



Master Sciences de la matière
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2010-2011
Paul de Fromont
M2 Physique

Supraluminalité dans les modèles de gravité modifiée avec Galiléon

résumé : Les modèles de *gravité modifiée* sont des extensions de la Relativité Générale (RG). Ils ont pour la plupart été introduit pour des raisons qui tiennent à la cosmologie, notamment pour apporter une explication au mystère de l'accélération de l'Univers sans devoir faire appel à une constante cosmologique dont la nature nous échappe. Une règle générale de ces modèles est qu'ils doivent tous passer les tests à l'échelle du système Solaire qui confirment très précisément la RG, c'est à dire qu'ils doivent retomber sur la RG à courte échelle. Certains de ces modèles sont inspirés de modèles à dimension supplémentaire. Une des conséquences se traduit dans l'ajout d'une masse au graviton qui est le boson de jauge de la gravité. On parle alors de *gravité massive*. On peut formellement décomposer ce boson massif de spin-2 en deux modes d'hélicité-2 (qui correspond aux excitations habituelles du graviton en RG), avec l'addition de deux modes d'hélicité-1 et un dernier mode d'hélicite-0. C'est ce dernier mode, noté π qui va jouer le rôle du Galiléon. Il est connu que ces modèles, malgré des prévisions intéressantes, possèdent aussi de graves pathologies dont certaines semblaient être résolues par l'introduction d'un deuxième Galiléon. Nous montrons ici que ce n'est pas le cas.

mots clés : *gravité modifiée - cosmologie - modèles DGP - Galiléons - supraluminlité*

Stage encadré par

- CLAUDIA DE RHAM
- mail : Claudia.DeRham@unige.ch
- Département de Physique Théorique and Center for Astroparticle Physics
- Université de Genève, 24 quai Ansermet, CH 1211 Genève 4, Switzerland

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	3
1 Gravité modifiée et modèles avec Galilée	4
1.1 Introduction	4
1.2 Espace de <i>de Sitter</i> et solution accélérée	6
1.2.1 Cas de la symétrie sphérique	6
1.2.2 Mécanisme de Vainshtein	7
1.2.3 perturbations et stabilité de la solution	8
1.2.4 Vitesse du son et sous-luminalité	8
1.3 Modèle <i>DGP</i>	8
1.3.1 Perturbations	9
1.3.2 Solution à symétrie sphérique	9
1.3.3 Vitesse du son	10
2 Modèles à deux Galiléons	11
2.1 Introduction	11
2.2 Solution sphérique sur un fond accéléré	12
2.3 Fluctuations autour de la solution sphérique	13
2.3.1 Vitesse du son et matrice M	13
2.4 Comportement à grande distance	14
2.4.1 Matrice \mathcal{K}	14
2.4.2 Vitesse du son	14
2.4.3 Cas de l'article	16
2.5 Comportement proche de 0	16
2.5.1 Simplification de $\Sigma_3^{(l)}$	16
2.5.2 Étude de la matrice \mathcal{K}	17
2.5.3 Développement perturbatif de $y(r)$ et $z(r)$ autour de 0	17
2.5.4 Vitesse du son radiale autour de $r = 0$	18
2.5.5 Vitesse du son ortho-radiale	20
Conclusion	20
Annexes	20
Bibliographie	21
.....	

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Claudia qui a eu la patience de me présenter les modèles de gravité modifiée et de répondre à mes questions, même les plus stupides ! Je la remercie, ainsi que son équipe pour l'accueil qu'ils m'ont fait, notamment en me faisant participer activement à la vie du labo.

Introduction

Le stage a été effectué de début avril à fin juillet 2011 à l'Université de Genève. Le but initial était d'étudier les possibilités d'observations cosmologiques et de tests des théories de gravité modifiée. Il se trouve que ces modèles possèdent de graves pathologies internes dont une des plus forte vient du fait que les modes de perturbation du champ stable se propagent à une vitesse qui au delà de la vitesse de la lumière, normalisée à 1. Ces problèmes apparaissent déjà quand on considère une masse ponctuelle fixe et stationnaire. Cependant ces modèles sont encore très étudiés car ils permettent d'obtenir de manière assez simple un fond accéléré (solution de *de Sitter*) sur lequel peuvent se développer des perturbations stables du à une masse. Ces modèles permettent aussi de retrouver la RG à courte distance grâce à un mécanisme connu : le mécanisme de Vainshstein qui permet d'écranter la force issu des dimensions supplémentaires à courte distance, passant ainsi les tests très précis réalisés à l'échelle du système solaire tandis que la force à grande distance est modifiée par un facteur $3/4$.

Dans un premier temps, nous avons essayé introduit une dépendance temporelle dans les équations de la gravité modifiée pour voir si l'hypothèse de stationnarité (qui n'a pas vraiment de réalité physique) était à l'origine des soucis de supraluminalité. Nous avons donc étudié rapidement cette possibilité mais nous n'avons pas poussé la réflexion suffisamment loin pour rapporter les résultats ici. Cependant il semblerait que l'introduction de la dépendance temporelle ne lève pas ce soucis et que la condition de sous luminalité implique des configurations de masse irréalistes ($T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \rho + 3p$ négatif à longue échelle etc).

Il a été proposé un modèle particulier qui introduisait un second Galiléon analogue au premier mais qui ne se couplait pas à la matière. Les deux Galiléons sont cependant couplés entre eux. Les auteurs annoncent ainsi que l'introduction de ce deuxième Galiléon permet non seulement de retrouver les qualités d'une théorie à un Galiléon mais permet aussi de résoudre les problèmes de supra luminalité ! Les auteurs présentent un exemple précis de modèle qui, selon eux, possède tous les bonnes caractéristiques.

La majeure part de notre travail a donc consisté à étudier précisément la théorie qu'ils proposaient pour finalement arriver à montrer rigoureusement qu'une telle théorie (dans le cas général et pas seulement dans le cas de leur exemple) possède les mêmes défauts qu'une théorie à un Galiléon en ce qui concerne les soucis de supraluminalité.

Dans la première partie, purement descriptive, nous introduirons les modèles de gravité modifiée avec Galiléon ainsi que le modèle *DGP* pour exhiber le problème de supraluminalité. Dans la seconde partie nous commencerons par introduire le formalisme des théories à deux Galiléons avant de présenter notre travail.

Chapitre 1

Gravité modifiée et modèles avec Galiléon

1.1 Introduction

La théorie du Galiléon a été développée à l'origine par Nicolis *et al.* [1] pour une étudier une large classe de modèles de gravité modifiée. Dans tous les cas, on considère la relativité générale sur une espace temps Minkowskien qui sera modifié en ajoutant un champ scalaire additionnel : le Galiléon. Bien que le Galiléon et le graviton se couplent directement à la matière, tout couplage entre eux est négligé au premier ordre. Le Lagrangien qui en découle est alors invariant sous les transformations suivantes :

$$\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c \quad (1.1)$$

Avec π qui est le Galiléon¹, b_μ et c qui sont respectivement des champs vectoriel et scalaire constants.

