

Relativité d'Echelle et Espace-Temps Fractal

THEORIE et EXEMPLES d'APPLICATIONS

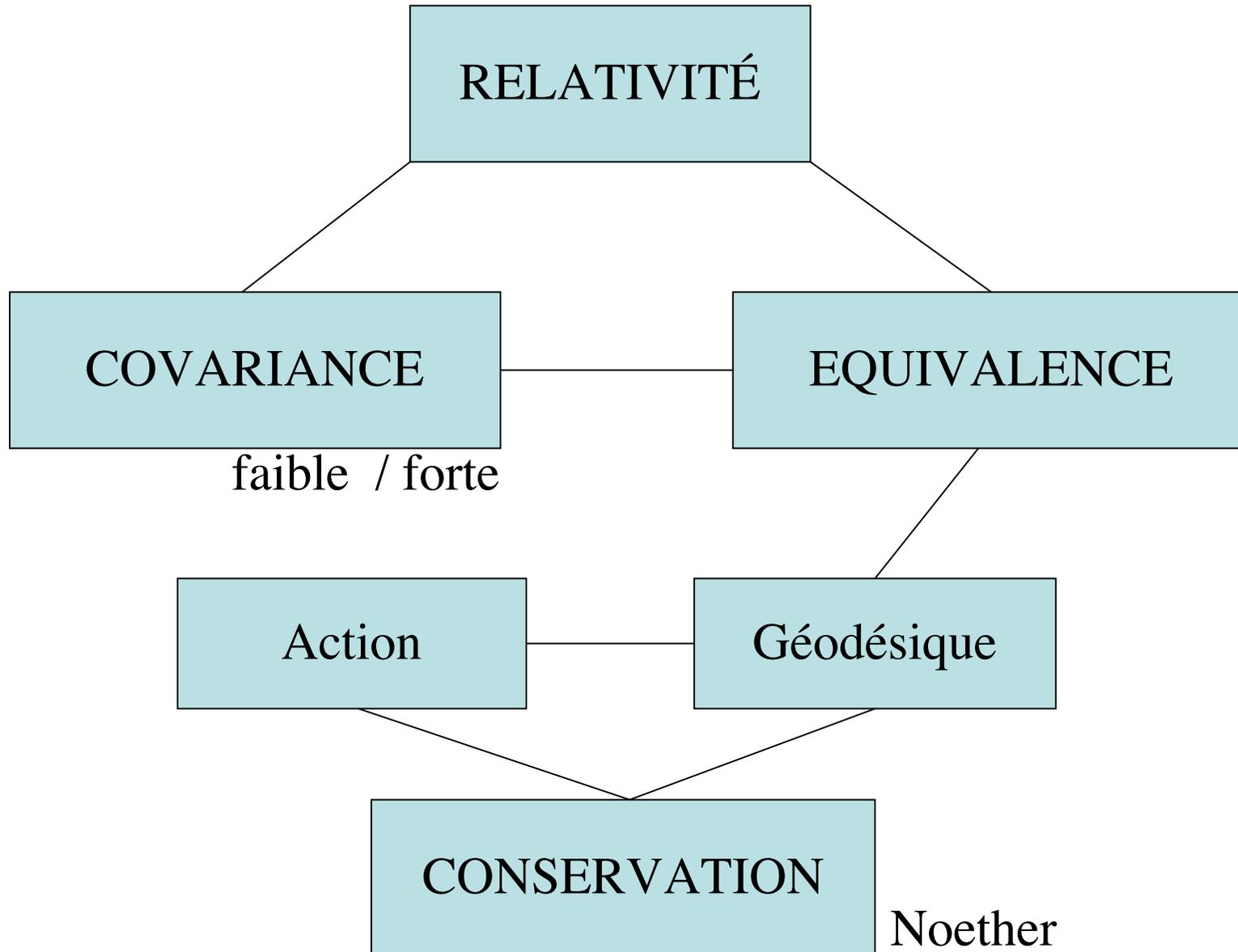
Laurent Nottale

CNRS

LUTH, Observatoire de Paris-Meudon

Références et pdf's : <http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale>

PRINCIPES PREMIERS



RELATIVITÉ D'ÉCHELLE

Continuité +

Abandon de l'hypothèse
de différentiabilité de
l'espace-temps

Généraliser la relativité
du mouvement ?

Transformations de coordonnées
non-différentiables ?

Théorème

Dépendance explicite des
coordonnées en fonction
des variables d'échelle
+ divergence

$$X \rightarrow X(\varepsilon)$$

$$f(X) \rightarrow f[X(\varepsilon), \varepsilon]$$

ESPACE-TEMPS FRACTAL

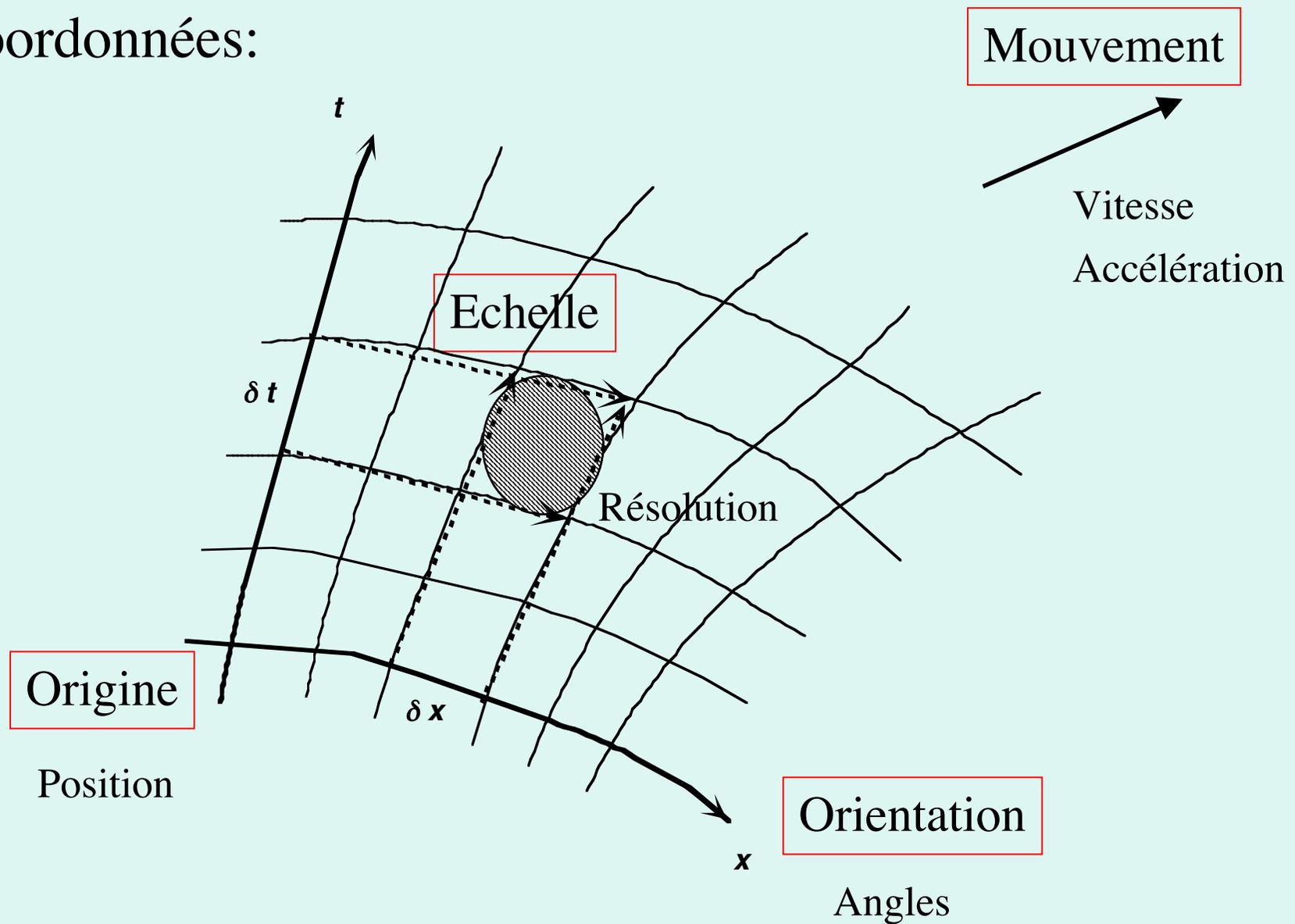
$$\partial/\partial X \quad \partial^2/\partial X^2$$

