre groupe et algèbre, le lien entre les deux est bien compris : pour une algèbre de Lie donnée \mathfrak{g} , il existe un unique groupe \tilde{G} connexe et simplement connexe, ayant pour algèbre de Lie \mathfrak{g} , on l'appelle de groupe de revêtement universel. On passe alors de l'algèbre au groupe de Lie via l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{G}$, qui est en plus surjective pour \tilde{G} compact. Cependant, il existe d'autres groupes connexes G ayant pour algèbre \mathfrak{g} , et qui sont donnés par :

$$G = \tilde{G}/Z, \quad Z \subseteq \mathcal{Z}(\tilde{G}), \tag{2.26}$$

où Z est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$, centre de \tilde{G} . On a de plus

$$Z \cong \pi_1(G), \quad \text{groupe fondamental de } G. \tag{2.27}$$

Le groupe fondamental est le groupe des classes d'équivalence des chemins fermés (des lacets) homotopes (ou continument déformables) ; il décrit en détail comment le groupe G est ou non simplement

connexe. Si il l'est, on a $\pi_1(G) = \{e\}$, sinon on a autant de classe que de chemins fermés non continuellement déformables entre eux. On a donc $G = \tilde{G}/Z$ avec Z un sous-groupe de $Z(\tilde{G})$, et $Z \cong \pi_1(G)$. Ainsi pour décrire un lacet non trivial, soit on le décrit topologiquement dans G , soit on le « relève » dans \tilde{G} , simplement connexe, ou il devient un élément du centre, objet algébrique.

Un exemple Prenons $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$. On a $\tilde{G} = SU(2)$, simplement connexe, de centre $Z(\tilde{G}) = \{-I_2, I_2\} \cong \mathbb{Z}_2$ ayant pour unique sous-groupe non trivial lui même. Il existe donc un seul autre groupe connexe G ayant \mathfrak{g} pour algèbre : $G = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ qui n'est autre que $SO(3)$! De plus on a aussi $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, $SO(3)$ n'est pas simplement connexe, et possède une classe de lacets non triviaux.

Lien avec les anomalies globales

On cherche donc à décrire les transformations $h : \Sigma \rightarrow G$ grandes : non homotopes à l'application identité. La dimension de Σ est ici cruciale. En effet, une surface orientable sans bord et compacte est entièrement caractérisée par un seul invariant topologique : son *genre* γ . Pour $\gamma = 0$, on obtient la sphère, pour $\gamma = 1$, on a le tore, et pour $\gamma \geq 2$ on a l'équivalent de γ tores « recollés » (voir Figure 1). Cette propriété va nous permettre de décrire complètement ces grandes transformations. Encore une fois, la construction est subtile et longue [6], nous ne faisons qu'énoncer les principaux résultats.

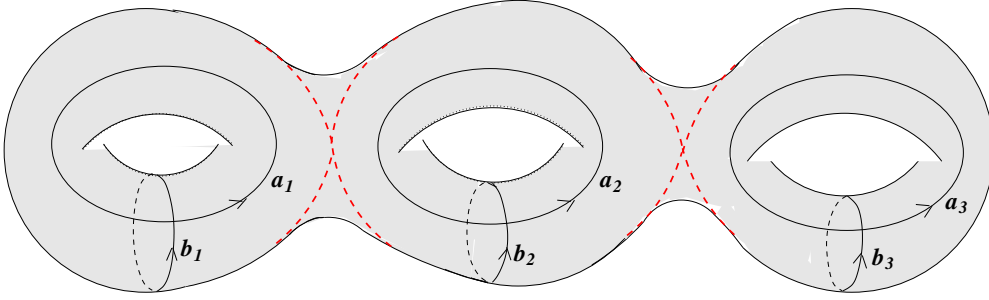


FIGURE 1 – Surface de genre 3. Les lacets non triviaux a_i et b_i permettent de caractériser les classes d'homotopie de h .

- $\gamma = 0$ ($\Sigma \cong S^2$) : C'est le cas trivial, dans ce cas il n'existe pas de grandes transformations de jauge. On considère donc pour la suite $\gamma(\Sigma) \geq 1$.

- $\gamma = 1$ ($\Sigma \cong T^2 \cong S^1 \times S^1$) : C'est le cas le plus important, auquel on peut toujours se ramener. Le tore, vu comme $S^1 \times S^1$ est engendré par deux lacets non triviaux a_1 et b_1 (voir Figure 1). On a donc deux copies de S^1 qui vont « sonder » comment le groupe est ou non simplement connexe, et les classes d'homotopie de h vont être étroitement liées au groupe fondamental de G , on distingue donc

- si $G = \tilde{G}$, simplement connexe, alors $h : \Sigma \rightarrow G$ est forcément homotope à l'identité.²
- si $G = \tilde{G}/Z$, $Z \subset Z(\tilde{G})$, alors les classes d'homotopies $[h]$ sont en correspondance avec Z^2 : à chaque représentant h on peut associer les deux *indices* (ou *winding numbers*), définis par

$$z_1 = \mathcal{P} \exp \left(\int_a h^{-1} dh \right) \in Z, \quad z_2 = \mathcal{P} \exp \left(\int_b h^{-1} dh \right) \in Z \quad (2.28)$$

où \mathcal{P} ordonne proprement l'exponentielle, à valeur dans \tilde{G} . Ces nombres sont indépendants du représentant $h : \Sigma \rightarrow G$ et sont dans le sous-groupe Z . Si $z_1 = z_2 = e$, élément neutre du groupe, alors $[h] = 1$. Sinon, ils identifient $[h]$ avec un élément de Z^2 .

- $\gamma \geq 2$: De même que pour $\gamma = 1$, les classes $[h]$ sont en correspondance avec $Z^{2\gamma}$, où l'on étend naturellement la définition (2.28) à $(z_1, z_2, \dots, z_{2\gamma-1}, z_{2\gamma})$ via $(a_1, b_1, \dots, a_\gamma, b_\gamma)$. Cependant, les chemins a_i, b_i ne sont pas en contact, si bien qu'on peut « couper » la surface Σ en γ tores (Figure 1).

2. On peut (et il faut) toujours considérer les transformation plus générales $h : \Sigma \rightarrow \tilde{G}/Z$, comme nous allons le voir dans la suite.

Notre problème avec γ trous se factorise pour se simplifier en un problème à un seul trou, c'est à dire sur le tore $S^1 \times S^1$, soit le cas précédent. Reste maintenant à connaître le centre de \tilde{G} , pour cela un petit détour par les algèbres de Lie s'impose.

Des racines aux diagrammes de Dynkin

On rappelle ici brièvement les propriétés donc on a besoin : une algèbre simple est entièrement définie par ses racines, représentées dans un diagramme, et les diagramme possible sont en nombre fini et connus. Tous les résultats sur les algèbres de Lie sont détaillés dans [9]. On considère donc $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ une algèbre de Lie simple complexe³ de forme réelle \mathfrak{g} et l'on définit $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre maximale d'éléments qui commutent, soit

$$\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \quad [X_1, X_2] = 0 \quad (2.29)$$

Cette sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est appelée *sous-algèbre de Cartan*, et sa dimension est notée $r(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, que l'on appelle *rang* de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Si $r(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \dim \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, l'algèbre est dite *abélienne*. On décompose ensuite $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ de façon standard :

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha} \mathbb{C} E_{\alpha} \right) \quad (2.30)$$

où les E_{α} sont des vecteurs propres de l'action adjointe de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, soit

$$\forall X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}, \quad ad_X(E_{\alpha}) := [X, E_{\alpha}] = \alpha(X)E_{\alpha} \quad (2.31)$$

On a ainsi défini $(\alpha : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}) \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$, espace dual de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, que l'on appelle *racine* de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. En dimension finie, on peut identifier un espace et son dual via le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ici défini par la forme de Killing tr , que l'on normalise de sorte que les racines les plus longues soient de norme carrée 2. En effet, les seuls multiples possibles d'une racine α donnée sont $\pm\alpha$. Si l'on note ensuite Φ l'ensemble des racines, on peut ainsi le décomposer en $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$ qui distingue les racines positives et négatives, avec $\alpha \in \Phi_+ \mapsto -\alpha \in \Phi_-$. Parmi les racines positives, il existe un ensemble Φ_s contenant exactement $r = r(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ racines, dites *simples*, et l'on note $\Phi_s = \{\alpha^{(i)} | i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$ de sorte que

$$\forall \alpha \in \Phi_+ \quad \alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha^{(i)}, \quad \text{avec } \forall i \quad n_i \in \mathbb{N}. \quad (2.32)$$

Les racines simples permettent donc de générer toutes les racines de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, avec des coefficients entiers uniquement. De plus, c'est le produit scalaire entre ces racines simples qui va encoder toute l'information sur l'algèbre ; on définit donc la matrice de Cartan A , qui elle aussi prend ces valeurs dans les entiers :

$$A_{ij} := 2 \frac{\langle \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)} \rangle}{\langle \alpha^{(j)}, \alpha^{(j)} \rangle} \in \mathbb{Z} \quad (2.33)$$

On peut alors définir la base de Chevalley-Serre comme suit : à chaque racine simple $\alpha^{(i)} \in (\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$, on lui associe (via le produit scalaire) sa *coracine* $\alpha_i^{\vee} \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ et les vecteurs propres E_i^+ et E_i^- , associés à $\alpha^{(i)}$ et $-\alpha^{(i)}$. On a alors

$$[\alpha_i^{\vee}, \alpha_j^{\vee}] = 0, \quad [\alpha_i^{\vee}, E_j^{\pm}] = \pm A_{ij} E_j^{\pm}, \quad [E_i^+, E_j^-] = \delta_{ij} \alpha_i^{\vee}, \quad \text{et} \quad \left(\text{ad}_{E_i^{\pm}} \right)^{(1-A_{ji})} E_j^{\pm} = 0 \quad (2.34)$$

On peut alors, via la *construction de Serre*, reconstruire toute l'algèbre de lie, en se donnant uniquement la donnée des racines simples et de leur produit scalaire (codé dans la matrice de Cartan). Ainsi, en 1946, Dynkin propose de représenter ces données sous forme de diagrammes (portant aujourd'hui son nom). On peut alors classifier de façon exhaustive les algèbres de Lie simples, via un raisonnement combinatoire sur ces digrammes. Dynkin trouve ainsi quatre type d'algèbres classiques A_r, B_r, C_r et D_r , de rang r , et dont la forme réelle est respectivement isomorphe aux algèbres bien connues $\mathfrak{su}(r+1), \mathfrak{so}(2r+1), \mathfrak{sp}(2r), \mathfrak{so}(2r)$, et cinq algèbres exceptionnelles $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7$ et \mathfrak{e}_8 .