On considère alors l'action suivante :

$$S[\tilde{h}_{\mu\nu}, \pi] = \int d^4x (\mathcal{L}_{GR} + \mathcal{L}_\pi) \quad (1.2)$$

Avec $\mathcal{L}_\pi = \mathcal{L}_{galileon}(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) + \pi T$ qui est le lagrangien général du Galiléon [1], [6]. On cherche alors la forme générale de $\mathcal{L}_{galileon}$ telle que ce lagrangien soit invariant sous la transformation $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$. On peut montrer [4], [1] qu'il existe un nombre fini de termes qui vérifient cette condition et on a, en dimension 4 :

$$\mathcal{L}_{galileon}(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) = \sum_{i=1}^5 c_i \mathcal{L}_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) \quad (1.3)$$

Où les c_i sont des constantes et :

1. Cette transformation vient d'une généralisation de l'invariance de Galilée, d'où le nom !

$$\mathcal{L}_1 = \pi \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(\partial\pi)^2 \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{2}\partial^2\pi(\partial\pi)^2 \quad (1.6)$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2}[(\partial^2\pi)^2 - (\partial\partial\pi)^2](\partial\pi)^2 \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{1}{2}[(\partial^2\pi)^3 - 3(\partial^2\pi)(\partial\partial\pi)^2 + 2(\partial\partial\pi)^3](\partial\pi)^2 \quad (1.8)$$

Par construction, la variation de chaque composante est construite uniquement à partir de dérivées secondes,

$$\frac{\delta}{\delta\pi} \int d^4x \mathcal{L}_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) = \epsilon_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) \quad (1.9)$$

Où on a :

$$\epsilon_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) = (i-1)! \delta_{[\nu_1}^{\mu_1} \cdots \delta_{\nu_{i-1}]}^{\mu_{i-1}} (\partial_{\mu_1} \partial^{\nu_1} \pi) \cdots (\partial_{\mu_{i-1}} \partial^{\nu_{i-1}} \pi) \quad (1.10)$$

Ce qui se réécrit de manière plus claire sous :

$$\epsilon_1 = 1 \quad (1.11)$$

$$\epsilon_2 = \partial^2\pi \quad (1.12)$$

$$\epsilon_3 = (\partial^2\pi)^2 - (\partial\partial\pi)^2 \quad (1.13)$$

$$\epsilon_4 = (\partial^2\pi)^3 - 3\partial^2\pi(\partial\partial\pi)^2 + 2(\partial\partial\pi)^3 \quad (1.14)$$

$$\epsilon_5 = (\partial^2\pi)^4 - 6(\partial^2\pi)^2(\partial\partial\pi)^2 + 8\partial^2\pi(\partial\partial\pi)^3 + 3[(\partial\partial\pi)^2]^2 - 6(\partial\partial\pi)^4 \quad (1.15)$$

Il suit que les équations de mouvements pour le Galiléon sont données par :

$$-\frac{1}{2}\partial^2 \left(\tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{h}\eta_{\mu\nu} \right) + \cdots = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

$$\sum_{i=1}^5 c_i \epsilon_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) = -T \quad (1.17)$$

L'équation (1.16) est l'équation d'Einstein linéarisée et ses solutions correspondent aux solution standard de la RG tandis que l'équation (1.17) décrit la toute les variations par rapport à la RG qui sont encodées dans le champ π . On a aussi introduit \tilde{h} défini par :

$$h_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + 2\pi\eta_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

r

1.2 Espace de *de Sitter* et solution accélérée

Une des principales innovations théoriques des modèles de gravité massive est qu'ils produisent des solutions de type *de Sitter* sans devoir recourir à une constante cosmologique [11], [14]. Nous allons ici donner les grandes lignes qui conduisent à la solution accélérée. On peut montrer [1] qu'on doit alors adopter la configuration :

$$\pi_{dS}(x) = -\frac{1}{4}H^2 x_\mu x^\mu \quad (1.19)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \pi_{dS} = -\frac{1}{4}H^2 \eta_{\mu\nu} \quad (1.20)$$

Où H est la paramètre de Hubble classique. On obtient alors une équation algébrique sur H en utilisant l'équation du mouvement (1.17) qui donne :

$$c_1 - 2c_2 H^2 + 3c_3 H^4 - 3c_4 H^6 + \frac{3}{2}c_5 H^8 = 0 \quad (1.21)$$

Il se trouve qu'on peut trouver une large gamme de paramètres c_i pour lesquels il existe une solution de type *de Sitter* [9]. On suppose ensuite qu'on a une telle solution et on s'intéresse à sa stabilité et à la dynamique locale des perturbations de π qui ne changent pas le comportement asymptotique². Ici on introduit une notation un peu abusive mais qui simplifie la suite où les perturbations de π seront notés $\pi \dots$. C'est à dire qu'on effectue le remplacement suivant $\pi \mapsto \pi_{dS} + \pi$ dans le lagrangien et dans les équations du mouvement. Par des arguments de symétrie et du fait que seules les dérivées secondes apparaissent dans les équations du mouvement, on peut montrer qu'on aura, dans ce cas avec un fond de type *de Sitter* :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi} \Big|_{dS} = \sum_{i=2}^5 d_i \epsilon_i \quad (1.22)$$

Avec les d_i qui sont reliés aux c_i à travers $d_i = M_{ij} c_j$ où M est une matrice qui va dépendre de H , c'est à dire du fond. l'équation du mouvement est donc similaire à (1.17) et devient :

$$\sum_i d_i \epsilon_i(\pi, \partial\pi, \partial\partial\pi) = -T \quad (1.23)$$

1.2.1 Cas de la symétrie sphérique

La résolution de ces équations dans le cas général est totalement impossible, on va donc considérer des cas simplifiés pour lesquels les calculs sont faisables analytiquement. On va donc considérer le cas de la symétrie sphérique stationnaire (sans dépendance temporelle). On obtient alors pour les ϵ_i :

$$\epsilon_2 \mapsto \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \pi') \quad (1.24)$$

$$\epsilon_3 \mapsto \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} (r \pi'^2) \quad (1.25)$$

$$\epsilon_4 \mapsto \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} (\pi'^3) \quad (1.26)$$

$$\epsilon_5 \mapsto 0 \quad (1.27)$$

2. C'est à dire que la solution *de Sitter* décrit le fond sur lequel π va pouvoir fluctuer localement à cause de la présence de masses. Ce sont ces fluctuations qui vont nous intéresser ensuite.

Avec $\pi' = \frac{d\pi}{dr}$. On va maintenant choisir une configuration avec une masse ponctuelle M (par exemple le Soleil) placée à l'origine : $\rho(\vec{r}) = M\delta(\vec{r})$, on a alors :

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\pi}{\delta\pi} = \sum_i d_i \epsilon_i = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^3 \left(d_2 \left(\frac{\pi'}{r} \right)^2 + 2d_3 \left(\frac{\pi'}{r} \right)^2 + 2d_4 \left(\frac{\pi'}{r} \right)^3 \right) \right] = M\delta(\vec{r}) \quad (1.28)$$

On peut intégrer la dernière équation sur une sphère de rayon r (théorème de Gauss) et on obtient alors :

$$d_2 \left(\frac{\pi'}{r} \right) + 2d_3 \left(\frac{\pi'}{r} \right)^2 + 2d_4 \left(\frac{\pi'}{r} \right)^3 = \frac{M}{4\pi r^3} \quad (1.29)$$

on peut alors montrer qu'il existe une solution si et seulement si on a les conditions :

$$d_2 > 0 \quad (1.30)$$

$$d_4 \geq 0 \quad (1.31)$$

$$d_3 > -\sqrt{\frac{3d_2 d_4}{2}} \quad (1.32)$$

1.2.2 Mécanisme de Vainshtein

Il est connu [5] que tous les modèles de gravité massive connaissent un problème intrinsèque appelé *discontinuité de van Dam-Veltman-Zakharov*, dite discontinuité *vDVZ* [16] et [8]. Cette discontinuité consiste en le fait qu'on ne retrouve pas les métriques classiques de la RG quand on envoie la masse du graviton vers 0.