Compléter les lois de la physique
par des lois d'échelle

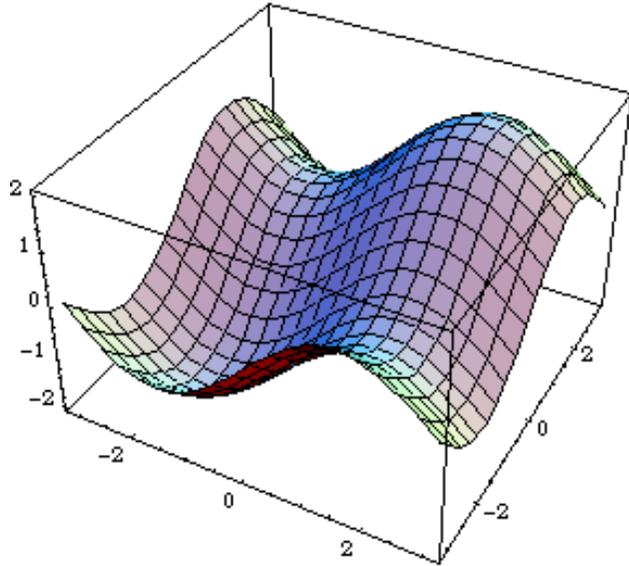
$$\partial/\partial \ln \varepsilon \quad \partial^2/(\partial \ln \varepsilon)^2$$

$$\partial^2/\partial X \partial \ln \varepsilon$$

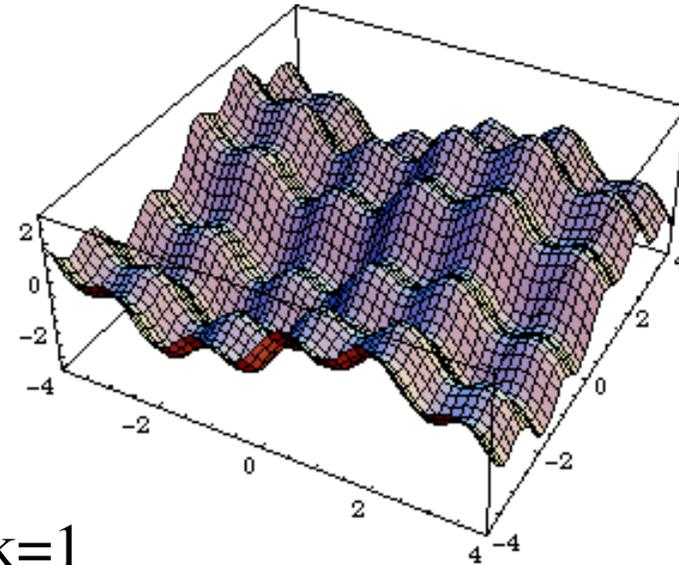
Etat d'un système de coordonnées:



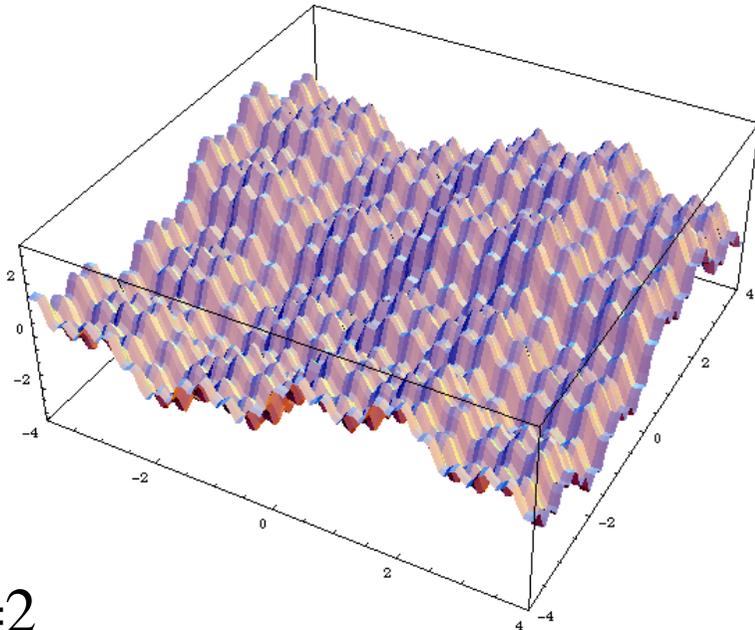
Surface fractale: dépendance d'échelle



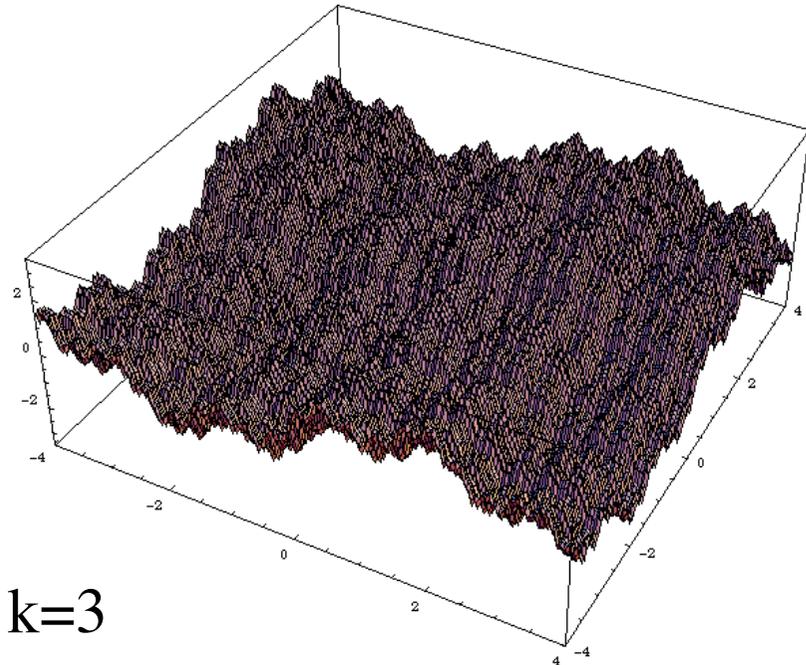
$k=0$



$k=1$

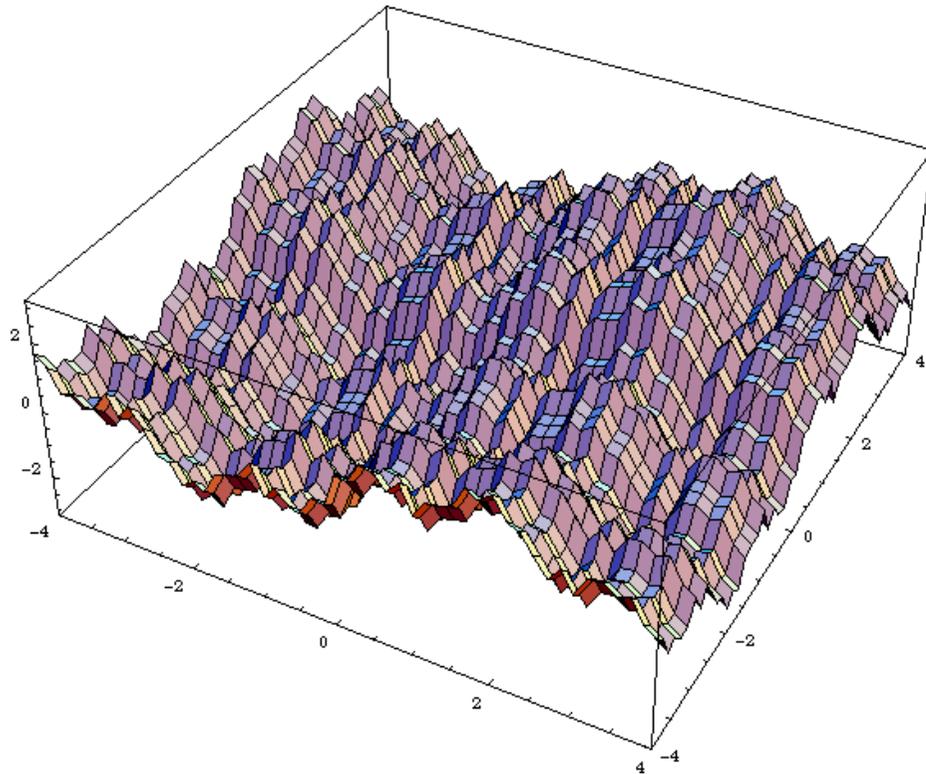


$k=2$

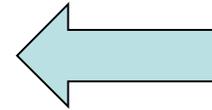


$k=3$

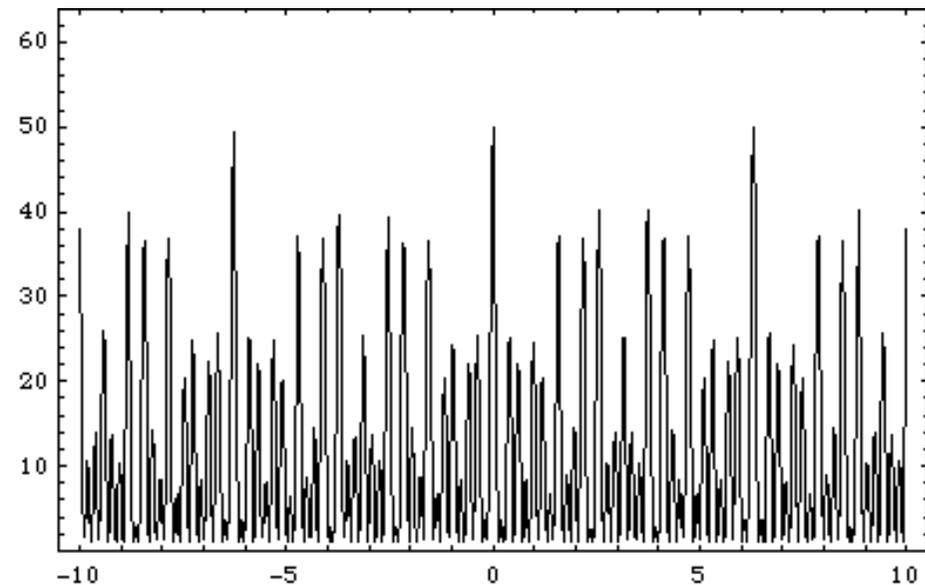
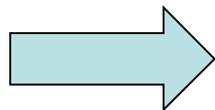
Métrie et courbure d'une surface fractale