3. Hé oui, les deux à la fois sont possibles !

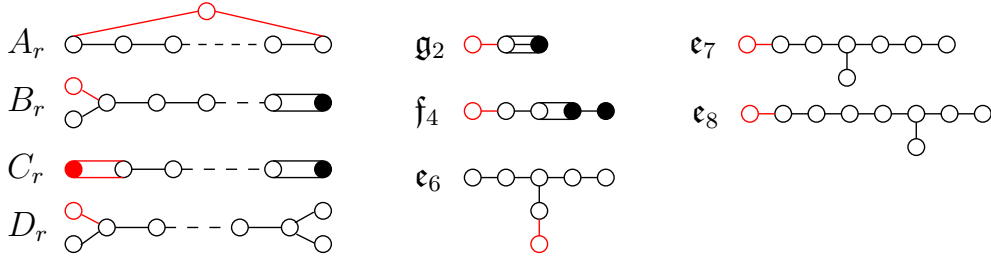


FIGURE 2 – Diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie simples (en noir). Chaque rond représente une racine simple positive, et les ronds clairs sont les racines les plus longues, de norme carrée 2. Le nombre de traits entre deux racines est la valeur de leur produit scalaire : 0, -1, -2 ou -3. Ce sont les seuls diagrammes possibles. On a à gauche les algèbres classiques composées de r racines, puis les 5 cas exceptionnels. La partie rouge correspond au diagramme de Dynkin étendu (voir 3.2).

Coracines, copoids, et centre du groupe

A chaque racine simple $\alpha^{(i)} \in \Phi_s$, on a associé une coracine simple α_i^\vee . On peut de plus associer à Φ_s un ensemble de *copoids* simples $\{\lambda_i^\vee, i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$ définis par

$$\alpha^{(j)}(\lambda_i^\vee) = \delta_{ij} \quad (2.35)$$

Les copoids et les coracines sont des éléments de la sous-algèbre de Cartan très particuliers et qui vont nous permettre de décrire le centre du groupe \tilde{G} correspondant à \mathfrak{g} . Pour cela, on définit le réseau (entier) des coracines et des copoids :

$$Q^\vee := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\alpha_i^\vee, \quad P^\vee := \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\lambda_i^\vee \quad (2.36)$$

On a ainsi défini $Q^\vee, P^\vee \subset \mathfrak{t}^\mathbb{C}$, avec en plus les propriétés suivantes :

$$\exp(2i\pi Q^\vee) = \{e\} \quad (2.37)$$

$$\exp(2i\pi P^\vee) = \mathcal{Z}(\tilde{G}) \quad (2.38)$$

et

$$\forall \alpha^\vee \in Q^\vee, \quad \forall \lambda^\vee \in P^\vee, \quad \langle \alpha^\vee, \lambda^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad (2.39)$$

Le centre du groupe de revêtement universel est donc entièrement décrit par le réseau des copoids modulo celui des coracines, qui sont facilement déterminés via la classification de Dynkin. On peut ainsi décrire tous les groupes $G = \tilde{G}/Z$ avec Z sous-groupe de $\mathcal{Z}(\tilde{G})$, ayant \mathfrak{g} pour algèbre de Lie.

Retour aux amplitudes de Feynmann

Grâce aux algèbres de Lie, on peut maintenant facilement décrire les éléments du centre du groupe, et donc les classes d'homotopie des transformations de jauge h et des champs g . Si on se donne une algèbre de Lie \mathfrak{g} , choisir un groupe de Lie correspondant revient à choisir Z un sous-groupe du centre de \tilde{G} , avec éventuellement $Z = \{e\}$, pour avoir \tilde{G} tout entier. Notre champ est donc donné par

$$g : \Sigma \longrightarrow G \cong \tilde{G}/Z, \quad Z \subset \mathcal{Z}(\tilde{G}) \quad (2.40)$$

et les classes d'homotopie de g sont donc en correspondance avec le groupe $Z^{2\gamma}$. Par ailleurs, l'action adjointe $g \mapsto hgh^{-1}$ est inchangée pour $\tilde{h} = hz$ avec $z \in Z$, ce qui permet d'étendre naturellement les transformations de jauge à $G/Z \cong \tilde{G}/\tilde{Z}$:

$$h : \Sigma \longrightarrow \tilde{G}/\tilde{Z}, \quad \tilde{Z} := \mathcal{Z}(\tilde{G}) \quad (2.41)$$

Les classes d'homotopies sont donc cette fois-ci en correspondance avec \tilde{Z} tout entier ! Ainsi, même si le groupe est simplement connexe, il peut exister de grandes transformations de jauge. Pour ne pas passer à côté, il faut considérer toutes les transformations étendues de type (2.41). Comme proposé dans [6], il suffit de restreindre Σ au tore $S^1 \times S^1$, et on peut maintenant décrire les représentants de chaque classe d'homotopie par un élément du centre, donc par des copoids de l'algèbre de Lie correspondante :

$$g_{p_1^\vee, p_2^\vee}(e^{i\sigma_1}, e^{i\sigma_2}) = e^{i\sigma_1 p_1^\vee} e^{i\sigma_2 p_2^\vee}, \quad p_1^\vee, p_2^\vee \in P^\vee(\mathfrak{g}^\mathbb{C}), \quad e^{2i\pi p_i^\vee} = z_i \in Z \quad (2.42)$$

$$h_{\tilde{p}_1^\vee, \tilde{p}_2^\vee}(e^{i\sigma_1}, e^{i\sigma_2}) = e^{i\sigma_1 \tilde{p}_1^\vee} e^{i\sigma_2 \tilde{p}_2^\vee}, \quad \tilde{p}_1^\vee, \tilde{p}_2^\vee \in P^\vee(\mathfrak{g}^\mathbb{C}), \quad e^{2i\pi \tilde{p}_i^\vee} = \tilde{z}_i \in \tilde{Z} \quad (2.43)$$

On travaille avec les éléments du sous-groupe de Cartan, qui commutent entre eux, donc pour les transformations précédentes, $a_{\text{WZ}}(g^h = hgh^{-1}) = a_{\text{WZ}}(g)$, et la condition

$$a_{\text{WZ}}(g^h) = a_{\text{WZ}}(g) \exp(\alpha(g, h)) \quad \Rightarrow \quad \exp(\alpha(g, h)) = 1 \quad (2.44)$$

$$\text{avec} \quad \alpha(g, h) = -\frac{k}{4\pi i} \int_{\Sigma} \text{tr}(g^{-1} dg \wedge h^{-1} dh + h^{-1} dh \wedge g d(g^{-1}) + h^{-1} dh \wedge gh^{-1}(dh)g^{-1}). \quad (2.45)$$

On peut ensuite évaluer $\alpha(g, h)$ dans ce cas particulier. La condition d'invariance de jauge se calcule alors facilement et on obtient :

$$\forall p_i^\vee, \tilde{p}_i^\vee \in P^\vee(\mathfrak{g}^\mathbb{C}) \quad \exp(2\pi i k \text{tr}(\tilde{p}_1^\vee p_2^\vee - \tilde{p}_2^\vee p_1^\vee)) = 1 \quad (2.46)$$

On obtient finalement une condition sur k pour éliminer les anomalies globales, en allégeant au passage les notations :

$$\forall M, \tilde{M} \in P^\vee(\mathfrak{g}^\mathbb{C}), \quad e^{2i\pi M} \in Z, \quad e^{2i\pi \tilde{M}} \in \tilde{Z}, \quad k \text{tr}(M\tilde{M}) \in \mathbb{Z} \quad (2.47)$$