Cette discontinuité a été résolue par Vainshtein [15] quand il a étudié précisément le cas de la symétrie sphérique stationnaire. Il a réussi à montrer qu'il existe un certain rayon, dit *rayon de Vainshtein* et noté R_v , unique à chaque distribution de masse, telle qu'en dessous, les solutions linéarisées de la théorie non linéaire ne sont plus valides. Pour une masse ponctuelle M , son rayon de Vainshtein est défini par :

$$R_v = \left(\frac{M}{m^2 M_{pl}^2} \right)^{1/3} \quad (1.33)$$

Ce rayon tend vers l'infini quand la masse m du graviton tend vers 0. Il a aussi réussi à montrer qu'il existe une solution stable à courte distance développée autour de la solution de Schwarzschild de la RG, dans le cas où la masse du graviton tend vers 0.

Ce régime correspond au régime de *découplage* et est défini par :

$$M_{pl} \rightarrow \infty \quad (1.34)$$

$$m \rightarrow 0 \quad (1.35)$$

$$\Lambda = (m^2 M_{pl})^{1/3} \sim cste \quad (1.36)$$

$$T_{\mu\nu}/M_{pl} \sim cste \quad (1.37)$$

Dans cette limite, on peut donc exhiber un mécanisme de Vainshtein qui assure qu'on retrouve la RG à courte distance [9] et qu'on peut avoir une solution développée autour de la solution de Schwarzschild. dans toute la suite, quand ce ne sera pas dit explicitement, on supposera qu'on travaille dans ce régime.

1.2.3 perturbations et stabilité de la solution

On s'intéresse maintenant à la stabilité de $\pi_0(r)$, solution de (1.29) vis à vis des perturbations radiales, $\pi = \pi_0(r) + \phi$. Au vu des symétries de la solution, le Lagrangien quadratique pour les perturbations va avoir la forme suivante :

$$\mathcal{S}_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x [K_t(r)(\partial_t\phi)^2 - K_r(r)(\partial_r\phi)^2 - K_\Omega(r)(\partial_\Omega\phi)^2] \quad (1.38)$$

En utilisant les équations du mouvement on peut en déduire des formes assez simples pour ces K_i qui ne dépendent plus explicitement de r mais en dépendant uniquement à travers $y = \pi'/r$. La stabilité de la solution est alors assurée si on a $K_i > 0$ pour tout i . Cela revient à rajouter des contraintes sur les coefficients d_i qui sont alors :

$$d_2 > 0 \quad (1.39)$$

$$d_4 \geq 0 \quad (1.40)$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{3d_2d_4}{2}} \quad (1.41)$$

$$d_5 \leq \frac{3d_4^2}{d_3} \quad (1.42)$$

1.2.4 Vitesse du son et sous-luminalité

La question est maintenant de savoir si les fluctuations se propagent bien à une vitesse inférieure à celle de la lumière. La vitesse de propagation radiale est simplement :

$$cs_r^2 = \frac{K_r}{K_t} \quad (1.43)$$

Pour r grand (loin de la source), c'est à dire y petit, on a :

$$cs_r^2 = 1 + 4\frac{d_3}{d_2}y + O(y^2) > 1 \quad (1.44)$$

Ainsi, la vitesse de propagation des perturbations est forcément plus grande que celle de la lumière aux grandes distances [10], [7], [1]. Ce comportement n'est pas acceptable. Pour ce qui est de la vitesse de propagation ortho-radiale, donnée par $c_\Omega^2 = \frac{K_\Omega}{K_t}$, on peut montrer qu'elle est toujours inférieure à 1 si on a :

$$d_5 < 0 \quad (1.45)$$

1.3 Modèle DGP

Le modèle DGP a été introduit G.R. Dvali *et al.* [7] est un cas particulier des modèles de gravité massive introduits précédemment. Le modèle DGP décrit une théorie de la gravité dans un espace temps à 5 dimensions [12]. On peut alors montrer qu'on aboutit, dans la limite de découplage, on a l'action en dimension 4 :

$$S = \int d^4x \left[-3(\partial\pi)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}(\partial\pi)^2\Box\pi + \frac{1}{2M_{pl}}\pi T \right] \quad (1.46)$$

Avec $T = T_\mu^\mu$ et π normalisé correctement. On obtient les équations du mouvement par variation par rapport à π :

$$3\Box\pi - \frac{1}{\Lambda^3}(\partial_\mu\partial_\nu\pi)^2 + \frac{1}{\Lambda^3}(\Box\pi)^2 = -\frac{T}{4M_{pl}} \quad (1.47)$$

1.3.1 Perturbations

On suppose maintenant qu'on dispose d'une solution de (1.47). On s'intéresse maintenant à sa stabilité et donc aux perturbations. On va donc perturber π et développer l'action jusqu'à l'ordre quadratique en la perturbation ϕ :

$$S_\phi = \int d^4x \left[-3(\partial\phi)^2 - \frac{1}{\Lambda^3}(\Box\pi(\partial\phi)^2 + 2\partial_\mu\pi\partial^\mu\phi\Box\phi) \right] \quad (1.48)$$

En utilisant $\partial^\mu\phi\Box\phi = \partial_\nu[\partial^\nu\phi\partial^\mu\phi - 1/2\eta^{\mu\nu}(\partial\phi)^2]$ et en intégrant par partie on obtient :

$$S_\phi = \int d^4x \left[-3(\partial\phi)^2 - 2(\tilde{K}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\tilde{K})\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \right] \quad (1.49)$$

Où on a introduit $\tilde{K}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Lambda^3}\partial_\mu\partial_\nu\phi$. On cherche maintenant à écrire l'action perturbée sous une forme similaire à (1.38). En lisant simplement l'équation (1.49) on a directement $S_\phi = \int d^4x Z_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi$ avec :

$$Z_{\mu\nu} = -3\eta_{\mu\nu} - 2(\tilde{K}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\tilde{K}) \quad (1.50)$$

1.3.2 Solution à symétrie sphérique

Comme pour le modèle du Galiléon on va s'intéresser à la solution à symétrie sphérique qui intervient dans le cas d'école d'une masse ponctuelle (ou du moins à symétrie sphérique). On considère donc $T = -M\delta(\vec{r})$ et on cherche une solution $\pi(r)$ stationnaire et dépendant uniquement de r . L'équation (1.47) s'écrit alors, après intégration sur une sphère :

$$6\frac{\pi'(r)}{r} + \frac{4}{\Lambda^3}\left(\frac{\pi'(r)}{r}\right)^2 = \frac{M}{8\pi M_{pl}r^3} \quad (1.51)$$

Où $\pi'(r) = d\pi/dr$. On remarque notamment qu'on retrouve une équation du type (1.29) avec les coefficients d_i fixés par le modèle DGP, c'est à dire : $d_2 = 12M_{pl}$, $d_4 = 4M_{pl}/\Lambda^3$ et $d_2 = 0$. Cette équation est du deuxième degré en $y(r) = \pi'(r)/r$ et peut donc se résoudre facilement. On a alors :

$$y_\pm(r) = -\frac{3\Lambda^3}{4} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{18\pi} \frac{R_v^3}{r^3}} \right] \quad (1.52)$$

On en déduit facilement les deux comportements asymptotiques de $y(r)$ qui va se comporter comme $1/r^{3/2}$ pour $r \ll R_v$, ce qui implique la correction à la force Newtonienne est :

$$\frac{F_\pi}{F_{Newton}} \sim \frac{\pi'(r)/M_{pl}}{Mr^2/M_{pl}^2} \sim \left(\frac{r}{R_v}\right)^{3/2} \quad (1.53)$$

On a donc une disparition de la contribution de F_π à courte distance ce qui correspond bien au mécanisme de Vainshtein présenté auparavant et qui permet donc à la théorie d'être compatible avec les observations à l'échelle de la Galaxie.