Surface (espace
fractal de dimension
topologique 2)



Métrie
(divergente)



Lois de transformation d'échelle

De l'invariance à la covariance d'échelle

Opérateur de dilatation, méthode de Gell-Mann-Levy:

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon d\rho = (1 + \tilde{D} d\rho) \mathcal{L}(\varepsilon),$$

$$\tilde{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}$$

Equation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L})$$

Développement limité:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = a + b\mathcal{L}$$

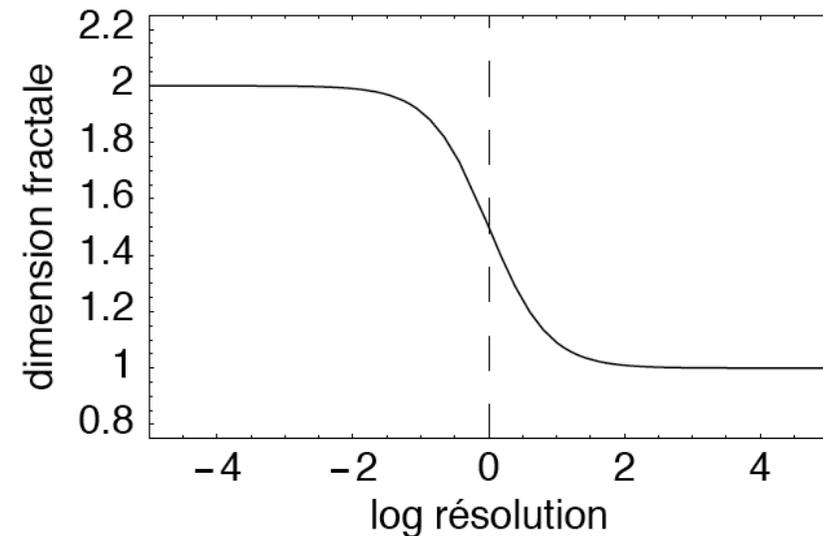
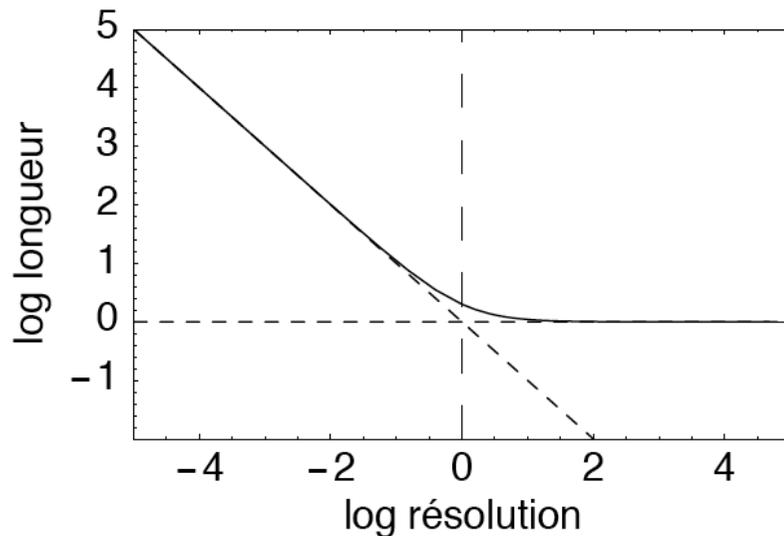
Solution: loi fractale de dimension constante + transition:

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \zeta(x) \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{-b} \right]$$

Une transition fractal/non-fractal

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^\delta \right]$$

$$\delta_{\text{eff}} = \frac{\delta}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} \right)^\delta}$$



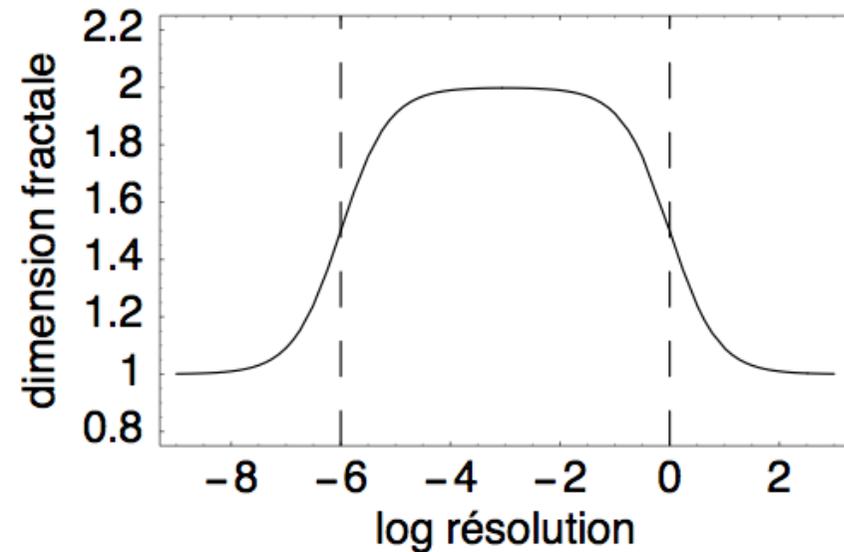
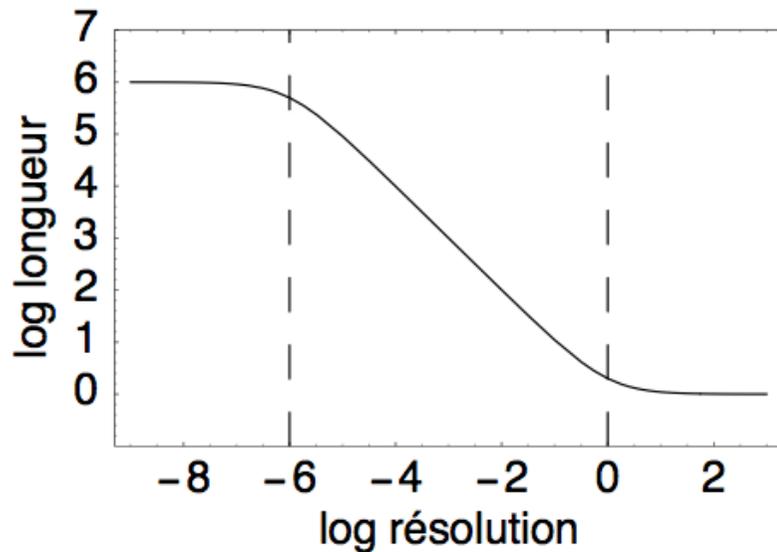
Solution de l'équation différentielle d'échelle:

$$dL/d \ln r = a + b L$$

Deux transitions

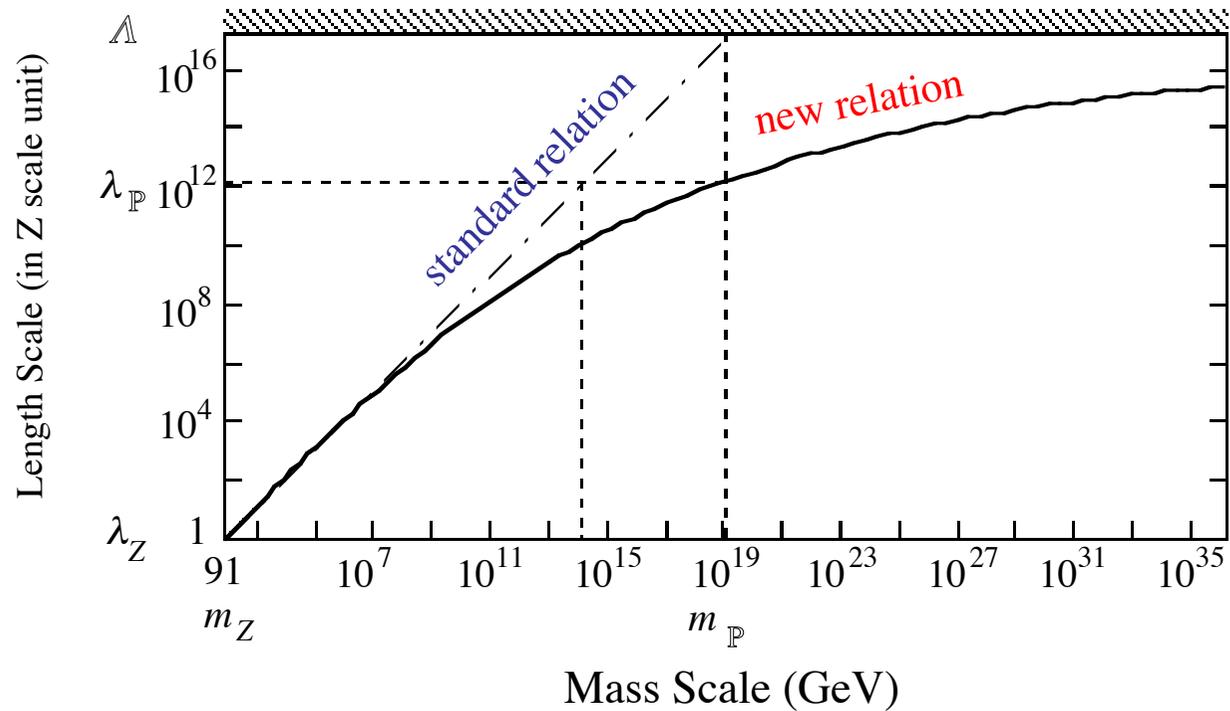
Solution de l'équation différentielle d'échelle:

$$dL/d \ln r = a + b L + c L^2$$



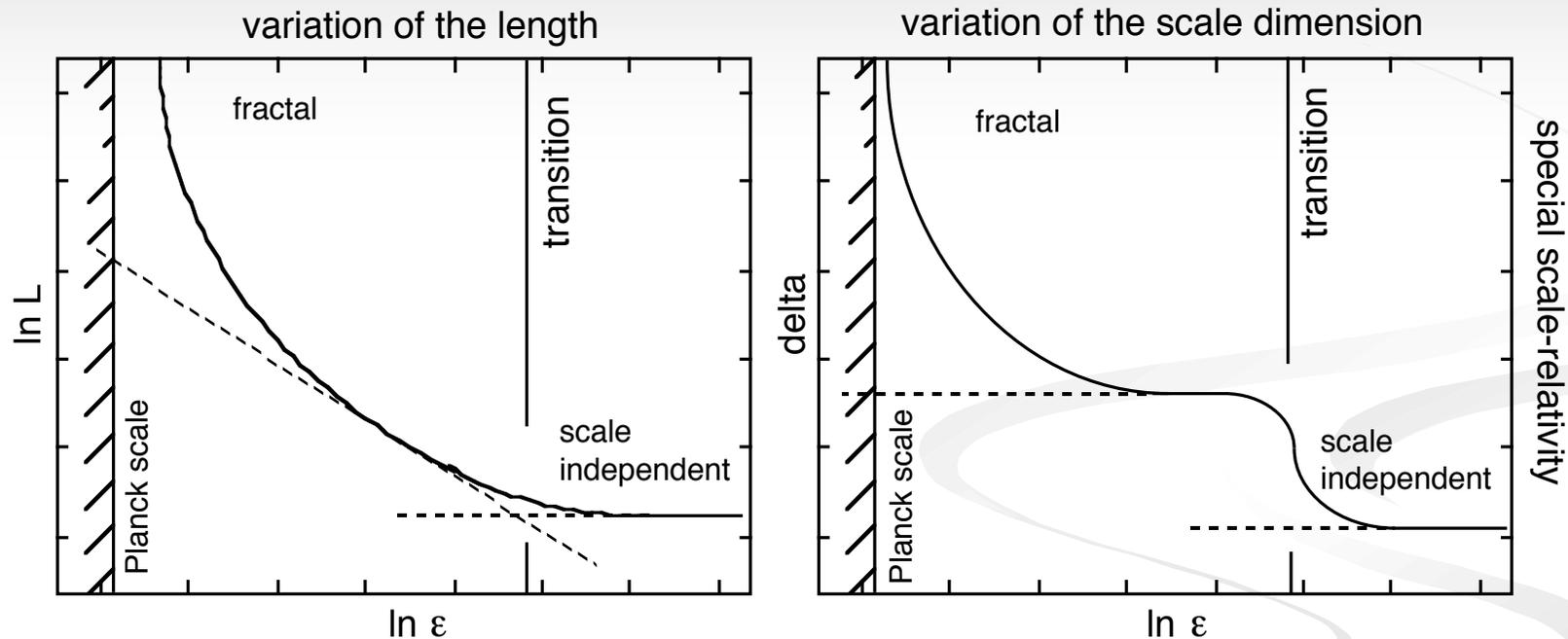
Nouvelle transformation entre échelles de longueur et échelles de masse en relativité d'échelle restreinte

$$\ln \left(\frac{\lambda_Z}{r} \right) = \frac{\ln(m/m_Z)}{\sqrt{1 + \ln^2(m/m_Z) / \ln^2(m_{\mathbb{P}}/m_Z)}}$$



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective en relativité d'échelle restreinte (lois de dilatation log-lorentziennes)

(Cas simplifié : $\mathcal{L}(\lambda_0) = \mathcal{L}_0$)

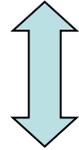


$$\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) = \frac{\delta_0 \ln(\lambda_0/\varepsilon)}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\delta_0}{\sqrt{1 - \ln^2(\lambda_0/\varepsilon)/\ln^2(\lambda_0/\mathbf{\Lambda})}}$$

Dynamique d'échelle: équations

Lois d'échelle solutions d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre dans l'espace des échelles



« djinn » (dimension d'échelle variable) identifié comme un « temps d'échelle» δ

Resolution identifiée comme une « vitesse d'échelle »:

$$\ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) = \frac{d \ln \mathcal{L}}{d\delta}$$

Principe de moindre action dans l'espace des échelles \rightarrow
équations d'échelle d'Euler Lagrange en fonction du « djinn »:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial \ln \mathcal{L}}$$

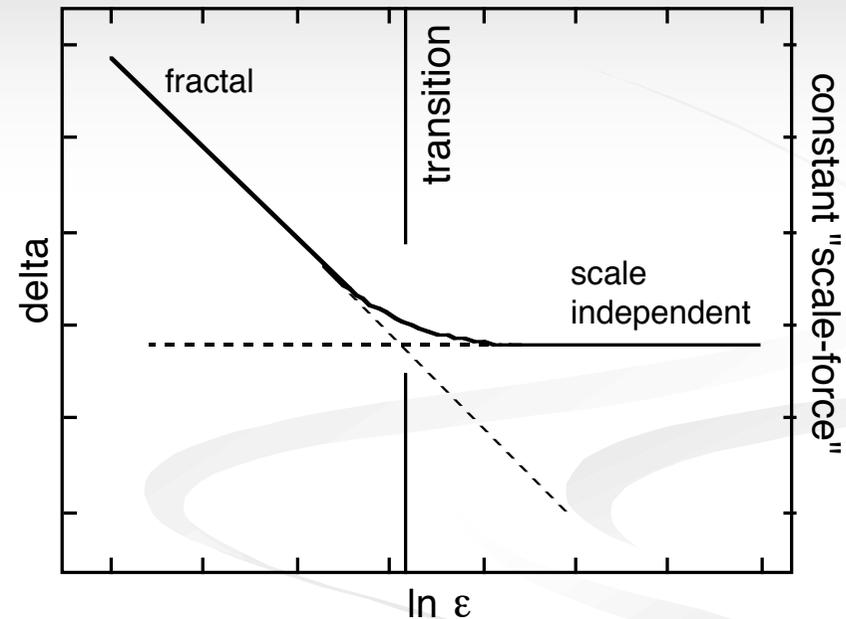
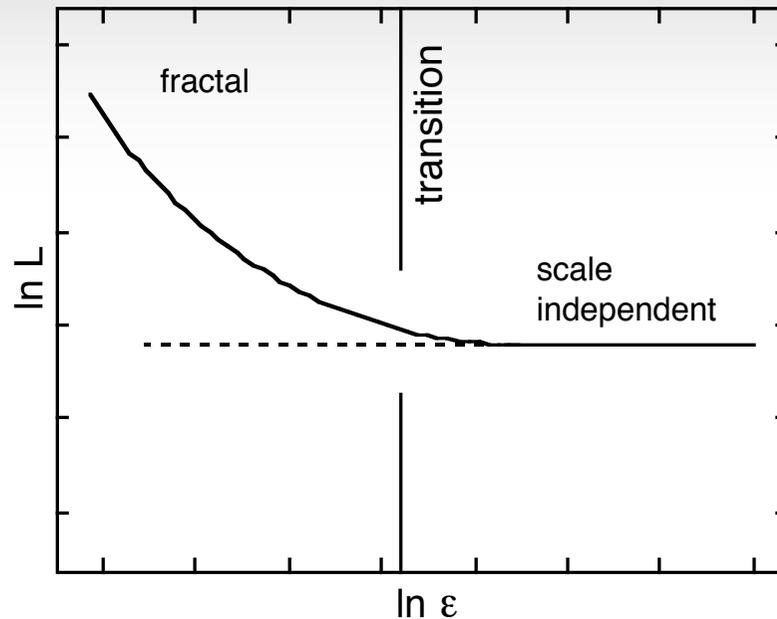
Dynamique d'échelle: force d'échelle constante