Modèles coset

On peut, à partir des modèles WZW ainsi construits, définir les modèles dits *coset* (ou quotient). Pour cela, le champ de jauge A est maintenant à valeur dans une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, et les transformations de jauge sont nécessairement restreintes à

$$h : \Sigma \longrightarrow \tilde{H}/(\tilde{H} \cap \tilde{Z}) \quad (2.48)$$

avec \tilde{H} un sous-groupe connexe de \tilde{G} et d'algèbre \mathfrak{h} . De plus, il faut aussi sommer sur les champs de jauge A dans l'intégrale de chemin ; l'invariance de jauge discutée précédemment est alors nécessaire, car son absence rend la théorie coset inconsistante. Une fois construits, ces modèles permettent de décrire essentiellement toutes les théories conformes *rationnelles* : celles dont les fonction de corrélation s'obtiennent par un nombre fini d'intégrales multiples de contour, et qui sont donc en théorie complètement déterminées. Nous arrivons au terme de notre construction, les modèles coset sont donc bien définis et consistants si et seulement si il n'y a pas d'anomalie globale de jauge. La condition (2.47) devient finalement

$$\boxed{\forall M, \tilde{M} \in P^\vee(\mathfrak{g}^\mathbb{C}), \quad e^{2i\pi M} \in Z, \quad e^{2i\pi \tilde{M}} \in \tilde{H} \cap \tilde{Z}, \quad k \text{tr}(M\tilde{M}) \in \mathbb{Z}} \quad (2.49)$$

3 Anomalies globales de jauge pour les groupes exceptionnels

On a obtenu une condition générale pour éviter les anomalies globales de jauge (2.49) dans les modèles coset. On peut maintenant regarder comment cette condition se traduit sur la constante k si on regarde un modèle particulier. Connaissant la classification des algèbres de Lie, on peut regarder successivement chaque groupe de Lie : dans le cas d'une anomalie, on aura des contraintes supplémentaires sur k pour avoir un modèle valide. Dans son rapport de 2010, P. De Fromont a traité en détail le cas des groupes classiques. Poursuivant son travail, on s'intéresse donc ici aux groupes exceptionnels.

3.1 Cas de $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_7$, et \mathfrak{e}_8

Cas d'un centre trivial

Considérons le cas où Z est le sous-groupe trivial $\{e\}$, et $M \in P^\vee(\mathfrak{g})$. On a $\exp(2\pi i M) = e$, et donc $M \in Q^\vee(\mathfrak{g})$ d'après (2.37). Donc pour $\tilde{M} \in P^\vee(\mathfrak{g})$ quelconque, on a nécessairement $\text{tr}(M\tilde{M}) \in \mathbb{Z}$ d'après (2.39). Puisque $k \in \mathbb{Z}$ par construction (cohérence du modèle, voir 2.1), la condition (2.49) est donc forcément respectée pour n'importe quelle sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Il y a donc absence d'anomalie globale pour le cas où $Z = \{e\}$.

Considérons maintenant une algèbre \mathfrak{g} telle que \tilde{G} , groupe de revêtement universel, ait un centre trivial : $\tilde{Z} = \{e\}$. On a nécessairement $Z = \{e\}$, donc d'après l'argument précédent il n'y a pas d'anomalie globale. C'est le cas des sous-algèbres $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4$ et \mathfrak{e}_8 , dont le groupe de revêtement universel a un centre trivial. On peut ainsi énoncer un premier résultat :

Théorème 1

Les modèles cosets cohérents construits avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4$ ou \mathfrak{e}_8 , et \mathfrak{h} quelconque sont dépourvus de toute anomalie globale de jauge.

Cas de \mathfrak{e}_7

Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_7$ est encore trivial mais pour une autre raison. On note $\tilde{G} = E_7$ le groupe de revêtement universel. Son centre n'est pas trivial $\tilde{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, et le seul sous-groupe non trivial est donc $Z = \tilde{Z}$. Ils nous faut maintenant décrire les copoids et les coracines de \mathfrak{e}_7 . Pour cela, il existe une base euclidienne bien connue et donnée dans [10] : on peut décrire explicitement ces éléments dans l'espace euclidien \mathbb{R}^8 , ils sont donnés dans l'annexe A. Ce qui nous intéresse, c'est le réseau engendré par les copoids, et qui est donné par

$$P^\vee(\mathfrak{e}_7) = \left\{ \left(\frac{\alpha}{4} + q_1, \dots, \frac{\alpha}{4} + q_8 \right) \mid \alpha, q_1, \dots, q_8 \in \mathbb{Z} \text{ et } 2\alpha + q_1 + \dots + q_8 = 0 \right\} \quad (3.1)$$

et qui engendre \tilde{Z} et $Z = \tilde{Z}$, via l'exponentielle (2.37). Soit donc M et \tilde{M} tels que

$$M := \left(\frac{\alpha}{4} + q_1, \dots, \frac{\alpha}{4} + q_8 \right), \quad \tilde{M} := \left(\frac{\tilde{\alpha}}{4} + \tilde{q}_1, \dots, \frac{\tilde{\alpha}}{4} + \tilde{q}_8 \right) \quad (3.2)$$

avec $\alpha, \tilde{\alpha}, q_i, \tilde{q}_i$ vérifiant les conditions (3.1). La condition d'invariance globale de jauge donne ici après calcul

$$k \text{tr}(M\tilde{M}) = -k \frac{\alpha\tilde{\alpha}}{2} + m, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Donc, pour avoir un modèle sans anomalie ($k \text{tr}(M\tilde{M}) \in \mathbb{Z}$), il faut nécessairement, $k \in 2\mathbb{Z}$. Il y aurait donc anomalie globale pour k impair, mais en réalité les modèles construits pour de tels k sont inconsistants. En effet, la condition de cohérence du terme topologique donnée en 2.1 ($k \in \mathbb{Z}$), qui permet de bien définir le terme topologique S_{WZ} , est nécessaire, mais pas suffisante pour les groupes non simplement connexes, comme c'est le cas ici avec E_7/\mathbb{Z}_2 . Cette condition de cohérence, totalement indépendante des anomalies de jauge (elle apparaît avant de jauger le modèle), a été établie dans [11]

pour tous les groupes non simplement connexes. Or dans notre cas (et c'est une coïncidence), les seuls modèles cohérents sont ceux pour lesquels $k \in 2\mathbb{Z}$. On en déduit :

Théorème 2

Les modèles cosets cohérents construits avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_7$, et \mathfrak{h} quelconque sont dépourvus de toute anomalie globale de jauge.

3.2 Cas de \mathfrak{e}_6

Reste une seule sous-algèbre exceptionnelle : \mathfrak{e}_6 , qui demande beaucoup plus de travail, c'est le seul cas qui ne soit pas trivial. Comme précédemment, on note E_6 son groupe de revêtement universel, cette fois-ci on a :

$$\tilde{Z} \cong \mathbb{Z}_3 \quad (3.4)$$

et donc le seul sous-groupe non trivial est $Z = \tilde{Z}$. Décrivons maintenant, comme pour \mathfrak{e}_7 , le réseau des copoids. Les coracines et les copoids sont donnés en annexe A, et sont cette fois-ci décrits dans l'espace euclidien \mathbb{R}^7 , où l'on a le réseau suivant.

$$P^\vee(\mathfrak{e}_6) = \left\{ \left(\frac{\alpha}{6} + q_1, \dots, \frac{\alpha}{6} + q_6, \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) \left| \begin{array}{l} \alpha, \beta, q_1, \dots, q_6 \in \mathbb{Z} \\ \alpha + q_1 + \dots + q_6 = 0 \\ \alpha + \beta \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\} \quad (3.5)$$

Prenons donc $M, \tilde{M} \in P^\vee(\mathfrak{e}_6)$:

$$M := \left(\frac{\alpha}{6} + q_1, \dots, \frac{\alpha}{6} + q_6, \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right), \quad \tilde{M} := \left(\frac{\tilde{\alpha}}{6} + \tilde{q}_1, \dots, \frac{\tilde{\alpha}}{6} + \tilde{q}_6, \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.6)$$

la condition d'invariance globale de jauge se calcule alors :

$$k \operatorname{tr}(M\tilde{M}) = -k \frac{\alpha\tilde{\alpha}}{3} + m, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

Cependant, la condition de cohérence ne nous sauve pas ici, puisque cette fois-ci, $k \in \mathbb{Z}$ est nécessaire et suffisante même pour le groupe E_6/\mathbb{Z}_3 . Il y a donc des anomalies globales potentielles, mais cela va dépendre de la sous-algèbre \mathfrak{h} considérée. En effet, si M est bien défini ($\exp(2\pi i M) \in Z$), \tilde{M} ne l'est pas encore complètement, puisque l'on doit avoir $\exp(2\pi i \tilde{M}) \in \tilde{H} \cap \tilde{Z}$, ce qui peut imposer d'autres conditions sur $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ et les \tilde{q}_i . Reste donc à décrire et classifier les différents \tilde{H} possibles, ce qui revient à classifier les sous-algèbres $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{e}_6$.

Après avoir classifié les algèbres simples, Dynkin propose dans [12] une classification très approfondie des sous-algèbres semi-simples, mais non exhaustive et pas toujours explicite. Puis, dans [13] on trouve une classification détaillée pour les algèbres classiques jusqu'au rang 6. Enfin, plus récemment, des résultats complets sur les équivalences entre les sous-algèbres ont été établis dans [14], avec quelques précisions sur les groupes exceptionnels. On regarde donc ici les sous-algèbres de \mathfrak{e}_6 en suivant le long article de Dynkin, et en complétant par les autres références lorsque c'est nécessaire.