Pour $r \gg R_v$ on a : $y \sim 1/r^3$ et on retrouve le comportement Newtonien à grande distance.

1.3.3 Vitesse du son

La encore on s'intéresse à la vitesse de propagation des perturbations. Comme on a déjà écrit le Lagrangien perturbé $Z_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi$ et qu'on connaît l'expression de $Z_{\mu\nu}$ donnée par (1.50), on en déduit immédiatement :

$$cs_r^2(r) = \frac{Z_{rr}}{Z_{tt}} = \frac{3 + \frac{4}{\Lambda^3} \frac{\pi'}{r}}{3 + \frac{4}{\Lambda^3} \frac{\pi'}{r} + \frac{2}{\Lambda^3} \pi''} \quad (1.54)$$

Et on a aussi la même chose pour la vitesse du son selon θ :

$$cs_\theta^2(r) = \frac{Z_{\theta\theta}}{Z_{tt}} = \frac{3 + \frac{2}{\Lambda^3} \frac{\pi'}{r} + \frac{2}{\Lambda^3} \pi''}{3 + \frac{4}{\Lambda^3} \frac{\pi'}{r} + \frac{2}{\Lambda^3} \pi''} \quad (1.55)$$

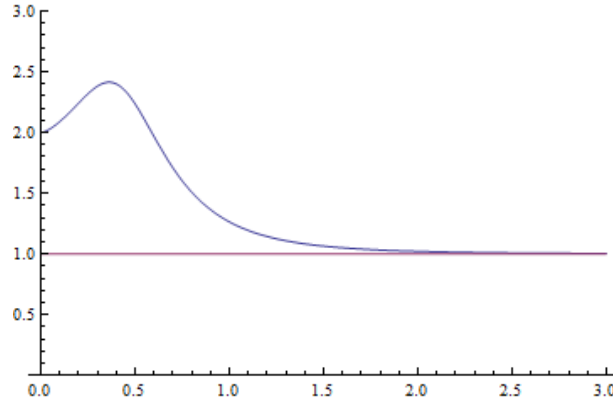


FIGURE 1.1 – vitesse de propagation radiale des perturbations sur le champ créé par une masse ponctuelle à l'origine. On a normalisé l'axe des ordonnées à 1, c'est à dire $c = 1$ et on a tracé r/R_v sur l'axe des abscisses. On a aussi tracé $v = c = 1$ (en rouge). On voit clairement que la vitesse du son est au dessus de 1 pour tous les r , donnant lieu à des modes supra-luminaux qui violent, entre autres, le principe de causalité.

On a tracé $cs_r(r)$ sur la figure (1.1) avec des unités adaptées. On voit que quel que soit r , c'est à dire quel que soit le régime (r grand devant R_v ou non), la vitesse de propagation radiale des perturbations est plus grande que 1, c'est à dire supra-luminale, ce qui est en contradiction avec la relativité restreinte et générale et donc à priori inacceptable.

On peut facilement vérifier que $cs_\theta(r)$ est toujours inférieur à 1 et il n'y a donc pas de problèmes de surluminalité dans la direction ortho-radiale.

Nous verrons ensuite qu'une nouvelle approche à été proposée dans le cadre d'une théorie multi-galiléon qui semblait lever cette incohérence. Une bonne partie de notre travail à consisté à regarder de plus près la théorie qui a été proposée pour tenter de comprendre l'origine de cette "guérison miraculeuse". Nous avons finalement réussi à montrer que ces modèles présentaient les mêmes problèmes que ceux à un seul Galiléon. C'est que nous allons voir dans la section suivante.

Chapitre 2

Modèles à deux Galiléons

Les modèles à deux Galiléons généraux [2] et [3] ont été introduit pour généraliser les théorie de gravité modifiée avec Galiléon. Antonio Padilla et al ont analysés plus en détail ces modèles pour regarder de plus prêt si les difficultés qui apparaissaient dans le cas d'un Galiléon disparaissait. Il se trouve qu'ils affirment avoir résolu les problèmes de supraluminalité dans [citer]. Ils donnent notamment un exemple concret d'une théorie à deux Galiléons qui satisfait toutes les conditions pour avoir une théorie stable, sans ghosts¹ (pour une présentation des problèmes de ghosts, voir [4] et [13]), avec un mécanisme de Vainhstein réaliste et surtout des modes de propagation qui se propagent sous luminalement. En étudiant numériquement leur exemple, nous nous sommes aperçus qu'il ne satisfaisait pas la condition de sous luminalité. Nous avons voulu en savoir plus sur le cas général et en étudiant le cas général de la théorie qu'ils présentent, nous avons pu montrer qu'il existe toujours un mode qui se propagera supraluminalement et qu'ainsi l'introduction d'un nouveau Galiléon ne semble pas résoudre les problèmes de la théorie habituelle.

2.1 Introduction

On va ici donner une brève introduction aux théories à plusieurs Galiléons. Le formalisme complet et une analyse plus poussée sont présentées dans [3]. L'idée principale est d'introduire un autre champs scalaire noté ξ qui va se coupler au champ π tandis que seul π sera couplé à la matière. On dispose donc d'un graviton sans masse $h_{\mu\nu}$ et deux galiléons scalaires π et ξ . A part l'interaction avec T , on néglige toute autre interaction incluant le graviton. On a alors une action générale :

$$S[h_{\mu\nu}, \pi, \xi; \Phi_n] = \int d^4x \left[-\frac{M_{pl}^2}{4} h^{\mu\nu} \mathcal{E} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\pi, \xi} + \pi T \right] \quad (2.1)$$

Avec Φ_n qui sont les champs de matière, $\mathcal{E} h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square (h_{\mu\nu} - 1/2 \eta_{\mu\nu} h) + \dots$ qui est le tenseur d'Einstein linéarisé et le Lagrangien du Galiléon est :

$$\mathcal{L}_{\pi, \xi} = \sum_{0 \leq m+n \geq 4} (\alpha_{m,n} \pi + \beta_{m,n} \xi) \mathcal{E}_{m,n} \quad (2.2)$$

1. Cas où le coefficient cinétique du lagrangien des perturbations est négatif, entraînant des comportements inacceptables pour la théorie.

Avec :

$$\mathcal{E}_{m,n} = (m+n)! \delta_{[\nu_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\nu_m}^{\mu_m} \delta_{\sigma_1}^{\rho_1} \dots \delta_{\sigma_n}^{\rho_n}] (\partial_{\mu_1} \partial^{\nu_1} \pi) \dots (\partial_{\mu_m} \partial^{\nu_m} \pi) (\partial_{\rho_1} \partial^{\sigma_1} \xi) \dots (\partial_{\rho_n} \partial^{\sigma_n} \xi) \quad (2.3)$$

2.2 Solution sphérique sur un fond accéléré

On peut montrer que comme pour le cas à un Galiéon, il existe une solution de type *de Sitter* pour un univers vide. Cette solution correspond à la configuration :

$$\bar{\pi}(x) = -\frac{1}{4} k_\pi x_\mu x^\mu, \quad \bar{\xi}(x) = -\frac{1}{4} k_\xi x_\mu x^\mu \quad (2.4)$$

Avec $k_\pi = H^2 - H_{GR}^2$ où H est le paramètre de Hubble calculé en gravité modifiée et H_{GR} celui de la relativité générale. k_ξ est quand à lui une constante. Si on considère des fluctuations autour de cet espace vide (par exemple du à une masse ...), c'est à dire $\pi \mapsto \bar{\pi} + \pi$ et $\xi \mapsto \bar{\xi} + \xi$, on obtient les équations du mouvement sous la forme générale

$$\sum_{1 \leq m+n \leq 4} a'_{m,n} \mathcal{E}_{m,n} = -\delta T, \quad \sum_{1 \leq m+n \leq 4} b'_{m,n} \mathcal{E}_{m,n} = 0 \quad (2.5)$$

Avec les nouveaux coefficients a' et b' qui dépendent des a et b originaux ainsi que des coefficients k_π et k_ξ , c'est à dire du fond. **Pour des raisons de simplicité, on omet désormais les ' sur les a et les b** , cependant toute la suite des calculs est effectuée sur un fond quelconque (qui peut être de *de Sitter*). On va ici considérer la perturbation comme étant due à la présence d'une masse m à symétrie sphérique (par exemple le Soleil) et qui va donc créer un champ à symétrie sphérique qui doit ensuite tendre vers la solution accélérée à grande échelle. Pour simplifier, on considérera une masse m ponctuelle placée à l'origine.