$$\ln \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} \right) = \frac{1}{2G} \ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)$$

variation of the length

$$\delta = \frac{1}{G} \ln \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \quad (\text{asymptotique})$$

variation of the scale dimension

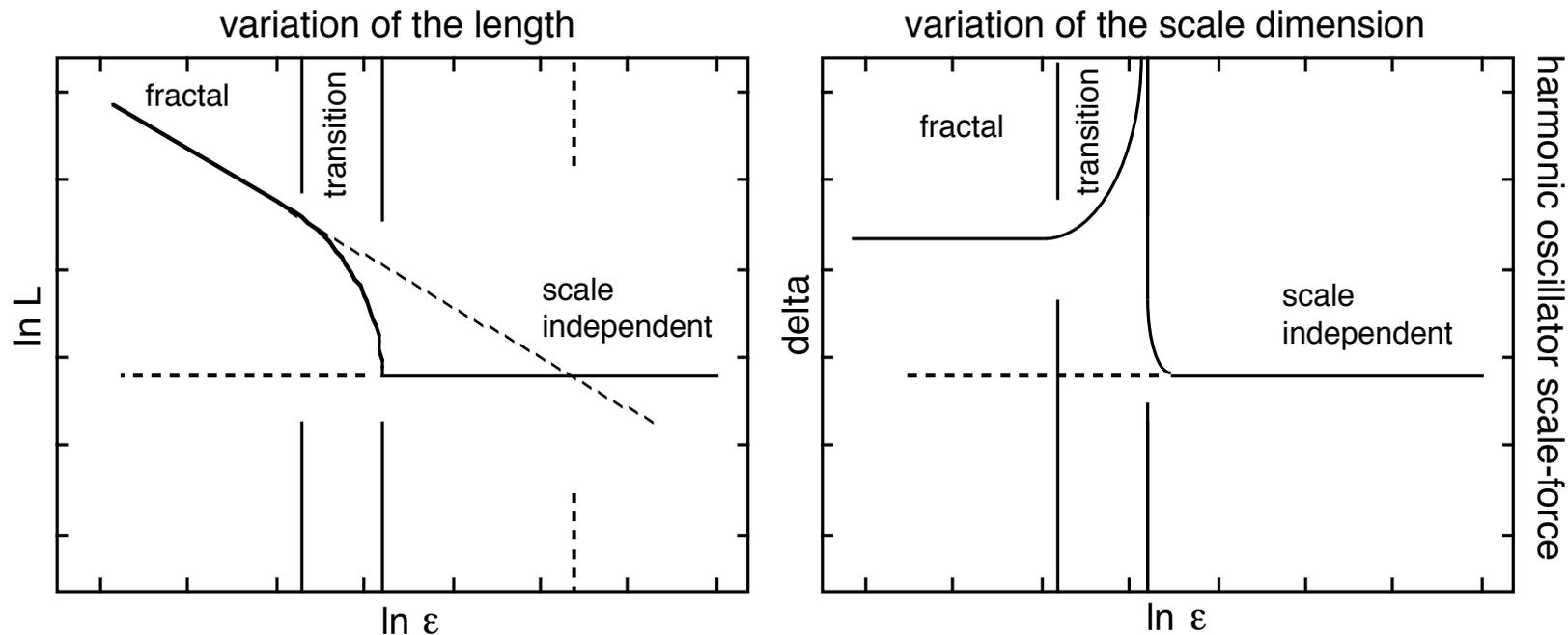


Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'une 'force d'échelle' constante:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2} = G$$

Dynamique d'échelle: oscillateur harmonique

$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta \sqrt{\ln^2 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{\delta^2}}$$



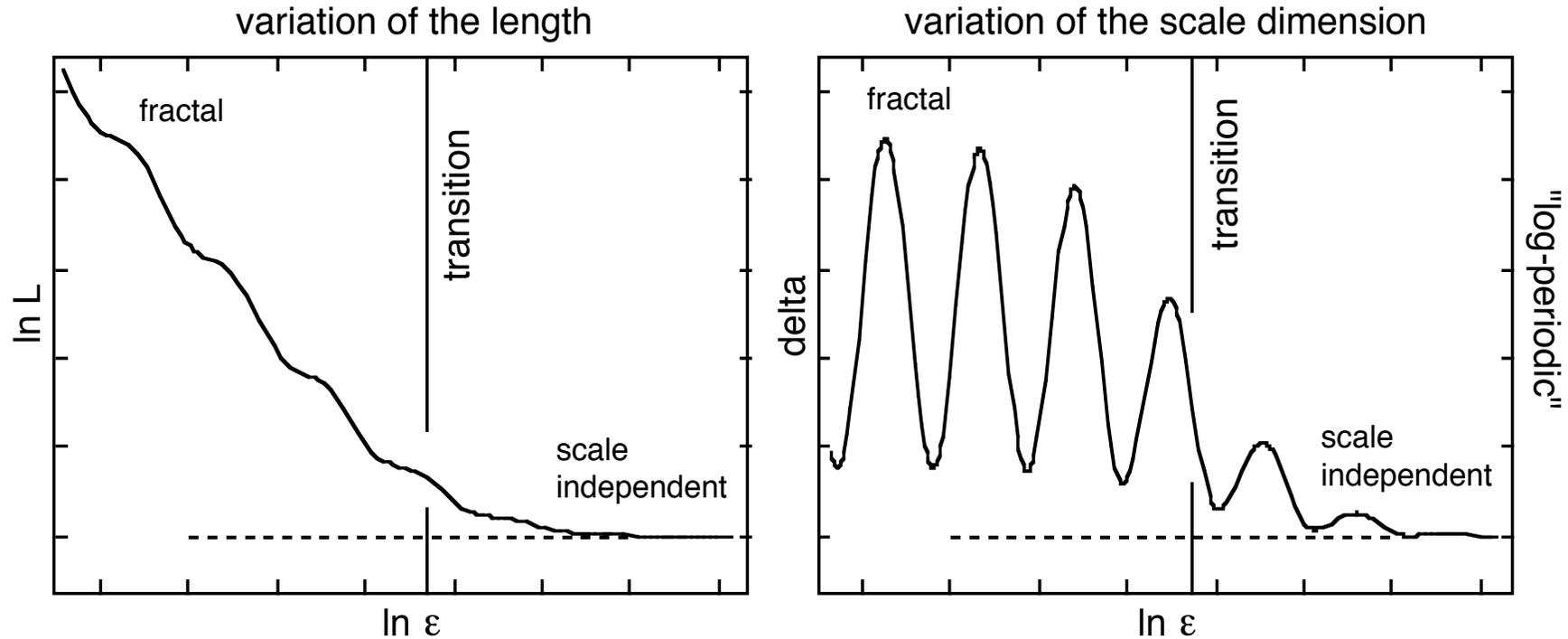
Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un potentiel d'oscillateur harmonique (dans l'espace des échelles)

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d \delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2} \ln \mathcal{L}$$

Loi log-périodique

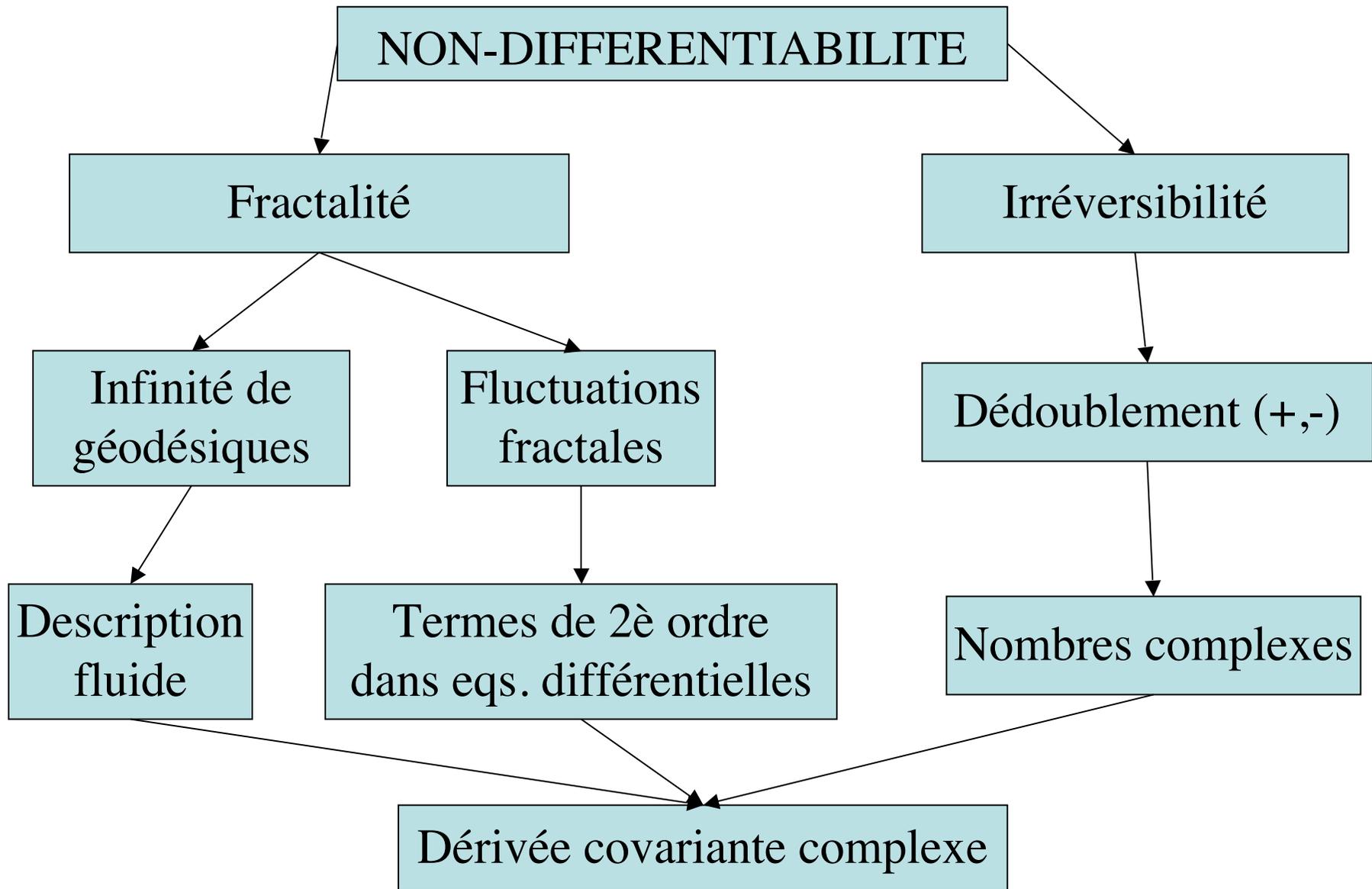
$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{L}_0 \left[1 + (\lambda/\varepsilon)^\nu e^{b \cos(\omega \ln(\varepsilon/\lambda))} \right]$$