3.2.1 Cas où $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$

Tout à déjà été fait, on a $\tilde{H} = \tilde{G} = E_6$, et on n'a pas plus de conditions sur \tilde{M} puisque $\exp(2\pi i \tilde{M}) \in \tilde{H} \cap \tilde{Z} = \tilde{Z}$. L'invariance globale de jauge est donc donnée par (3.7) pour $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$, ce qui implique donc

$$k \in 3\mathbb{Z} \quad (3.8)$$

Dans le cas contraire, il y a anomalie globale de jauge pour le modèle coset avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^4$.

4. Notons au passage que ce modèle est une théorie topologique.

3.2.2 Sous-algèbres régulières

Les sous-algèbres régulières sont les sous-algèbres les plus naturelles à construire, et donc les plus faciles à manipuler. Elles sont définies comme suit : soit $\Phi_{\mathfrak{h}} \subset \Phi(\mathfrak{g})$ un sous ensemble des racines de \mathfrak{g} , on note $\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{t}$ l'ensemble de la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} engendrée par $\Phi_{\mathfrak{h}}$. On dit alors que \mathfrak{h} est une sous-algèbre *régulière* de \mathfrak{g} si

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\mathfrak{h}}} \mathbb{C}E^{\alpha} \right) \quad (3.9)$$

En gros, \mathfrak{h} est régulière si ses racines sont parmi les racines de \mathfrak{g} . On a vu précédemment (2.3) que l'ensemble $\Phi_s(\mathfrak{g})$ des racines simples positives constituent une base possible de la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{t} et qu'elles caractérisent complètement l'algèbre de Lie si on connaît leurs produits scalaires mutuels, c'est à dire leur diagramme de Dynkin. Il est donc intéressant de déterminer \mathfrak{h} en déterminant ses racines simples, parmi celles de \mathfrak{g} . L'obtention de toutes les sous-algèbres régulières se fait alors de façon diagrammatique. La procédure est proposée dans [12], où il est montré que l'on obtient toutes les sous-algèbres régulières de cette façon :

1. On prend le diagramme de Dynkin de l'algèbre ambiante \mathfrak{g} , de rang r
2. On considère sa version étendue : les racines simples de \mathfrak{h} ne sont pas forcément parmi les racines simples de \mathfrak{g} mais presque, elles sont parmi celles du diagramme étendu (on ajoute la racine la plus basse δ), qui apparait dans plusieurs contextes et que nous prenons pour donné.
3. On enlève au choix n racines sur le diagramme avec $1 \leq n \leq r$. On obtient alors une sous-algèbre régulière de rang $r + 1 - n$
4. On applique de nouveau cette procédure à toutes les sous-algèbres obtenues, jusqu'à ne plus en obtenir de nouvelle.

On obtient de cette façon toutes les sous-algèbres régulières d'une algèbre donnée. Un exemple est donné dans la suite, mais revenons d'abord aux anomalies. On a $\tilde{M} \in P^V(\mathfrak{e}_6)$, et on doit en plus vérifier $\exp(2\pi i \tilde{M}) \in \tilde{H} \cap \tilde{Z}$. En prenant \tilde{M} dans le réseau des copoids, on a déjà $\exp(2\pi i \tilde{M}) \in \tilde{Z}$. Reste à trouver à quelle condition cet élément est aussi dans \tilde{H} . Or, il est facile de voir que

$$\tilde{H} \cap \tilde{Z} \subset \mathcal{Z}(\tilde{H}), \quad \text{centre de } \tilde{H}. \quad (3.10)$$

Il suffit donc que \tilde{M} soit dans $\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}$, dont l'exponentiation contient $\mathcal{Z}(\tilde{H})$. Une façon astucieuse de vérifier cette condition est de la réécrire

$$\tilde{M} \perp \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}, \quad \text{car } \left(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp} \right)^{\perp} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}} \quad (3.11)$$

où \perp signifie orthogonal pour le produit scalaire. Ainsi, en imposant cette condition, deux possibilités se présentent :

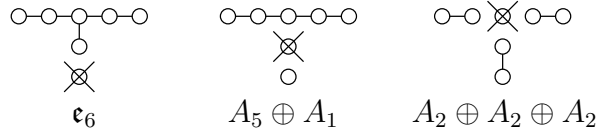
- Soit $\forall \tilde{M} \perp \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}$, $\tilde{\alpha} \in 3\mathbb{Z}$, et dans ce cas il n'y a pas d'anomalie pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- Soit $\exists \tilde{M} \perp \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}$, $\tilde{\alpha} \notin 3\mathbb{Z}$, et alors il faut imposer $k \in 3\mathbb{Z}$, sinon il y a anomalie.

On applique maintenant cela à $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6$, en distinguant selon le rang de la sous-algèbre régulière obtenue, et ce dans le sens décroissant.

- **$\mathbf{r} = 6 = \mathbf{r}(\mathfrak{e}_6)$** Illustrons la procédure précédente avec les sous-algèbres de rang 6 de \mathfrak{e}_6 . On prend donc le diagramme étendu donné en Figure 2, puis on retire $n = 1$ racine de ce diagramme, pour obtenir des sous-algèbres de rang 6. La symétrie du diagramme fait qu'on ne peut obtenir que 3 algèbres distinctes : \mathfrak{e}_6 elle même, $A_5 \oplus A_1$ et $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ (voir Figure 3)

En poursuivant la procédure : on étend les diagrammes de Dynkin obtenus et on enlève une racine à chacun, on retombe en fait sur les mêmes algèbres. C'est un cas particulier dû au fait que A_r a un diagramme étendu très simple. On a donc ici toutes les sous-algèbres possibles de rang maximal. Ensuite, si le rang est maximal, on a nécessairement

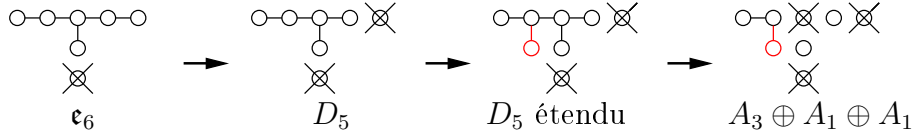
$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{t} \quad (3.12)$$


 FIGURE 3 – Sous-algèbres régulières de \mathfrak{e}_6 de rang maximal.

On a simplement changé de base de la sous-algèbre de Cartan, mais les éléments engendrés sont les mêmes. On est donc ramené au cas précédent $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6$ (on peut d'ailleurs voir \mathfrak{e}_6 comme une sous-algèbre régulière d'elle-même). On n'a donc pas de condition supplémentaire sur \tilde{M} .

Pour \mathfrak{h} de rang 6, il y a donc invariance globale de jauge pour $k \in 3\mathbb{Z}$, sinon il y a anomalie.

• **r = 5** On repart donc des sous-algèbres régulières de rang 6 (Figure 3), et on enlève encore une racine. Cette fois-ci, il faut réappliquer la procédure aux sous-diagrammes obtenus, ce qui nous permet d'obtenir d'autres sous-algèbres de rang 5. Un dessin vaut mieux que de longues explications : si on part du diagramme de gauche, c'est à dire \mathfrak{e}_6 , on obtient D_5 , mais aussi $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$ (Figure 4).


 FIGURE 4 – Sous-algèbres régulières de \mathfrak{e}_6 de rang 5 obtenus à partir du diagramme de \mathfrak{e}_6 .

En faisant de même pour les deux autres diagrammes de rang 6, on obtient de plus A_5 , $A_4 \oplus A_1$ et $A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$. On a ainsi déterminé toutes les sous-algèbres régulières de rang 5. Reste à calculer $\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}$ qui est maintenant de dimension 1, puis de regarder pour chaque sous-algèbre si cela impose de nouvelles conditions sur \tilde{M} . Le détail est donné en annexe B (ce sont de simples calculs d'algèbre linéaire), et l'on obtient le résultat suivant.

Pour $\mathfrak{h} = A_5$ ou $A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$, il y a invariance seulement pour $k \in 3\mathbb{Z}$, sinon il y a anomalie ; et pour $\mathfrak{h} = D_5, A_4 \oplus A_1$ ou $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$, il y a invariance pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc pas d'anomalie.

• **r = 4** La tâche pourrait devenir de plus en plus fastidieuse, puisque la dimension de $\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}$ augmente, mais en fait on limite les calculs si on remarque la chose suivante. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre régulière de rang r , il existe nécessairement une ou plusieurs $\hat{\mathfrak{h}}$ de rang $\hat{r} > r$ et contenant \mathfrak{h} . Par construction, cela correspond aux diagrammes de Dynkin de rang supérieurs qui permettent d'obtenir \mathfrak{h} . Si on trouve une telle $\hat{\mathfrak{h}}$ pour laquelle le modèle coset est déjà dépourvu d'anomalie ($k \in \mathbb{Z}$), alors toutes ses sous-algèbres, en particulier \mathfrak{h} en seront aussi dépourvues, puisque les conditions sur \tilde{M} sont déjà assez restrictives au rang de $\hat{\mathfrak{h}}$ pour supprimer l'anomalie. Ainsi, pour toutes les sous-algèbres issues des diagrammes de rang 5 : $D_5, A_4 \oplus A_1$ ou $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$, il n'y a pas d'anomalie, puisque ces dernières en sont déjà dépourvues.

De plus, il se trouve (et c'est une chance) que toutes les sous-algèbres régulières de rang 4 sauf une peuvent être obtenues à partir de ces trois seuls sous-algèbres. En effet, même pour celles obtenues à partir des autres diagrammes (ceux menant à une anomalie), on peut toujours les obtenir à partir du diagramme de D_5 ou $A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$. Autrement dit : tous les diagrammes de rang 4 sauf un sont déjà contenus dans les diagrammes qui conduisent à des modèles dépourvus d'anomalie. Encore une fois, un exemple pour illustrer est donné en Figure 5.