Les fluctuations seront quantifiées par π_s et ξ_s , c'est à dire : $\pi = \bar{\pi}(x) + \pi_s(r)$ et $\xi = \bar{\xi}(x) + \xi_s(r)$. En introduisant $y = \pi'_s/r$ et $z = \xi'_s/r$, les équations du mouvement pour y et z se réduisent alors aux deux équations algébriques :

$$\mathcal{A}(y, z) = \frac{m}{4\pi r^3} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{B}(y, z) = 0 \quad (2.7)$$

Avec $\mathcal{A}(y, z) = f_1^a + 2(f_2^a + f_3^a)$ et $\mathcal{B}(y, z) = f_1^b + 2(f_2^b + f_3^b)$ où les coefficients f_n^α (pour $\alpha = a$ ou $\alpha = b$) sont définis par² :

$$f_n^\alpha = \sum_{i=0}^n \alpha'_{i, n-i} y^i z^{n-i} \quad (2.8)$$

Plus clairement, les équations du mouvement prennent la forme³ :

$$a_{10}y + a_{01}z + 2(a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3) = \frac{m}{r^3} \quad (2.9)$$

$$a_{01}y + b_{01}z + 2(a_{21}/3y^3 + a_{12}y^2z + 3a_{03}yz^2 + b_{03}z^3) = 0 \quad (2.10)$$

2. le formalisme peut apparaître un peu lourd mais il s'avérera utile par la suite

3. Il existe un lien entre les coefficients a_{ij} et b_{ij} . Dans les équations suivantes, on a laissé uniquement les paramètres libres, c'est à dire tous les a_{ij} ainsi que b_{01} et b_{03}

On peut remarquer que f_2 n'apparaît pas dans les équations ci-dessus. Les auteurs de [3] sous-entendent que la prise en compte de ce terme serait à l'origine de problèmes de stabilité de la théorie. Il affirment aussi que le terme \mathcal{L}_5 (qui est lié à f_4) ne doit pas être pris en compte pour assurer l'existence d'un mécanisme de Vainshtein cohérent. A partir d'ici on considère donc :

$$a_{n,4-n} = b_{n,4-n} = a_{n,2-n} = b_{n,2-n} = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Fluctuations autour de la solution sphérique

Dans le cas du Galileon seul [1], il est possible de trouver des solutions accélérées sans ghosts [13] et possédant un mécanisme de Vainshtein qui apparaît à l'échelle du système solaire. Tout ceci est prometteur pourtant, comme vu précédemment, les difficultés apparaissent quand on considère les fluctuations par rapport à ces solutions qui donnent alors des vitesses de propagation soit trop fortes (supra-luminales) soit trop faibles (problème d'émission Cherenkov massive). Les auteurs de la théorie à deux Galiléons prétendent pouvoir résoudre tous ces problèmes simultanément. Nous allons voir que ce n'est pas le cas.

On considère alors les fluctuations par rapport aux solutions que l'on vient d'exhiber.

$$\pi = \pi_s + \phi, \quad \xi = \xi_s + \psi \quad (2.12)$$

On va aussi se concentrer sur le Lagrangien quadratique qui correspond à la théorie d'ordre dominant :

$$\mathcal{L}_{\phi,\psi} = \frac{1}{2} \partial_t \Phi \cdot \mathcal{K} \partial_t \Phi - \frac{1}{2} \partial_r \Phi \cdot \mathcal{U} \partial_r \Phi - \frac{1}{2} \partial_\Omega \Phi \cdot \mathcal{V} \partial_\Omega \Phi \quad (2.13)$$

Où $\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$ et \mathcal{K} , \mathcal{U} et \mathcal{V} sont trois matrices 2×2 .

2.3.1 Vitesse du son et matrice M

On peut alors montrer que les vitesses du son⁴ dans la direction θ ($\theta = 0$ correspond à la direction radiale et $\theta = \pi/2$ correspond à la direction orthoradiale) sont données par les valeurs propres de la matrice M définie par :

$$M(\theta) = \mathcal{K}^{-1} \mathcal{U} \cos^2(\theta) + \mathcal{K}^{-1} \mathcal{V} \sin^2(\theta) \quad (2.14)$$

Enfin on peut développer ces matrices en terme d'autres matrices Σ qui permettront de coupler plus facilement ces matrices aux équations du mouvement.

$$\mathcal{K} = \Sigma_1 + 3\Sigma_2 + 6\Sigma_3 + 6\Sigma_4 + \frac{r}{3} \partial_r (\Sigma_1 + 3\Sigma_2 + 6\Sigma_3 + 6\Sigma_4) \quad (2.15)$$

$$\mathcal{U} = \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + 2\Sigma_3 \quad (2.16)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \frac{r}{2} \partial_r \mathcal{U} \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

Où, enfin, les matrices Σ_n sont définies par :

4. Car il y en a deux, une pour chaque mode

$$\Sigma_n = \begin{pmatrix} \partial_y f_n^a & \partial_y f_n^b \\ \partial_z f_n^a & \partial_z f_n^b \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

D'après l'équation (2.11), on sait déjà :

$$\Sigma_2 = \Sigma_4 = 0 \quad (2.20)$$

2.4 Comportement à grande distance

2.4.1 Matrice \mathcal{K}

La matrice \mathcal{K} correspond au coefficient du terme cinétique dans le lagrangien perturbé (2.13).

Pour assurer la stabilité de la théorie (absence de ghosts), il faut donc s'assurer que les valeurs propres de \mathcal{K} soient strictement positives. Dans notre cas, c'est à dire pour r très grand, la matrice \mathcal{K} prend la forme simple :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ a_{01} & b_{01} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Ce qui implique :

$$a_{10}b_{01} - a_{01}^2 > 0 \quad (2.22)$$

$$a_{10} + b_{01} > 0 \quad (2.23)$$

On peut facilement combiner ces expressions et en déduire deux conditions simples sur a_{10} et b_{01} :

$$a_{10} > 0 \quad (2.24)$$

$$b_{01} > 0 \quad (2.25)$$

2.4.2 Vitesse du son

On suppose que pour r grand, on peut développer les solutions selon ⁵ :

$$y(r) = \frac{Y_1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (2.26)$$

$$z(r) = \frac{Z_1}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (2.27)$$

En utilisant les équations du mouvement (2.9) et (2.10), on obtient ⁶ :

$$Y_1 = \frac{b_{01}}{a_{10}b_{01} - a_{01}^2} m \quad (2.28)$$

$$Z_1 = -\frac{a_{01}}{a_{10}b_{01} - a_{01}^2} m \quad (2.29)$$

⁵. On a en fait utilisé ce développement précédemment pour justifier l'expression de \mathcal{K}