(Petites fluctuations)



Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective dans le cas d'un comportement log-périodique (invariance d'échelle discrète, exposant complexe) avec transition fractal / nonfractal.

Equations du mouvement
Géodésiques / Mécanique
Quantique



$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Voie vers Schrödinger : ‘partie classique’ (différentiable) et ‘partie fractale’

Loi d'échelle minimale (en fonction de la résolution spatiale):

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(x) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^\delta \right] \quad (\varepsilon_x / \lambda)^{D_F} = (\varepsilon_t / \lambda)$$

Version différentielle (en fonction de la résolution temporelle):

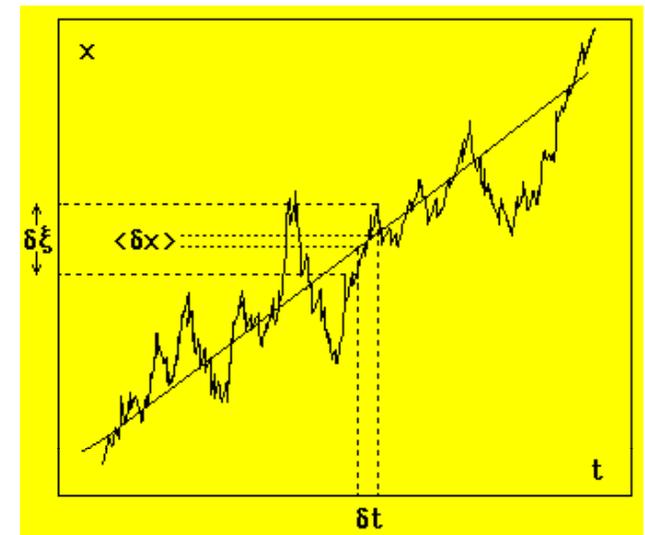
$$dX = dx + d\xi \quad \langle \eta \rangle = 0$$

$$dx = v dt \quad \langle \eta^2 \rangle = 1$$

$$d\xi = \eta \sqrt{2\mathcal{D}} (dt^2)^{1/2 D_F}$$

Cas de la dimension fractale critique $D_F = 2$:

$$d\xi = \eta \sqrt{2\mathcal{D}} dt^{1/2}$$



Voie vers Schrödinger : non-différentiabilité \longrightarrow complexes

Définition ordinaire de la dérivée:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - dt)}{dt}$$

N'EXISTE PLUS (non-différentiabilité) ! \longrightarrow nouvelle définition:

$f(t, dt)$ = fonction fractale:

fonction explicite de dt , variable d'échelle (« résolution »)

$$f'_+(t, dt) = \frac{f(t + dt, dt) - f(t, dt)}{dt} \qquad f'_-(t, dt) = \frac{f(t, dt) - f(t - dt, dt)}{dt}$$

Deux définitions au lieu d'une: on passe de l'une à l'autre
par la réflexion $dt \longleftrightarrow -dt$

$$\left. \begin{aligned} dX_+(t) &= v_+ dt + d\xi_+(t) \\ dX_-(t) &= v_- dt + d\xi_-(t) \end{aligned} \right| \mathcal{V} = \frac{v_+ + v_-}{2} - i \frac{v_+ - v_-}{2} \quad 20$$

Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{d'}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d_+}{dt} + \frac{d_-}{dt} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{d_+}{dt} - \frac{d_-}{dt} \right)$$

Partie
Classique
(différentiable)

$$\mathcal{V} = \frac{d'}{dt}x(t) = V - iU = \frac{v_+ + v_-}{2} - i \frac{v_+ - v_-}{2}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dX_i}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dX_i dX_j}{dt}$$

$$\left\langle \frac{dX_i}{dt} \right\rangle = \frac{dx_i}{dt} \quad \left\langle \frac{dX_i dX_j}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\xi_i d\xi_j}{dt} \right\rangle = 2\mathcal{D} \delta_{ij}$$

$$\frac{d_{\pm} f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{\pm} \cdot \nabla \pm \mathcal{D} \Delta \right) f$$

$$\boxed{\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D} \Delta}$$

Amélioration de la covariance « quantique »

On introduit l'opérateur de vitesse complexe:

$$\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} - i\mathcal{D}\nabla$$

En terme de cet opérateur, la dérivée covariante-quantique s'écrit:

$$\frac{\hat{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{V}} \cdot \nabla$$

Elle satisfait alors à la règle de Leibniz *du premier ordre* pour les dérivées partielles et la composition de fonction.

Hamiltonien:

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{V}} \cdot \mathcal{P} - \mathcal{L}$$

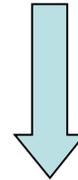
RELATIVITE D'ECHELLE → MECANIQUE QUANTIQUE

Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Equation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d'\mathcal{V}}{dt} = -\nabla\phi$$

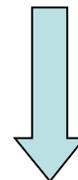


Changement de variables (S = action complexe) et intégration

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \mathcal{V}, t) dt \quad \psi = e^{iS/2m\mathcal{D}}$$

Equation de Schrödinger généralisée

$$\mathcal{D}^2 \Delta\psi + i\mathcal{D} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\phi\psi = 0$$



Newton

$$m \frac{d}{dt} \mathcal{V} = -\nabla \Phi$$

$$\mathcal{V} = \nabla \mathcal{S} / m$$

$$\psi = e^{i\mathcal{S}/\mathcal{S}_0}$$

$$i\mathcal{S}_0 \frac{d}{dt} (\nabla \ln \psi) = \nabla \Phi$$

$$\mathcal{V} = -i \frac{\mathcal{S}_0}{m} \nabla (\ln \psi)$$

$$\nabla \Phi = i\mathcal{S}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta \right) (\nabla \ln \psi)$$

$$\nabla \Phi = i\mathcal{S}_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla \ln \psi - i \left\{ \frac{\mathcal{S}_0}{m} (\nabla \ln \psi \cdot \nabla) (\nabla \ln \psi) + \mathcal{D}\Delta (\nabla \ln \psi) \right\} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V} = -2\mathcal{D}\nabla \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} \ln \psi + \mathcal{D} \frac{\Delta \psi}{\psi} \right\} = -\nabla \Phi / m$$

$$\mathcal{D}^2 \Delta \psi + i\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\Phi}{2m} \psi = 0$$

$$\mathcal{S}_0 = 2m\mathcal{D}$$

Schrödinger

$$H\psi = i 2m\mathcal{D} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Trois représentations

Géodésique (U, V)

$$\frac{dV}{dt} = -\nabla \left(\frac{\phi}{m} \right)$$

Schrödinger généralisé (P, θ)

$$\mathcal{D}^2 \Delta \psi + i\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\phi}{2m} \psi$$

Euler + continuité (P, V)

$$m \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla \right) V = -\nabla(\phi + Q)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div}(PV) = 0$$