La seule exception ici est $\mathfrak{h} = A_2 \oplus A_2$ qui ne peut être obtenue qu'à partir de $A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$ ou A_5 , deux modèles souffrant d'anomalie. Il faut donc calculer $\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}^{\perp}$ (de dimension deux) et appliquer le raisonnement précédent. Cet unique calcul au rang 4 (voir Annexe B), et la redondance des diagrammes nous permet d'établir : *Tout modèle coset construit avec une sous-algèbre régulière de rang 4 est dépourvu d'anomalie, sauf pour $\mathfrak{h} = A_2 \oplus A_2$*

$$\begin{array}{ccc}
 A_5 \quad (k \in 3\mathbb{Z}) & \circ-\circ-\circ-\circ & \longrightarrow & \circ-\circ-\circ \otimes \circ & A_3 \oplus A_1 (k \in ?) \\
 A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 (k \in \mathbb{Z}) & \circ-\circ-\circ \circ & \longrightarrow & \circ-\circ-\circ \otimes \circ & A_3 \oplus A_1 (k \in \mathbb{Z})
 \end{array}$$

FIGURE 5 – Au rang 4, les sous-algèbres sont obtenus de façon redondante. À côté de chaque algèbre se trouve la condition d’invariance globale du modèle correspondant. Si un modèle est déjà sans anomalie ($k \in \mathbb{Z}$), les sous-algèbres correspondantes le sont aussi, ce qui permet de limiter les calculs.

• **r < 4** À ce niveau, toutes les sous-algèbres obtenues proviennent de diagrammes de rang 4 qui construisent des modèles dépourvus d’anomalie. L’argument est encore valable : les modèles héritent des propriétés d’invariance des modèles de rang supérieur.

Tout modèle coset construit avec une sous-algèbre régulière de rang 3 ou moins est dépourvu d’anomalie.

Résultat général pour les sous-algèbres régulières On peut donc maintenant regrouper tous ces résultats en un seul :

Théorème 3

Les modèles cosets cohérents construits avec \mathfrak{h} une sous-algèbre régulière de \mathfrak{e}_6 sont dépourvus d’anomalie globale de jauge pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sauf pour les exceptions suivantes : $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_6$, $A_5 \oplus A_1$, $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$, de rang 6 ; A_5 , $A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$, de rang 5 et $A_2 \oplus A_2$, de rang 4. Dans ces cas, il y a invariance globale de jauge seulement pour $k \in 3\mathbb{Z}$, sinon il y a anomalie.

3.2.3 S-algèbres et R-algèbres

Existe-t-il d’autres sous-algèbres que les sous-algèbres régulières ? La réponse est oui, il en existe beaucoup d’autres. Commençons par un exemple emprunté à la supersymétrie où intervient le groupe $SL(9)$ quotienté par son sous-groupe maximal compact $SO(8)$. Les algèbres (complexes) correspondantes sont donc $\mathfrak{sl}(9) = A_8$ et $\mathfrak{so}_{\mathbb{C}}(9) = B_4$. Si l’on regarde les diagrammes de Dynkin, celui de A_8 ne contient que des racines de même norme (on parle d’algèbre *simplement lacée*), contrairement à B_4 qui ne l’est pas. Il est donc impossible d’obtenir B_4 comme sous-algèbre régulière de A_8 , pourtant c’est bien une de ses sous-algèbres. Reste à trouver un moyen de classifier ces algèbres non régulières. Pour cela, on va utiliser les algèbres... régulières ! qui sont les plus facile à manipuler. On définit ainsi, pour \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{g}

$$\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \min_{\mathfrak{m}} \{ \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g} \mid \mathfrak{h} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g} \text{ et } \mathfrak{m} \text{ régulière.} \} \quad (3.13)$$

C’est donc la plus petite sous-algèbre régulière de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h} . Par exemple, si \mathfrak{h} est régulière, alors $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. On peut alors distinguer deux types de sous-algèbres : on dira que \mathfrak{h} est une *S-algèbre* si $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$, sinon on dira que c’est une *R-algèbre*. Pour une S-algèbre, la seule algèbre régulière qui peut la contenir est l’algèbre ambiante \mathfrak{g} . Les autres sont des R-algèbres, dont les algèbres régulières font partie, mais il en existe d’autres. Si on revient à notre exemple $B_4 \subset A_8$, on a $\mathcal{R}(B_4) = A_8$, car toutes les sous-algèbres régulières de A_r sont de la forme $A_{k_1} \oplus \dots \oplus A_{k_r}$ (il suffit de regarder son diagramme pour s’en convaincre), elle ne peuvent donc jamais contenir B_4 , qui est donc une S-algèbre de A_8 .

Une sous-algèbre et des plongements Arrêtons nous un instant sur un problème jusqu’ici laissé sous silence. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre (non triviale) de \mathfrak{g} . La notation $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est ambiguë. En effet, une sous-algèbre est par définition une algèbre. Et donc si \mathfrak{h} est simple, elle est donc entièrement déterminée par l’un des diagrammes de Dynkin donné en Figure 2. Cependant, il est possible de l’inclure de plusieurs façon possible dans l’algèbre ambiante \mathfrak{g} . On définit donc la notion de plongement :

$$\iota : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (3.14)$$

compatible avec la structure d'algèbre de Lie :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{h}, \quad \iota([X, Y]) = [\iota(X), \iota(Y)] \quad (3.15)$$

Ainsi, pour \mathfrak{h} donnée, il peut exister plusieurs plongements différents dans \mathfrak{g} et donc plusieurs sous-algèbres différentes. On peut même avoir une sous-algèbre qui est plongée de façon régulière, en S-algèbre et en R-algèbre. Le problème avait été laissé de côté jusqu'à présent car dans le cas des sous-algèbres régulières, le plongement est essentiellement unique : on peut passer de l'un à l'autre par un automorphisme intérieur de \mathfrak{g} , si bien que c'est quasiment la même sous-algèbre, on dit dans ce cas que les deux algèbres sont conjuguées.

Reste donc maintenant à décrire tous les plongements non équivalents entre eux pour les sous-algèbres de \mathfrak{e}_6 . Dans [12], Dynkin a effectué un magnifique travail en donnant une liste exhaustive des sous-algèbres simples, cependant les méthodes qu'ils utilise ne donnent pas toujours le plongement explicite mais seulement l'existence à équivalence près. Or ce plongement est nécessaire pour nos calculs d'anomalies. Avec un peu d'astuce et de persévérance, on peut quand même traiter de nombreux cas. Encore une fois, on ne décrira pas les calculs en détails (faits en annexe B), simplement les principaux raisonnements avec quelques exemples pour illustrer, puis un théorème concluant chaque étape.

• **Sous-algèbres de rang 1 : $\mathfrak{h} = A_1$** Les sous-algèbres de rang 1 sont très particulières, elles sont constituées de 3 éléments : $\{\alpha^\vee, E^+, E^-\}$, où α^\vee est la seule coracine simple, et avec les relations :

$$[\alpha^\vee, E^+] = 2E^+, \quad [\alpha^\vee, E^-] = 2E^-, \quad [E^+, E^-] = \alpha^\vee \quad (3.16)$$

Cependant, on peut plonger cette algèbre de différentes manières. Dans [12], Dynkin prouve qu'il suffit de connaître comment α^\vee est plongé dans \mathfrak{g} pour caractériser entièrement le plongement. Il établit ainsi 20 plongements différents : 1 régulière, 2 S-algèbres et 17 R-algèbres pour lesquels il donne $\iota(\alpha^\vee) \in \mathfrak{g}$. Revenons aux anomalies : on cherche s'il existe \tilde{M} non trivial tel que

$$\exp(2\pi i \tilde{M}) \in \tilde{Z} \cap \tilde{H} \subset \mathcal{Z}(\tilde{H}) \quad (3.17)$$

Le centre du groupe \tilde{H} correspondant à A_1 est \mathbb{Z}_2 , et il est engendré par $\lambda^\vee = \alpha^\vee/2$, le générateur des copoids de \mathfrak{h} , on sait donc comment il est plongé dans \mathfrak{g} . On peut alors vérifier si c'est un élément de $P^\vee(\mathfrak{e}_6)$, réseau des copoids de \mathfrak{e}_6 , qui engendre le centre de E_6 . Trois possibilités se présentent alors

1. Soit $\iota(\lambda^\vee) \notin P^\vee(\mathfrak{e}_6)$, alors nécessairement $\tilde{Z} \cap \tilde{H} = \{e\}$, et \tilde{M} est une coracine de \mathfrak{e}_6 , si bien que $\text{tr}(M\tilde{M}) \in \mathbb{Z}$ d'après (2.39), et donc il n'y a pas d'anomalie possible pour tout $k \in \mathbb{Z}$
2. Soit $\iota(\lambda^\vee) \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$, mais $\iota(\lambda^\vee)$ est seulement une coracine de \mathfrak{e}_6 , alors comme au dessus, il n'y a pas d'anomalie.
3. Soit $\iota(\lambda^\vee) \in P^\vee(\mathfrak{e}_6)$ et $\iota(\lambda^\vee) \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$. Dans ce cas on prend $\tilde{M} = \iota(\lambda^\vee)$, non trivial et on calcule $\text{tr}(M\tilde{M})$. On peut alors avoir anomalie potentielle et une contrainte supplémentaire sur k en fonction de la valeur de $\tilde{\alpha}$.