⁶. A ce niveau on sait que (2.25) implique que $Y_1 > 0$. Or on sait que $\pi'(r)$ a un interprétation physique en terme de force, $Y_1 > 0$ implique alors que cette force est $F_\pi(r) \sim -\pi'(r) = -ry(r) \sim -1/r^2$. Ce dernier point confirme que l'on retrouve bien une force de type newtonienne à grande distance

A partir d'ici on va développer les matrices Σ_n selon r , c'est à dire :

$$\Sigma_3 = \Sigma_3^{(l)} + \Sigma_3^{(nl)} + \dots \quad (2.30)$$

où la matrice $\Sigma_3^{(l)}$ sera d'ordre $1/r^6$, $\Sigma_3^{(nl)} \sim 1/r^7$ etc. Dans ce cas, la matrice $\Sigma_3^{(l)}$ peut se réécrire selon :

$$\Sigma_3^{(l)} = \frac{m^2}{r^6} \tilde{\Sigma}_3^{(l)} \quad (2.31)$$

où $\tilde{\Sigma}_3^{(l)}$ est :

$$\tilde{\Sigma}_3^{(l)} = \frac{1}{(a_{01}^2 - a_{10}b_{01})^2} \begin{pmatrix} a_{01}^2 a_{12} - 2a_{01}a_{21}b_{01} + 3a_{30}b_{01}^2 & 3a_{01}^2 a_{03} - 2a_{01}a_{12}b_{01} + a_{21}b_{01}^2 \\ 3a_{01}^2 a_{03} - 2a_{01}a_{12}b_{01} + a_{21}b_{01}^2 & -6a_{01}a_{03}b_{01} + a_{12}b_{01}^2 + 3a_{01}^2 b_{03} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Dans ces conditions, la matrice M devient :

$$M = Id + \frac{8m^2}{r^6} \Sigma_1^{-1} \tilde{\Sigma}_3^{(l)} \quad (2.33)$$

Avec $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ a_{01} & b_{01} \end{pmatrix}$. les valeurs propres de M , qui correspondent à cs_{\pm}^2 , s'écrivent sous la forme :

$$cs_{\pm}^2 = 1 + \frac{a \pm \sqrt{b}}{r^6} + 0 \left(\frac{1}{r^6} \right) \quad (2.34)$$

où a et b dépendent des a_{ij} et des b_{ij} . Pour s'assurer que les deux modes soient sous-luminaux, on doit alors avoir :

$$a < 0 \quad (2.35)$$

$$b > 0 \quad (2.36)$$

$$b < a^2 \quad (2.37)$$

Avec :

$$a = \frac{6a_{01}^3 a_{03} + 2a_{01}b_{01}(3a_{03}a_{10} + 2a_{21}b_{01}) - b_{01}^2(a_{10}a_{12} + 3a_{30}b_{01}) - a_{01}^2(5a_{12}b_{01} + 3a_{10}b_{03})}{(a_{01}^2 - a_{10}b_{01})^3} \quad (2.38)$$

$$a^2 - b = \frac{-2a_{01}(a_{12}a_{21} - 9a_{03}a_{30})b_{01}^3 + (a_{21}^2 - 3a_{12}a_{30})b_{01}^4 + a_{01}^4(9a_{03}^2 - 3a_{12}b_{03})}{(a_{01}^2 - a_{10}b_{01})^5} \quad (2.39)$$

$$+ \frac{6a_{01}^3 b_{01}(-a_{03}a_{12} + a_{21}b_{03}) + 3a_{01}^2 b_{01}^2(a_{12}^2 - 2a_{03}a_{21} - 3a_{30}b_{03})}{(a_{01}^2 - a_{10}b_{01})^5} \quad (2.40)$$

A ce niveau, il est difficile de dire quoique ce soit sur le cas général et il faudrait pousser l'étude plus loin. On peut remarquer cependant qu'on obtient des contraintes sur les paramètres libres du système. Une étude plus fine de ce système pourrait exclure une bonne partie de l'espace libre des paramètres et contraindre le système. Nous nous sommes cependant principalement concentrés sur le comportement à courte distance pour en déduire des exclusions et des règles générales.

2.4.3 Cas de l'article

En utilisant les valeurs numériques de l'article [3] : $a_{10} = 3$, $a_{01} = -1$, $b_{01} = 1/2$, $a_{30} = 2$, $a_{21} = -13$, $a_{12} = 24$, $a_{03} = -9$ et $b_{03} = -18$. a et b valent alors respectivement -7400 et $7533,92\dots$ ce qui implique :

$$cs_+^2(r) \sim 1 + \frac{133.9}{r^6}m^2 \quad (2.41)$$

$$cs_-^2(r) \sim 1 - \frac{14933.9}{r^6}m^2 \quad (2.42)$$

On a ainsi un mode sous luminal et un autre mode sur luminal autour de l'infini. On n'a donc absolument pas relevé le problème de sur-luminalité dans l'ensemble des cas à deux galiléons.

2.5 Comportement proche de 0

On va maintenant supposer que l'on a :

$$y(r) = y_1/r + \tilde{y}_2 + O(r) \quad (2.43)$$

$$z(r) = z_1/r + \tilde{z}_2 + O(r) \quad (2.44)$$

Avec les coefficients $y_1, \tilde{y}_2\dots$ qui sont des coefficients réels sur lesquels on a à priori aucune contrainte mise à part qu'en analogie avec le comportement à courte distance⁷, on doit avoir la force issue de π qui doit être attractive, c'est à dire selon $-e_r$. Ceci implique alors que $y_1 > 0$. Cependant on a aucune information sur le signe de z_1 .

2.5.1 Simplification de $\Sigma_3^{(l)}$

On veut commencer par simplifier l'expression d'un maximum de quantité. On part des équations du mouvement à l'ordre 1 :

$$a_{30}y_1^3 + a_{21}y_1^2z_1 + a_{12}y_1z_1^2 + a_{03}z_1^3 = \frac{m}{2} \quad (2.45)$$

$$\frac{a_{21}}{3}y_1^3 + a_{12}y_1^2z_1 + 3a_{03}y_1z_1^2 + b_{03}z_1^3 = 0 \quad (2.46)$$

$\Sigma_3^{(l)}$ s'écrit alors comme :

$$\Sigma_3^{(l)} = \begin{pmatrix} 3a_{30}y_1^2 + 2a_{21}y_1z_1 + a_{12}z_1^2 & 3a_{03}z_1^2 + 2a_{12}y_1z_1 + a_{21}y_1^2 \\ 3a_{03}z_1^2 + 2a_{12}y_1z_1 + a_{21}y_1^2 & 3b_{03}z_1^2 + 6a_{03}y_1z_1 + a_{12}y_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

En utilisant (2.45), (2.46) et en introduisant $B = 3a_{03}z_1^2 + 2a_{12}y_1z_1 + a_{21}y_1^2$, on peut réécrire $\Sigma_3^{(l)}$ comme :

$$\Sigma_3^{(l)} = \begin{pmatrix} -\frac{z_1}{y_1}B + \frac{3m}{2y_1} & B \\ B & -\frac{y_1B}{z_1} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

7. Ainsi qu'avec le comportement habituel de la force modifiée dans la cas de *DGP*

2.5.2 Étude de la matrice \mathcal{K}

Comme dit précédemment, on doit s'assurer que les valeurs propres de la matrice \mathcal{K} sont strictement positives. Dans notre cas, la matrice \mathcal{K} s'écrit :

$$K = 2/r^2 \Sigma_3^{(l)} + o(1/r^2) \quad (2.49)$$

Mais comme on connaît l'expression analytique de $\Sigma_3^{(l)}$ en fonction des y_1, z_1, B etc., on peut montrer que - en supposant $y_1 > 0$ - les valeurs propres sont positives si et seulement si $B/z_1 < 0$ ou encore : $B > 0$ et $z_1 < 0$ ou $B < 0$ et $z_1 > 0$.