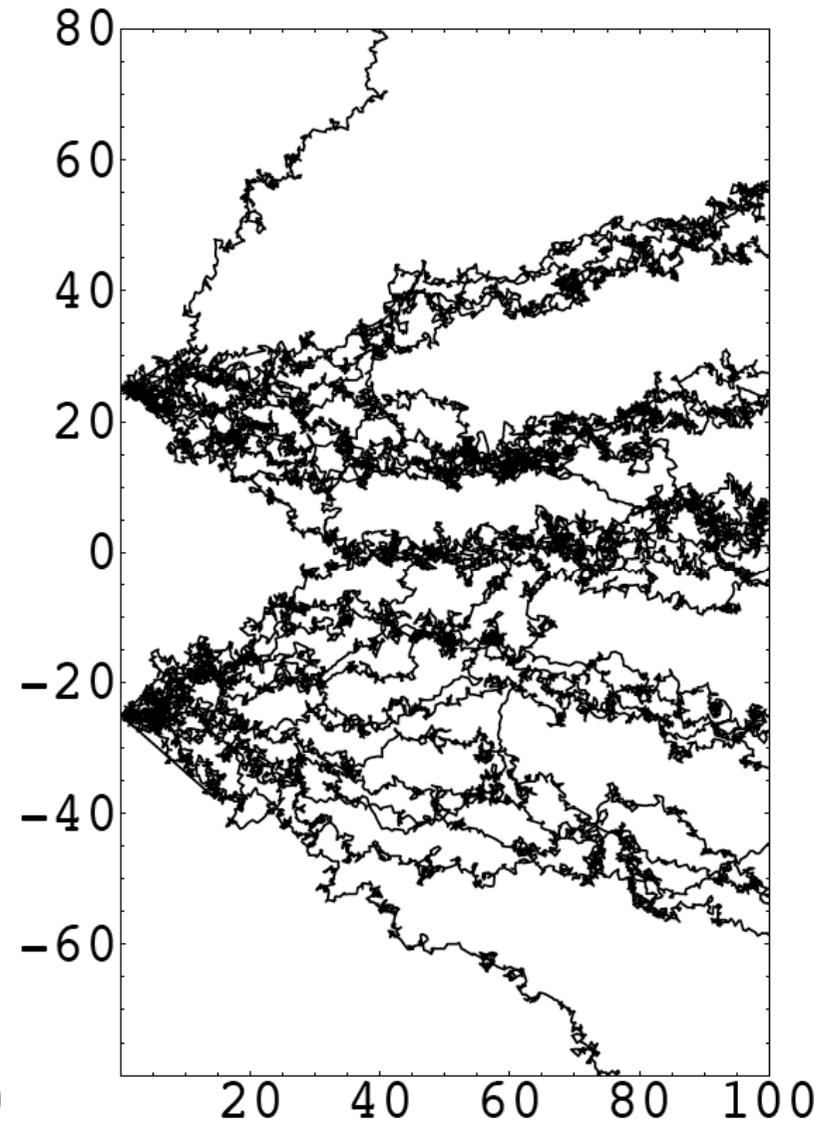
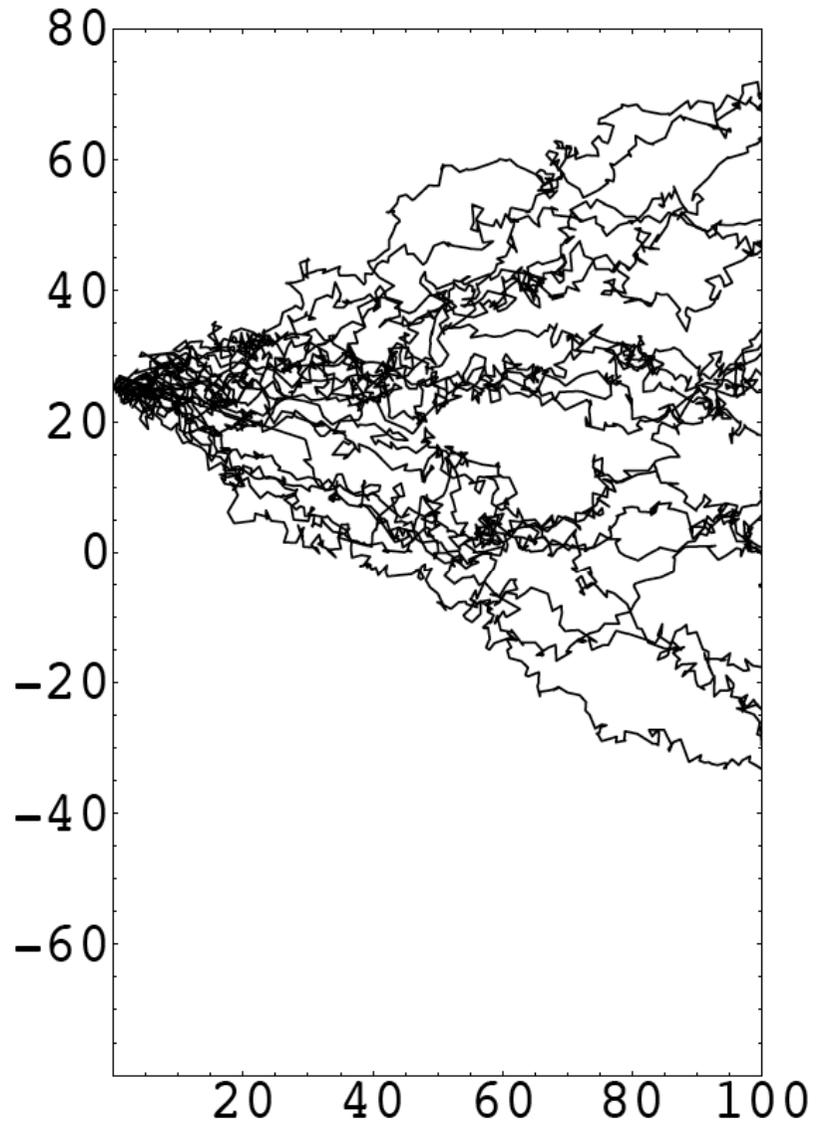
→ Born:
 $P = |\psi|^2$

Nouvelle énergie “potentielle”:

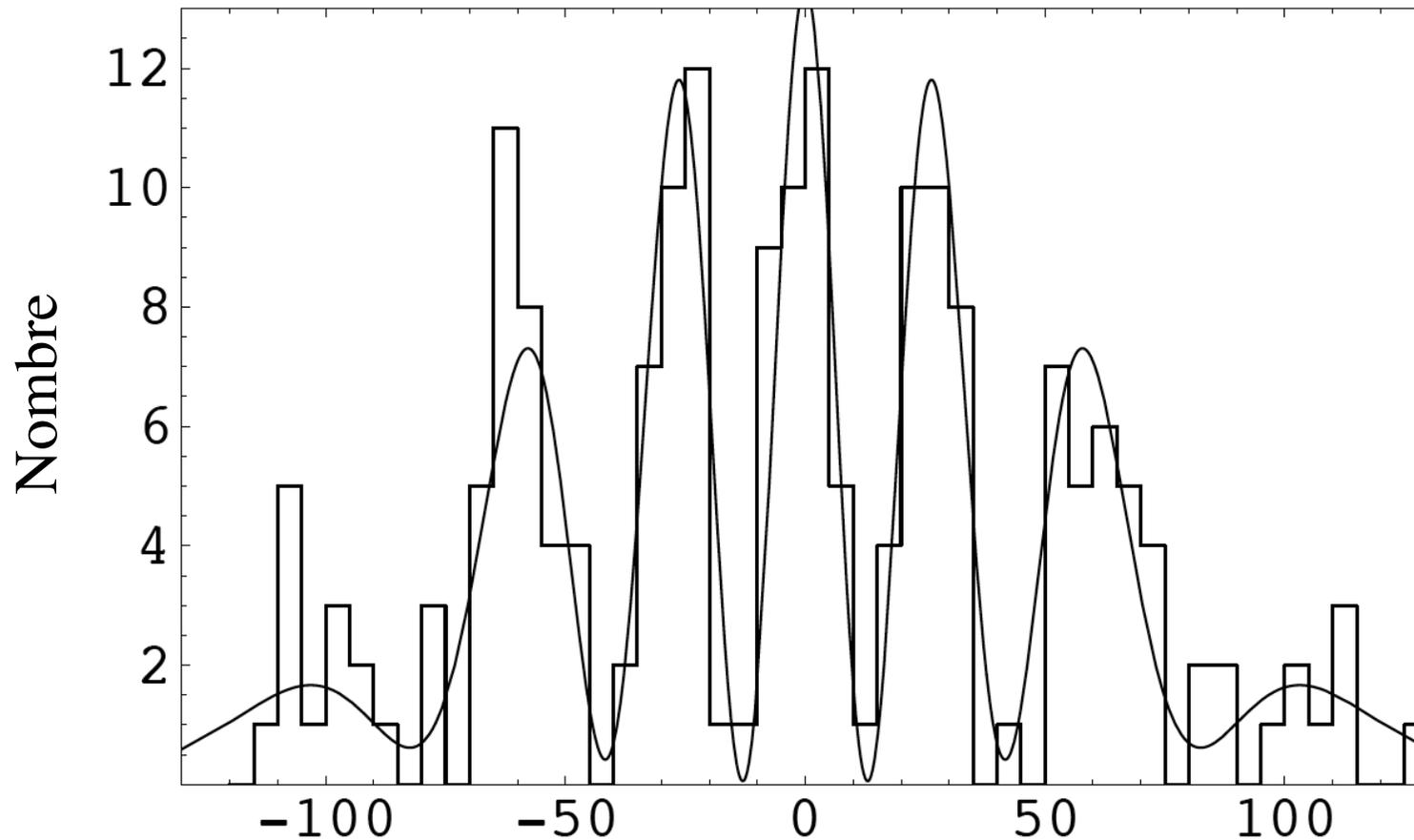
$$Q = -2m\mathcal{D}^2 \frac{\Delta \sqrt{P}}{\sqrt{P}}$$