Un exemple : une S-sous-algèbre de \mathfrak{e}_6 donnée par $\iota(\lambda^\vee) = 8\alpha_1^\vee + 15\alpha_2^\vee + 21\alpha_3^\vee + 15\alpha_4^\vee + 8\alpha_5^\vee + 11\alpha_6^\vee$ où les α_i^\vee sont les coracines de \mathfrak{e}_6 . Ce qui donne, si on l'exprime dans l'espace euclidien utilisé pour décrire les racines (Annexe A)

$$\iota(\lambda^\vee) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{11}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.18)$$

Cette expression est compatible avec le réseau des copoids $P^\vee(\mathfrak{e}_6)$ donné en (3.5) pour $\tilde{\alpha} = 3, \tilde{q}_1 = -\tilde{q}_5 = 2, \tilde{q}_3 = 0, \tilde{q}_4 = -1, \tilde{q}_6 = -3, \tilde{\beta} = 11$. Donc $\iota(\lambda^\vee) \in P^\vee(\mathfrak{e}_6)$, mais en fait, ce n'est qu'une coracine du réseau. On est donc dans le cas 2, il n'y a pas d'anomalie. On peut aussi le voir autrement, si on prend $\tilde{M} = \iota(\lambda^\vee)$, c'est le seul élément non trivial et l'on a $\tilde{\alpha} = 3$ si bien que $\text{tr}(M\tilde{M}) = (\alpha\tilde{\alpha})/3 \in \mathbb{Z}$ et l'anomalie disparaît pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On procède ainsi pour toutes les sous-algèbres proposées par Dynkin, les détails sont fait en annexe B, avec le type de chaque algèbre, son plongement et la condition d'invariance globale. On trouve le résultat suivant :

Tous les modèles cosets construits avec une sous-algèbre de rang 1 quelconque sont dépourvus de toute anomalie globale de jauge.

• **S-algèbres simples de rang > 1** Celles-ci sont encore données avec le plongement explicite, il y en a 4 en tout ([12], Table 24) : A_2, \mathfrak{g}_2, C_4 et \mathfrak{f}_4 . Pour les deux algèbres exceptionnelles \mathfrak{g}_2 et \mathfrak{f}_4 , la question est vite réglée, car dans ce cas $\mathcal{Z}(\tilde{H}) = \{e\}$, donc \tilde{M} est une coracine et il n’y a pas d’anomalie. Pour les deux autres, la méthode est la même que pour le rang 1 : on regarde les éléments non triviaux qui engendrent le centre de \tilde{H} , puis on regarde comment leur plongement est compatible avec le réseau des copoids de \mathfrak{e}_6 , on a alors les 3 possibilités décrites précédemment. On trouve ainsi (détail en annexe B) que

Les 4 modèles cosets cohérents construits avec une S-sous-algèbre simple de rang > 1 sont dépourvus de toute anomalie globale de jauge.

• **R-algèbres simples de rang > 1** Les difficultés apparaissent ici : si Dynkin a bien classifié toutes les R-sous-algèbres de \mathfrak{e}_6 ([12], Table 25), il ne donne pas de plongement explicite. Avant de chercher ce plongement pour chaque algèbre (17 en tout), on peut éliminer certain cas. Soit \mathfrak{h} une R-algèbre, on a donc $\mathfrak{h} \subsetneq \mathcal{R}(\mathfrak{h}) \subsetneq \mathfrak{e}_6$, avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ une sous-algèbre régulière, qui a donc été déjà traitée précédemment (3.2.2). En particulier, si le modèle coset construit avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ est dépourvu de toute anomalie, il en sera de même pour les sous-algèbres de $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, en particulier pour \mathfrak{h} . C’est le même argument qui nous a permis d’éliminer le cas des sous-algèbres régulières de rang < 4. Donc toute R-sous-algèbre \mathfrak{h} ayant pour $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ une algèbre régulière conduisant à un modèle sans anomalie, conduit elle aussi à un modèle sans anomalie, ce qui nous permet d’éliminer 12 cas !

Il suffit donc de regarder les 5 autres R-algèbres \mathfrak{h} qui ont $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ conduisant à un modèle avec anomalie, elles sont données en Table 1.

\mathfrak{h}	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})$
A_2	$A_2 \oplus A_2$
A_2	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$
A_2	A_5
A_3	A_5
C_3	A_5

TABLE 1 – R-sous-algèbre pouvant conduire à des modèles avec anomalie.

Maintenant, considérons \mathfrak{h} une R-algèbre de \mathfrak{e}_6 , mais restreinte dans $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, qui devient l’algèbre ambiante. Alors, on peut voir \mathfrak{h} comme une S-algèbre de $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, or les S-algèbres sont plus faciles à établir. En effet, dans [13], les S-sous-algèbres des algèbres de Lie simples et classiques on été classifiées jusqu’au rang 6, avec plongement explicite. Donc $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5$, soit 3 cas du tableau 1 peuvent être traités. Comme précédemment, on calcule comment un élément non trivial du centre de \mathfrak{h} est plongé dans \mathfrak{e}_6 , via $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ cette fois-ci, et si ce plongement est compatible avec le réseau des copoids de \mathfrak{e}_6 . Par exemple, pour $\mathfrak{h} = A_2$ et $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5$, son centre est engendré par un seul élément λ_1^\vee qui est plongé selon

$$\iota(\lambda_1^\vee) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}, 0 \right) \tag{3.19}$$

Cette expression est compatible avec le réseau des copoids $P^\vee(\mathfrak{e}_6)$ donné en (3.5) pour $\tilde{\alpha} = 4, \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \tilde{q}_4 = 0, \tilde{q}_3 = \tilde{q}_5 = -1, \tilde{q}_6 = -2$, et $\tilde{\beta} = 0$. Cette fois-ci, $\iota(\lambda_1^\vee)$ est un copoids mais n’est pas une coracine, donc en prenant $\tilde{M} = \iota(\lambda_1^\vee)$, on a

$$k \operatorname{tr}(M\tilde{M}) = -k\frac{\alpha\tilde{\alpha}}{3} + m = -k\frac{4\alpha}{3} + m, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{3.20}$$

Donc pour avoir invariance globale, il faut donc nécessairement prendre $k \in 3\mathbb{Z}$, sinon il y a anomalie. Les anomalies survivent donc pour cette sous-algèbre, ce qui rompt un peu la monotonie de la démarche ! Pour les deux autres sous-algèbres avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5$, on utilise le plongement effectif donné dans [13], les détails sont en annexe B.

Reste $\mathfrak{h} = A_2$ avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_2 \oplus A_2$ ou $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ qui ne sont que semi-simples et donc non traitées dans [13], il faut aller chercher le plongement explicite dans [14]. En fait, il existe pour chacune deux plongements non équivalents ι_1 et ι_2 , donnés en annexe B, dont l'un conduit à une anomalie et l'autre non. On peut donc faire le calcul d'invariance pour les 7 cas restants (5 R-sous-algèbres dont deux avec deux plongements) et en déduire :

Les 21 modèles cosets cohérents construits avec une R-sous-algèbre simple de rang > 1 sont dépourvus de toute anomalie globale de jauge, sauf pour les cas $\mathfrak{h} = A_2$, $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5, A_2 \oplus A_2$ ou $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ (plongements ι_2), où il faut imposer $k \in 3\mathbb{Z}$ pour éviter une anomalie.

Sous-algèbres non régulières simples On est donc en mesure d'énoncer un résultat général pour ces algèbres :

Théorème 4

Les modèles cosets cohérents construits avec \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{e}_6 non régulière et simple sont dépourvus d'anomalie globale de jauge pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sauf pour le cas $\mathfrak{h} = A_2$, $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5, A_2 \oplus A_2$ ou $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ (plongement ι_2) où il faut imposer $k \in 3\mathbb{Z}$ pour éviter une anomalie.

Sous-algèbres non régulières semi-simples Il reste encore une petite partie à traiter : parmi les sous-algèbres non régulières, on peut aussi avoir des algèbres qui sont seulement semi-simples. Deux questions se posent sur ce type d'algèbres. D'abord, étant données \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 deux sous-algèbres simples de \mathfrak{e}_6 , la sous-algèbre $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ est-elle encore une sous-algèbre ? Ensuite, si cette sous-algèbre existe, y-a-t'il anomalie pour le modèle correspondant ? La deuxième question est plus facile : la condition d'anomalie du modèle coset construit avec $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ est donné par la condition sur \mathfrak{h}_1 et celle de \mathfrak{h}_2 . Pour voir cela, il suffit de prendre $\tilde{M} \in \mathfrak{h}_1 \oplus 0_{\mathfrak{h}_2}$ puis $\tilde{M} \in 0_{\mathfrak{h}_2} \oplus \mathfrak{h}_1$, ce qui permet de tester les éléments non triviaux de \mathfrak{h}_1 puis de \mathfrak{h}_2 dans le calcul de $\text{tr}(M\tilde{M})$. Malheureusement, il reste à classifier les sous-algèbres non simples, ce qui est plus compliqué. Dans le dernier chapitre de [12], Dynkin propose une classification de toutes les S-algèbres de \mathfrak{e}_6 , même les cas non simples, avec les relations d'inclusion entre elles. Elles sont reproduites en Figure 6.