Cas de l'article

En prenant les valeurs numériques de l'article, on trouve les deux valeurs propres : $5^{1/3} \frac{1+\sqrt{82}}{6^{2/3}}$, $-5^{1/3} \frac{-1+\sqrt{82}}{6^{2/3}}$. Cet exemple possède donc un cas pour lequel \mathcal{K} est négatif et va même s'annuler à un certain r (car les valeurs propres de \mathcal{K} sont positives à grande distance et par continuité, une des deux doit s'annuler quelque part). Ce comportement est interdit pour notre théorie et ce simple fait suffit pour justifier l'inconsistance de l'exemple donné.

2.5.3 Développement perturbatif de $y(r)$ et $z(r)$ autour de 0

Comme dit précédemment, on va supposer que dans la région des r petits (cad $r \leq R_v$), les solutions peuvent être développées selon (2.43) et (2.44). Des équations du mouvement au premier ordre on tire :

$$a_{30}y_1^3 + a_{21}y_1^2z_1 + a_{12}y_1z_1^2 + a_{03}z_1^3 = \frac{m}{2} \quad (2.50)$$

$$\frac{a_{21}}{3}y_1^3 + a_{12}y_1^2z_1 + 3a_{03}y_1z_1^2 + b_{03}z_1^3 = 0 \quad (2.51)$$

Et de celle du second ordre :

$$3a_{30}y_1^2\tilde{y}_2 + a_{21}y_1(2\tilde{y}_2z_1 + y_1\tilde{z}_2) + z_1(a_{12}\tilde{y}_2z_1 + 2a_{12}y_1\tilde{z}_2 + 3a_{03}z_1\tilde{z}_2) = 0 \quad (2.52)$$

$$a_{21}y_1^2\tilde{y}_2 + a_{12}y_1(2\tilde{y}_2z_1 + y_1\tilde{z}_2) + 3z_1(a_{03}\tilde{y}_2z_1 + 2a_{03}y_1\tilde{z}_2 + b_{03}z_1\tilde{z}_2) = 0 \quad (2.53)$$

De (2.52), on tire

$$\tilde{z}_2 = -\tilde{y}_2 \frac{a_{21}y_1^2 + 2a_{12}y_1z_1 + 3a_{03}z_1^2}{a_{12}y_1^2 + 6a_{03}y_1z_1 + 3b_{03}z_1^2} \quad (2.54)$$

En réintroduisant cette expression dans (2.53), on obtient

$$\tilde{y}_2 = 0 \quad (2.55)$$

ou

$$\begin{aligned} & -(a_{21}^2 - 3a_{12}a_{30})y_1^4 - 2(a_{12}a_{21} - 9a_{03}a_{30})y_1^3z_1 - \\ & 3(a_{12}^2 - 2a_{03}a_{21} - 3a_{30}b_{03})y_1^2z_1^2 + \\ & 6(-a_{03}a_{12} + a_{21}b_{03})y_1z_1^3 + 3(-3a_{03}^2 + a_{12}b_{03})z_1^4 = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.50) et (2.51) on peut réécrire cette dernière équation comme :

$$\frac{3m}{2} (a_{12}y_1^2 + 6a_{03}z_1y_1 + 3b_{03}z_1^2) = 0 \quad (2.56)$$

En utilisant l'expression de B , on a :

$$\frac{3mBy_1}{2z_1} = 0 \quad (2.57)$$

Comme on a vu précédemment, B ne peut pas s'annuler pour éviter à \mathcal{K} d'être négatif pour les petits r . Cela implique directement que $\tilde{y}_2 = 0$ et de même pour \tilde{z}_2 . Ainsi, la contribution non linéaire pour y et z autour de 0 sera d'ordre r et non d'ordre 1.

2.5.4 Vitesse du son radiale autour de $r = 0$

Comme on vient de la voir, on a dans ce régime un développement perturbatif :

$$y(r) = \frac{y_1}{r} + y_2r + O(r^2) \quad (2.58)$$

$$z(r) = \frac{z_1}{r} + z_2r + O(r^2) \quad (2.59)$$

Et on a aussi :

$$\Sigma_3 = \frac{1}{r^2}\Sigma_3^{(l)} + \Sigma_3^{(nl)} + O(r^2) \quad (2.60)$$

Où les matrices $\Sigma_3^{(\dots)}$ sont indépendantes de r . on peut facilement vérifier que dans ce cas, la matrice M s'écrit :

$$M = Id - 2r^2(\Sigma_3^{(l)})^{-1}\Sigma_3^{(nl)} + O(r^4) \quad (2.61)$$

Comme on connaît déjà une forme simple pour $\Sigma_3^{(l)}$, on cherche à obtenir une forme tout aussi simple pour $\Sigma_3^{(nl)}$. A ce stade, on sait que cette matrice va dépendre de y_1 et de z_1 mais aussi de y_2 et z_2 dont les expressions sont assez complexes. Comme dans la première partie, on va devoir utiliser les équations du mouvement qui sont ici :

$$a_{30}y_1^3 + a_{21}y_1^2z_1 + a_{12}y_1z_1^2 + a_{03}z_1^3 = \frac{m}{2} \quad (2.62)$$

$$\frac{a_{21}}{3}y_1^3 + a_{12}y_1^2z_1 + 3a_{03}y_1z_1^2 + b_{03}z_1^3 = 0 \quad (2.63)$$

$$a_{10}y_1 + 6a_{30}y_1^2\tilde{y}_2 + a_{01}z_1 + 4a_{21}y_1\tilde{y}_2z_1 + 2a_{12}\tilde{y}_2z_1^2 + 2a_{21}y_1^2\tilde{z}_2 + 4a_{12}y_1z_1\tilde{z}_2 + 6a_{03}z_1^2\tilde{z}_2 = 0 \quad (2.64)$$

$$a_{01}y_1 + 2a_{21}y_1^2\tilde{y}_2 + b_{01}z_1 + 4a_{12}y_1\tilde{y}_2z_1 + 6a_{03}\tilde{y}_2z_1^2 + 2a_{12}y_1^2\tilde{z}_2 + 12a_{03}y_1z_1\tilde{z}_2 + 6b_{03}z_1^2\tilde{z}_2 = 0 \quad (2.65)$$

En utilisant ces équations, $\Sigma_3^{(nl)}$ est simplifiée et on obtient :

$$\Sigma_3^{(nl)} = \begin{pmatrix} -a_{10} - a_{01}\frac{z_1}{y_1} - 2\beta\frac{z_1}{y_1} & 2\beta \\ 2\beta & -b_{01} - a_{01}\frac{y_1}{z_1} - 2\beta\frac{y_1}{z_1} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Où on a introduit

$$\beta = a_{21}y_1y_2 + a_{12}y_2z_1 + a_{12}y_1z_2 + 3a_{03}z_1z_2 \quad (2.67)$$