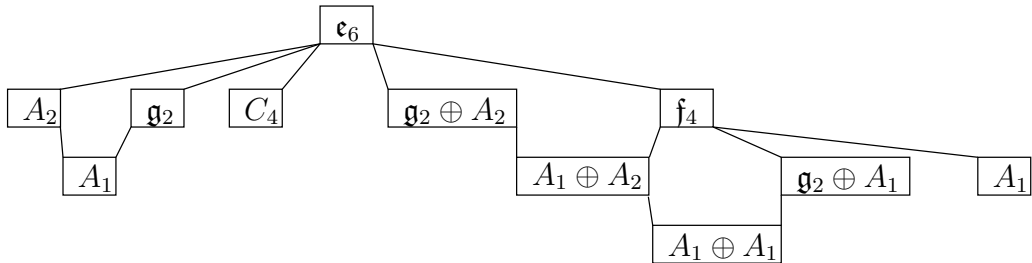


FIGURE 6 – Les S-sous-algèbres de \mathfrak{e}_6 et leurs relations d'inclusions. On retrouve les cas simples déjà traités, mais certaines sous-algèbres semi-simples apparaissent.

Dans le cas de $\mathfrak{g}_2 + A_2$, le plongement explicite est donné par Dynkin dans [12] (Table 35), et il se trouve qu'ici A_2 est la R-algèbre avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_2 \oplus A_2$, c'est à dire un cas qui préserve l'anomalie. Il y a donc invariance globale pour $\mathfrak{g}_2 + A_2$ seulement si $k \in 3\mathbb{Z}$. Les autres algèbres semi-simples sont toutes incluses dans une algèbre qui ne conduit à aucune anomalie. Comme précédemment, l'invariance est héritée de la sous-algèbre plus grande.

Il reste donc finalement le cas des R-algèbres semi-simples de rang supérieur à 1, pour lesquelles Dynkin ne donne pas de classification. On peut cependant les construire en suivant cette procédure : on choisit une algèbre régulière \mathfrak{h} de \mathfrak{e}_6 qui conduit à une anomalie (les autres ne posent pas de problème). On prend ensuite une S-sous-algèbre de \mathfrak{h} , en regardant chaque bloc séparément si celle-ci est semi-simple. On obtient alors une algèbre \mathfrak{m} avec $\mathcal{R}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{h}$, avec \mathfrak{h} régulière dans \mathfrak{e}_6 , donc \mathfrak{m} est une R-sous-algèbre. Après avoir traité tous les cas possibles, on ne conserve que ceux qui sont effectivement

semi-simples. On obtient ainsi toutes les R -sous-algèbres semi-simples de \mathfrak{e}_6 . La condition d'anomalie s'obtient en regardant chaque bloc séparément, comme expliqué précédemment. Le détail est fait en annexe B et l'on obtient le résultat général pour le cas semi-simple :

Théorème 5

Les modèles cosets cohérents construits avec \mathfrak{h} une sous-algèbre de \mathfrak{e}_6 semi-simple et non régulière sont dépourvus d'anomalie globale de jauge pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sauf pour les S -algèbres $\mathfrak{h} = A_2$ et $\mathfrak{g}_2 + A_2$; et les R -algèbres $\mathfrak{h} = A_2 \oplus A_1, A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$ (avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5 \oplus A_1$), $\mathfrak{h} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_2$ (avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$), et $\mathfrak{h} = A_2 \oplus A_1$ (avec $\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = A_5$) où il faut imposer $k \in 3\mathbb{Z}$ pour éviter une anomalie.

Conclusion et perspectives

Après avoir décrit un modèle WZW quantifiable, cohérent et invariant conforme, nous avons jaugé une partie des symétries adjointes en vue de construire un modèle coset. On a ensuite mis en évidence certaines anomalies globales dues à la topologies du système, qui empêchent l'invariance des modèles jaugés sous les grandes transformations de jauge (non déformables à l'identité). On a alors regardé en détails pour quels modèles ces anomalies persistent, et quelle condition sur la constante de couplage il faut imposer pour les éviter, ce qui conduit à une contrainte plus forte que $k \in \mathbb{Z}$. Ce travail, certes répétitif, nous a permis de comprendre en profondeur la structure très subtile des sous-algèbres de Lie. On obtient de plus un résultat complet et inédit pour les modèles construits avec les groupes exceptionnels et un sous-groupe provenant d'une sous-algèbre semi-simple quelconque.

Dans son rapport [2], Paul De Fromont a traité les modèles construits avec des algèbres classiques et les sous-algèbres régulières seulement. Les choses se compliquent ici car le rang de l'algèbre étant arbitrairement grand, la classification générale des sous-algèbres devient plus difficile, et des problèmes d'arithmétique non triviaux apparaissent lorsque le rang r varie, ce qui ne se pose pas pour les cas exceptionnels qui sont de taille « finie ». Cependant, les algèbres classiques ont des représentations matricielles très simples, ce qui pourrait apporter de nouveaux outils pour classifier les plongements. Les résultats communs obtenus sont déjà suffisamment significatifs pour que la rédaction d'un article soit en préparation.

On pourrait donc poursuivre ce travail en regardant les sous-algèbres non régulières des algèbres classiques, ou encore le cas des anomalies pour les modèles avec torsion (2.2), car les modèles cosets correspondants sont aussi pertinents pour les applications. En effet, ces résultats sur les anomalies globales pourraient être appliqués à l'analyse de la dualité dite « T » des modèles WZW jaugés, mais aussi pour les modèles cosets supersymétriques. L'étude de ces applications constitue les grandes lignes d'un projet de thèse qui débutera à la suite de ce stage.

Références

- [1] J.-B. Zuber, *L'invariance conforme et la physique à deux dimensions*, La Recherche **251**, 142-152 (février 1993)
- [2] P. De Fromont, *Anomalies globales de jauge dans les modèles WZW et cosets de la théorie des champs*, Rapport de stage de M2, (2010)
- [3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. B **241**, 333-380 (1984)
- [4] E. Witten, *Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions*, Commun. Math. Phys. **92**, 455-472 (1984)
- [5] K. Gawędzki, N. Reis, *Basic gerbe over non-simply connected compact groups*, Journal of Geometry and Physics **50,1-4**, 28-55, (2004)
- [6] K. Gawędzki, R. Suszek, K. Waldorf, *Global gauge anomalies in two-dimensional bosonic sigma models*, Communications in Mathematical Physics **302**, 513-580, (2011)
- [7] E. Witten, *An $su(2)$ anomaly.*, Phys. Lett. **117**, 1982
- [8] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press, Oxford (1996)
- [9] J. Fuchs, C. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press (1997)
- [10] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4, 5 et 6, Hermann, Paris (1968)
- [11] G. Felder, K. Gawędzki and A. Kupiainen : *Spectra of Wess-Zumino-Witten Models with Arbitrary Simple Groups*, Commun. Math. Phys. **117**, 127-158, 1988
- [12] E. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Mat. Sb. (N.S.) **30(72) :2**, 349-462, (1952)
- [13] M. Lorente, B. Gruber, *Classification of Semisimple Subalgebras of Simple Lie Algebras*, J. Math. Phys. **13**, 1639-1663, (1972)
- [14] A. Minchenko *The Semisimple Subalgebras of Exceptional Lie Algebras*, Trans. Moscow Math. Soc. **67**, 225-259, (2006)

A Poids et racines de \mathfrak{e}_6 et \mathfrak{e}_7

On donne ici, pour chaque algèbre ses coracines et ses copoids dans leur espace euclidien correspondant, ainsi que la normalisation de la forme de Killing tr. On trouvera plus de détails, et les informations sur les autres algèbres dans [10].

	\mathfrak{e}_6	\mathfrak{e}_7
Espace euclidien	$(a_1, \dots, a_6, a_7) \in \mathbb{R}^7, a_1 + \dots + a_6 = 0$	$(a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{R}^8, a_1 + \dots + a_8 = 0$
Forme de Killing	$\text{tr}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$	$\text{tr}(e_i, e_j) = \delta_{ij}$
Coracines simples	$\alpha_1^\vee = (1, -1, 0, 0, 0, 0)$ $\alpha_2^\vee = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$ $\alpha_3^\vee = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$ $\alpha_4^\vee = (0, 0, 0, 1, -1, 0)$ $\alpha_5^\vee = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$ $\alpha_6^\vee = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\alpha_1^\vee = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$ $\alpha_2^\vee = (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$ $\alpha_3^\vee = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)$ $\alpha_4^\vee = (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)$ $\alpha_5^\vee = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$ $\alpha_6^\vee = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$ $\alpha_7^\vee = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Coracine étendue	$\delta = \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$	$\delta = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)$
Copoids simples	$\lambda_1^\vee = \left(\frac{5}{6}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_2^\vee = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_3^\vee = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_4^\vee = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_5^\vee = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\lambda_6^\vee = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2})$	$\lambda_1^\vee = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\lambda_2^\vee = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\lambda_3^\vee = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{9}{4}\right)$ $\lambda_4^\vee = (0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, 3)$ $\lambda_5^\vee = (0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 2)$ $\lambda_6^\vee = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1)$ $\lambda_7^\vee = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{7}{4}\right)$

B Détail des calculs

Anomalies pour les sous-algèbres régulières

Détail du calcul pour les sous-algèbre régulières de \mathfrak{e}_6 de rang 5. On donne pour chacune l'ensemble des racines de \mathfrak{e}_6 qui engendre la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{h} , le vecteur qui lui est orthogonal. On distingue alors le cas où il n'y a pas d'anomalie ($k \in \mathbb{Z}$), puis le cas où il existe des éléments $\tilde{M} \perp \mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}$ non triviaux ($\tilde{\alpha} \notin 3\mathbb{Z}$, les coefficients qui n'apparaissent pas sont nuls), qui impose la condition $k \in 3\mathbb{Z}$ pour éviter une anomalie. La dernière ligne est l'exception du rang 4, où $(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}})^\perp$ est de dimension 2.

	\mathfrak{h}	$\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}}$	$(\mathfrak{t}_{\mathfrak{h}})^\perp$	\tilde{M}
$k \in \mathbb{Z}$	D_5	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee, \alpha_4^\vee, \alpha_6^\vee$	$\left(1, 1, 1, 1, 1, -5, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$	$\tilde{\alpha} \in 3\mathbb{Z}$
	$A_3 \oplus A_1 \oplus A_1$	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee \oplus \delta \oplus \alpha_5^\vee$	$(1, 1, 1, 1, -2, -2, 0)$	$\tilde{\alpha} \in 3\mathbb{Z}$
	$A_4 \oplus A_1$	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee, \alpha_4^\vee \oplus \delta$	$(1, 1, 1, 1, 1, -5, 0)$	$\tilde{\alpha} \in 3\mathbb{Z}$
$k \in 3\mathbb{Z}$	A_5	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee, \alpha_6^\vee, \delta$	$(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$	$\tilde{\alpha} = 2, \tilde{q}_1 = -2$
	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee \oplus \alpha_6^\vee, \delta \oplus \alpha_4^\vee$	$(0, 0, 0, 1, 1, -2, 0)$	$\tilde{\alpha} = 2, \tilde{q}_1 = -2$
$k \in 3\mathbb{Z}$	$A_2 \oplus A_2$	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee \oplus \alpha_4^\vee, \alpha_5^\vee$	$(1, 1, 1, -1, -1, -1, 0)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\tilde{\alpha} = 2, \tilde{q}_3 = \tilde{q}_6 = -1$

Anomalies pour les sous-algèbres de rang 1

Détail du calcul pour les sous-algèbres de rang 1 : l'algèbre est ici toujours $\mathfrak{h} = A_1$ mais peut être plongée de plusieurs façons, on donne donc l'algèbre $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$ correspondante qui détermine le type d'algèbre. On donne ensuite $\iota(\lambda^\vee)$ plongement de l'élément non trivial de \mathfrak{h} dans \mathfrak{e}_6 , qui caractérise totalement le plongement (voir [12], chapitre III). On regarde ensuite si cet élément est compatible avec les réseaux de copoids et coracines de \mathfrak{e}_6 , ce qui nous donne une des 3 possibilités données en 3.2.3. Cependant, la troisième ($\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$) n'apparaît jamais, si bien qu'il n'y a pas d'anomalie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{R}(\mathfrak{h})$	$\iota(\lambda^\vee)$	Compatibilité
A_1	$(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$2A_1$	$(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$3A_1$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_2 \oplus A_1$	$(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{2}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_2 \oplus 2A_1$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$2A_2$	$(1, 0, 0, 0, 0, -1, \frac{2}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$2A_2 \oplus A_1$	$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{2\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_3	$(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_3 \oplus A_1$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_3 \oplus 2A_1$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_4	$(1, 0, 0, 0, 0, -1, \frac{4}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_4 \oplus A_1$	$(1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, -1, \frac{4}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
D_4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$D_5(a_1)$	$(1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, -1, \frac{5}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_5	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{5}{\sqrt{2}})$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$A_5 \oplus A_1$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{5}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
D_5	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{7}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
$\mathfrak{e}_6(a_1)$	$(2, 1, 0, 0, -1, -2, \frac{8}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
\mathfrak{e}_6	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{11}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$

Anomalies pour les sous-algèbres simples

Détail du calcul pour les S-algèbres et R-algèbres de \mathfrak{e}_6 de rang supérieur à 1. Les plongements effectifs sont données dans [12] pour les S-algèbres, puis dans [13] (Table XIII) pour les R-algèbres simples (il suffit de les considérer comme des S-algèbres de $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$).

Pour cas : A_2 avec $\mathcal{R}(A_2) = 3A_2$ qui n'est que semi-simple, le plongement explicite est donné dans [14] (il suffit de donner le plongement des coracines simples x^\vee, y^\vee de A_2). Cependant, il existe en fait deux plongements non équivalents ι_1 et ι_2

$$\iota_1(x^\vee) = \alpha_1^\vee + \alpha_4^\vee + \alpha_6^\vee \qquad \iota_2(x^\vee) = \alpha_1^\vee + \alpha_5^\vee + \alpha_6^\vee \qquad (\text{B.1})$$

$$\iota_1(y^\vee) = \alpha_2^\vee + \alpha_5^\vee + \delta \qquad \iota_2(y^\vee) = \alpha_2^\vee + \alpha_4^\vee + \delta \qquad (\text{B.2})$$

dans $3A_2 \in \mathfrak{e}_6$ définie par $\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee \oplus \alpha_4^\vee, \alpha_5^\vee \oplus \alpha_6^\vee, \delta$. Les plongements diffèrent seulement par une permutation $\alpha_4^\vee \leftrightarrow \alpha_5^\vee$ (d'autres permutations conduisent à un plongement équivalent [14]), mais l'un conduit à une anomalie et l'autre non ! Enfin pour A_2 avec $\mathcal{R}(A_2) = A_2$, on a de même deux plongements non équivalents qui sont les mêmes que ι_1 et ι_2 sauf qu'on supprime α_6^\vee et δ des expressions.

Dans tous les cas, le centre de la sous-algèbre est engendré par un seul élément λ^\vee , on peut donc regarder comment il est plongé dans \mathfrak{e}_6 et obtenir une condition de compatibilité, comme pour les algèbres de rang 1. On obtient ainsi le tableau suivant, où cette fois ci la possibilité d'une anomalie apparaît.

\mathfrak{h}	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})$	$\iota(\lambda^\vee)$	Compatibilité
A_2	$A_2 \oplus A_2(\iota_1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 0)$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	$A_2 \oplus A_2(\iota_2)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, 0)$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2(\iota_1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, 1, 0, 0, 0)$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2(\iota_2)$	$(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 0)$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	A_5	$(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, 0)$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_3	A_5	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
C_3	A_5	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -2, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$	$\notin P^\vee(\mathfrak{e}_6), \notin Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
A_2	\mathfrak{e}_6	$(1, 0, -1, 1, 0, -1, \frac{2}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$
C_4	\mathfrak{e}_6	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\in P^\vee(\mathfrak{e}_6), \in Q^\vee(\mathfrak{e}_6)$

Anomalies pour les R-sous-algèbres semi-simples

Pour obtenir une R-sous-algèbre semi-simple de \mathfrak{e}_6 , on suit la méthode proposée à la fin de [13]. On se donne d'abord une sous-algèbre régulière de \mathfrak{e}_6 souffrant d'anomalie, soit : $A_5 \oplus A_1, 3A_2, A_5, 2A_2 \oplus A_1$ et A_2 . Cette algèbre sera notre $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, faisant de \mathfrak{h} une R-sous-algèbre de \mathfrak{e}_6 . On détermine ensuite les S-algèbres de $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, pour chaque bloc simple si elle est semi-simple. Parmi toutes les sous-algèbres obtenues, on ne garde que celles qui sont semi-simples. La condition d'anomalie s'obtient ensuite en regardant comment chaque bloc simple d'une algèbre semi-simple donnée est plongée dans \mathfrak{e}_6 , ce qui a déjà été traité précédemment : il suffit de donner $\mathcal{R}(\mathfrak{h}_i)$ pour chaque bloc \mathfrak{h}_i . La condition s'obtient ensuite comme le « et » logique de tous les blocs simples. Ce qui est résumé dans le tableau suivant.

\mathfrak{h}	$\mathcal{R}(\mathfrak{h})$	$\{\mathcal{R}(\mathfrak{h}_i)\}$	Anomalie
$A_2 \oplus A_1$	$A_5 \oplus A_1$	A_5, A_1	$\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}$
$A_3 \oplus A_1$		A_5, A_1	$k \in \mathbb{Z}$
$C_3 \oplus A_1$		A_5, A_1	$k \in \mathbb{Z}$
$A_2 \oplus A_1 \oplus A_1$		$2A_2, 3A_1, A_1$	$\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1$		A_5, A_1	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$		$2A_2, 3A_1, A_1$	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus (A_2 \oplus A_2)$	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$	$A_2, A_2 \oplus A_2$	$\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1 \oplus A_2$		A_2, A_2, A_2	$k \in 3\mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$		A_2, A_2, A_2	$k \in 3\mathbb{Z}$
$A_2 \oplus A_1$	A_5	$2A_2, 3A_1$	$\mathbf{k} \in 3\mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1$		$2A_2, 3A_1$	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_1$	A_2, A_2, A_1	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$		A_2, A_2, A_1	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_2$	$A_2 \oplus A_2$	A_2, A_2	$k \in \mathbb{Z}$
$A_1 \oplus A_1$		A_2, A_2	$k \in \mathbb{Z}$