Or z_2 et y_2 peuvent être exprimés avec z_1 , y_1 , B et les $(a, b)_{ij}$. Cela nous permet de calculer la vitesse radiale qui peut alors être exprimée selon :

$$c_{s\pm}^2 = 1 + r^2(a' \pm \sqrt{b'}) + o(r^2) \quad (2.68)$$

Où a' et b' sont des coefficients qui dépendent de y_1 , z_1 , B , m et $(a, b)_{ij}$. les conditions pour obtenir des modes sous-luminaux sont alors :

$$a' < 0 \quad (2.69)$$

$$b' > 0 \quad (2.70)$$

$$a'^2 - b' > 0 \quad (2.71)$$

On donne maintenant l'expression de ces coefficients⁸

$$a' = \frac{-6bmy_1 + 2a_{10}By_1^2 - 3b_{01}mz_1 + 2Bb_{01}z_1^2 + a_{01}y_1(-3m + 4Bz_1)}{3Bmy_1} \quad (2.72)$$

$$a'^2 - b' = -\frac{8r^4(a_{10}(a_{01} + 2\beta)y_1^2 + (a_{01}^2 + 4a_{01}\beta + a_{10}b_{01})y_1z_1 + (a_{01} + 2\beta)b_{01}z_1^2)}{3Bmy_1} \quad (2.73)$$

On doit alors avoir $a'^2 - b' > 0$. Cela implique que $\beta + U$ est du même signe que z_1 , où

$$U = \frac{(a_{10}y_1 + a_{01}z_1)(a_{01}y_1 + b_{01}z_1)}{2(a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2)} \quad (2.74)$$

Sachant cela, on cherche à savoir si $a' < 0$. Si c'est le cas, cela signifie que les deux modes sont sous luminux. $a' < 0$ implique que $2B(a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2) - 3m(a_{01}y_1 + 2\beta y_1 + b_{01}z_1)$ est du même signe que z_1 .

Supposons par exemple que $z_1 > 0$

On doit alors avoir :

$$\frac{2B}{3m} - \frac{a_{01}y_1 + 2\beta y_1 + b_{01}z_1}{2(a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2)} > 0 \quad (2.75)$$

Mais comme $B/z_1 < 0$ on a : $B < 0$ et ainsi, en utilisant le fait que $a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2 > 0$ (voir Annexe A), on a :

$$a_{01}y_1 + 2\beta y_1 + b_{01}z_1 < 0 \quad (2.76)$$

$$\Rightarrow \beta < -\frac{1}{2}(a_{01} + b_{01}\frac{z_1}{y_1}) \quad (2.77)$$

On doit ensuite combiner (2.77) avec $\beta > -U$. On a évidemment :

$$-U < \beta < -\frac{1}{2}(a_{01} + b_{01}\frac{z_1}{y_1}) \quad (2.78)$$

8. l'expression de b' est trop grande et on peut vérifier qu'il est toujours positif

Ce qui est possible si et seulement si :

$$\frac{1}{2}(a_{01} + b_{01}\frac{z_1}{y_1}) < U \quad (2.79)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_{01} + b_{01}\frac{z_1}{y_1}) < \frac{(a_{10}y_1 + a_{01}z_1)(a_{01}y_1 + b_{01}z_1)}{2(a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2)} \quad (2.80)$$

$$\Leftrightarrow 0 < -\frac{z_1(a_{01}y_1 + b_{01}z_1)^2}{a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2} \quad (2.81)$$

$$\Leftrightarrow z_1 < 0 \quad (2.82)$$

Or on a supposé que $z_1 > 0$. On peut aussi vérifier que la contradiction est strictement similaire dans le cas $z_1 < 0$. On en déduit alors **qu'on ne peut avoir simultanément $a' < 0$ et $a'^2 - b' > 0$** . Cela implique directement **qu'il existe toujours un mode sur-luminal autour de 0!**

2.5.5 Vitesse du son ortho-radiale

La vitesse du son ortho-radiale est donné par les valeurs propres de la matrice

$$M_\theta = K^{-1}V = K^{-1}(\Sigma_1 + 2\Sigma_3 + r\partial_r\Sigma_3) \quad (2.83)$$

Mais comme $\Sigma_3 = 1/r^2\Sigma_3^{(l)} + \Sigma_3^{(nl)} + O(r^2)$, on a

$$M_\theta = \frac{r^2}{2}(\Sigma_3^{(l)})^{-1}(\Sigma_1 + 2\Sigma_3^{(nl)}) + o(r^2) \quad (2.84)$$

On est alors assuré que $c_\theta^2(0) = 0$ et il n'y a donc pas de problème de surluminalité autour de 0 mais on risque de retrouver des problèmes d'émission Cherenkov trop forte.

Conclusion

Nous avons donc réussi à mettre en évidence des problèmes théoriques forts dans des modèles à deux Galiléons. La plupart des raisonnements erronés de [3] le sont à cause d'approximations excessives et injustifiées. Elles négligent les contraintes réelles du système issues des équations du mouvement. Il semblerait que cette conclusion puisse s'appliquer aux modèles à plus de deux Galiléons, justifiant ainsi qu'ils ne représentent pas une issue adéquate aux difficultés rencontrées dans les modèles de gravité massive avec Galiléons. Il reste cependant des possibilités pour dépasser ces problèmes, notamment la prise en compte de la dépendance temporelle et de modèles physiques plus réalistes (masse non ponctuelle, dynamique, etc.).

Annexes

A - signe de $a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2$

On introduit $\gamma = \frac{y_1}{z_1}$ et on s'intéresse au signe de :

$$f(\gamma) = a_{10}\gamma^2 + 2a_{01}\gamma + b_{01} \quad (2.85)$$

Comme on sait que $a_{10} > 0$, on sait que pour γ très grand (en norme), $f(\gamma)$ sera positif. Cependant, il peut exister un domaine où f est négative. Ce domaine correspond à l'intervalle entre les deux racines de f . Or, le discriminant de l'équation $f(\gamma) = 0$ est :

$$\Delta = (2a_{01})^2 - 4a_{10}b_{01} = 4(a_{01}^2 - a_{10}b_{01}) \quad (2.86)$$

D'après l'équation (2.22) cette quantité est strictement négative. Il n'y a donc pas de racines et donc on a :

$$a_{10}y_1^2 + 2a_{01}z_1y_1 + b_{01}z_1^2 > 0 \quad (2.87)$$

Bibliographie

- [1] Enrico Trincherini Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi. The galileon as a local modification of gravity. 2009.
- [2] Paul M.Saffin Antonio Padilla and Shuang-Yong Zhou. Bi-galileon theory i : motivation and formulation. January 2011.
- [3] Paul M.Saffin Antonio Padilla and Shuang-Yong Zhou. Bi-galileon theory ii : phenomenology. January 2011.
- [4] Gregory Gabadadze Claudia de Rham and Andrew J. Tolley. Resummation of massive gravity. November 2009.
- [5] R. Ziourc E. Babichev, C. Deffayetc. The recovery of general relativity in massive gravity via the vainshtein mechanism. 2010.
- [6] Solomon Endlich and Junpu Wang. Classical stability of the galileon. 2011.
- [7] G.R. Dvali et al. 4d gravity on a brane in 5d minkowski. 2009.
- [8] Y. Iwasak. *Phys. Rev. D* 2, 1970.
- [9] Gianmassimo Tasinato Kazuya Koyama, Gustavo Niz. Analytic solutions in non-linear massive gravity. March 2011.
- [10] Massimo Porratis Kurt Hinterbichler, Alberto Nicolis. Superluminality in dgp. 2009.
- [11] Jorge L.Cervantyes-Cota and Geor ge Smoot. *Cosmology today-A brief review*.
- [12] Alberto Nicolis and Riccardo Rattazzi. Classical and quantum consistency of the dgp model. April 2004.
- [13] Massimo Porrati and Matthew M.Roberts. Ghosts of critical gravity. 2011.
- [14] Antonio Padilla Timothy Clifton, Pedro G.Ferreira and Constantinos Skoris. *Modified Gravity and Cosmology*. 2011.
- [15] A. I. Vainshtein. *Phys. Lett. B* 39, 1972.
- [16] H. van Dam and M. J. G. Veltman. *Nucl. Phys. B* 22, 1970.