Simulation de géodésiques fractale

Expérience de fentes d'Young



Expérience de fentes d'Young: 2 fentes



Simulation faible nombre de géodésiques. Comparaison à la prédiction quantique

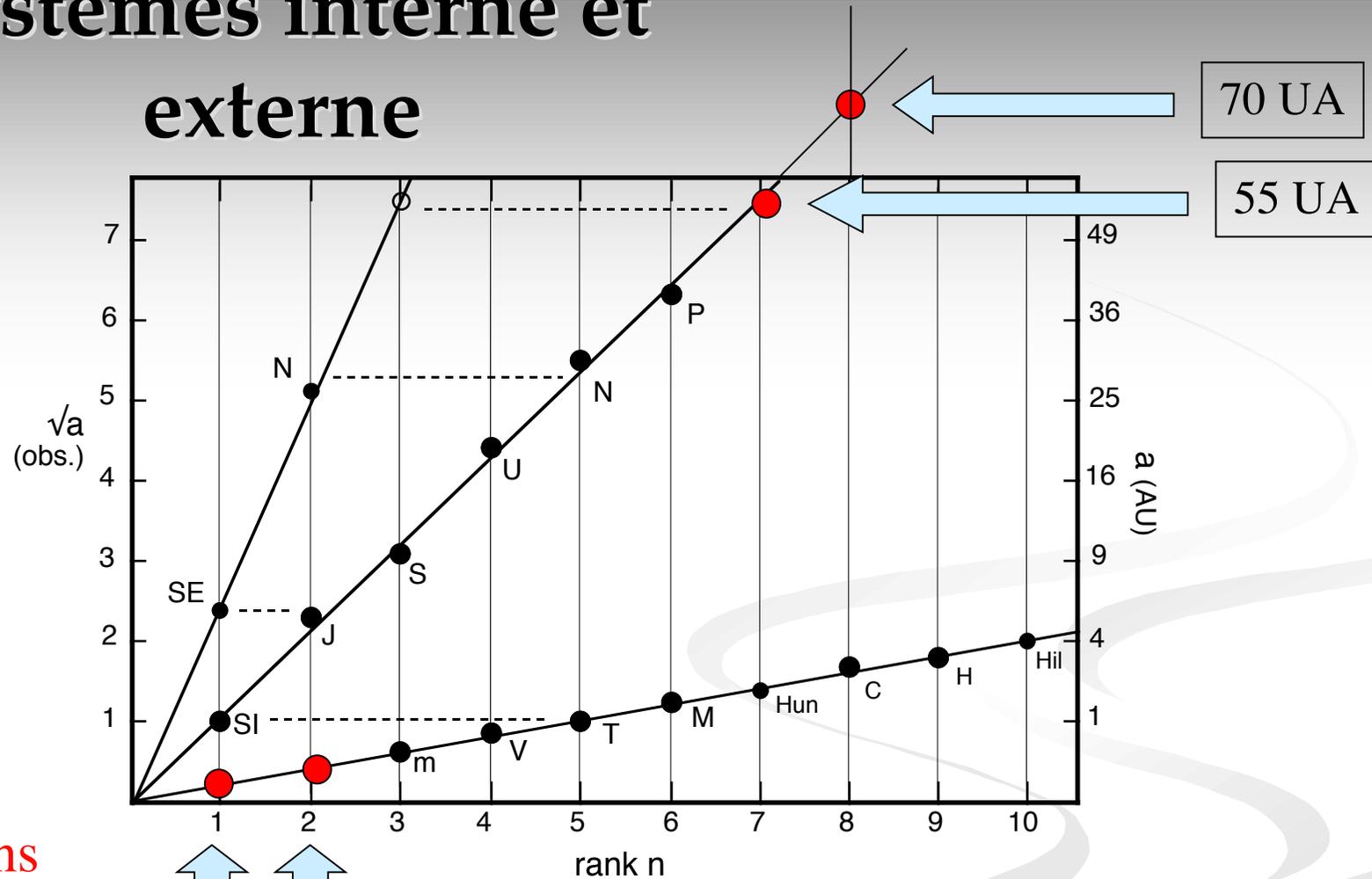
Exemples d'applications

<http://www.luth.obspm.fr/~luthier/nottale/>

Astrophysique : planétologie

Systeme solaire : systemes interne et externe

--> Kuiper belt



70 UA

55 UA

Predictions
(1992)

0.043 UA/M_{sol}

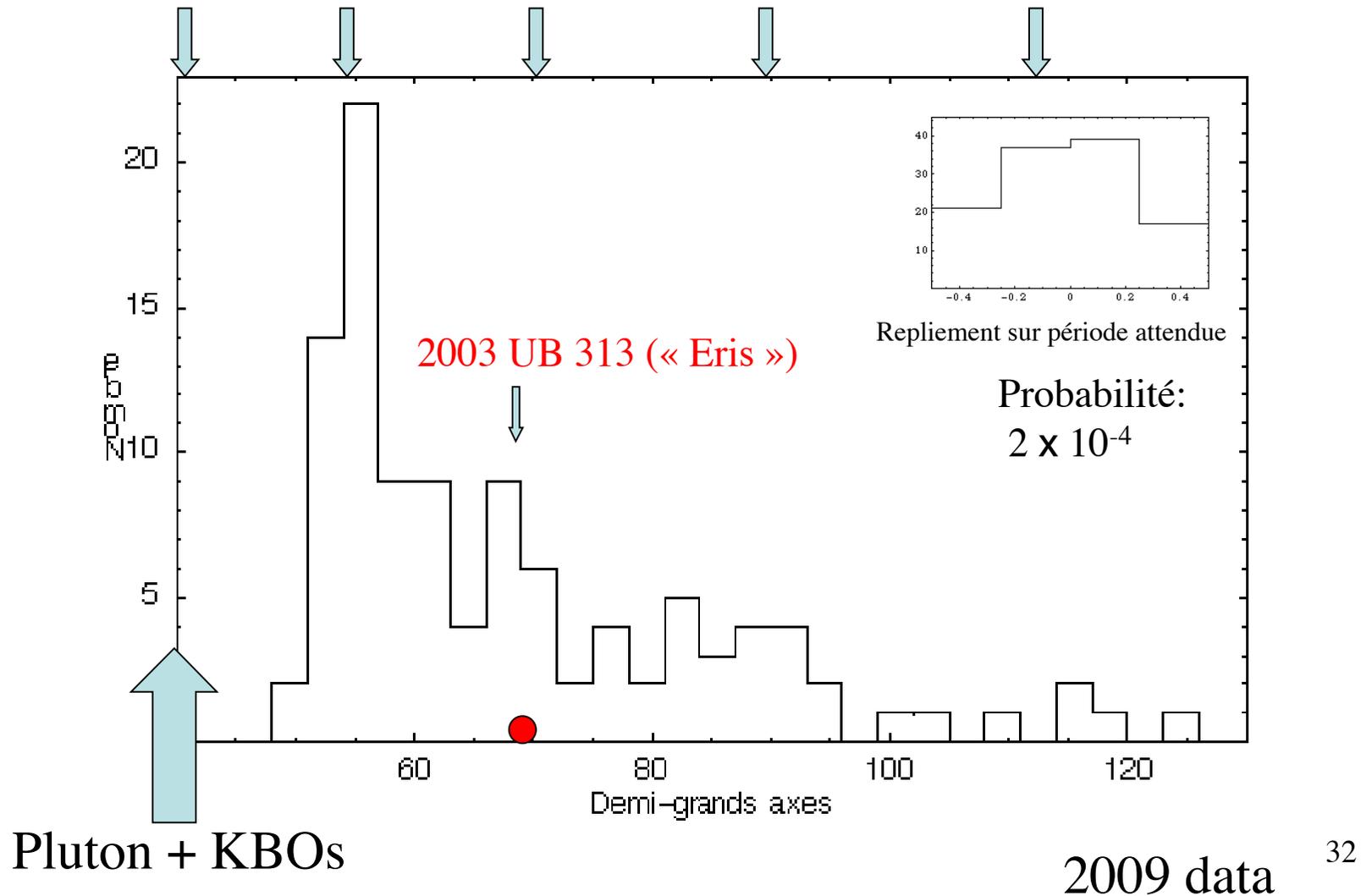
0.17 UA/M_{sol}

--> Exoplanètes

Ref: Nottale 1993, Fractal Space-Time and Microphysics (World Scientific)

Outer Solar System: Kuiper belt (SKBOs)

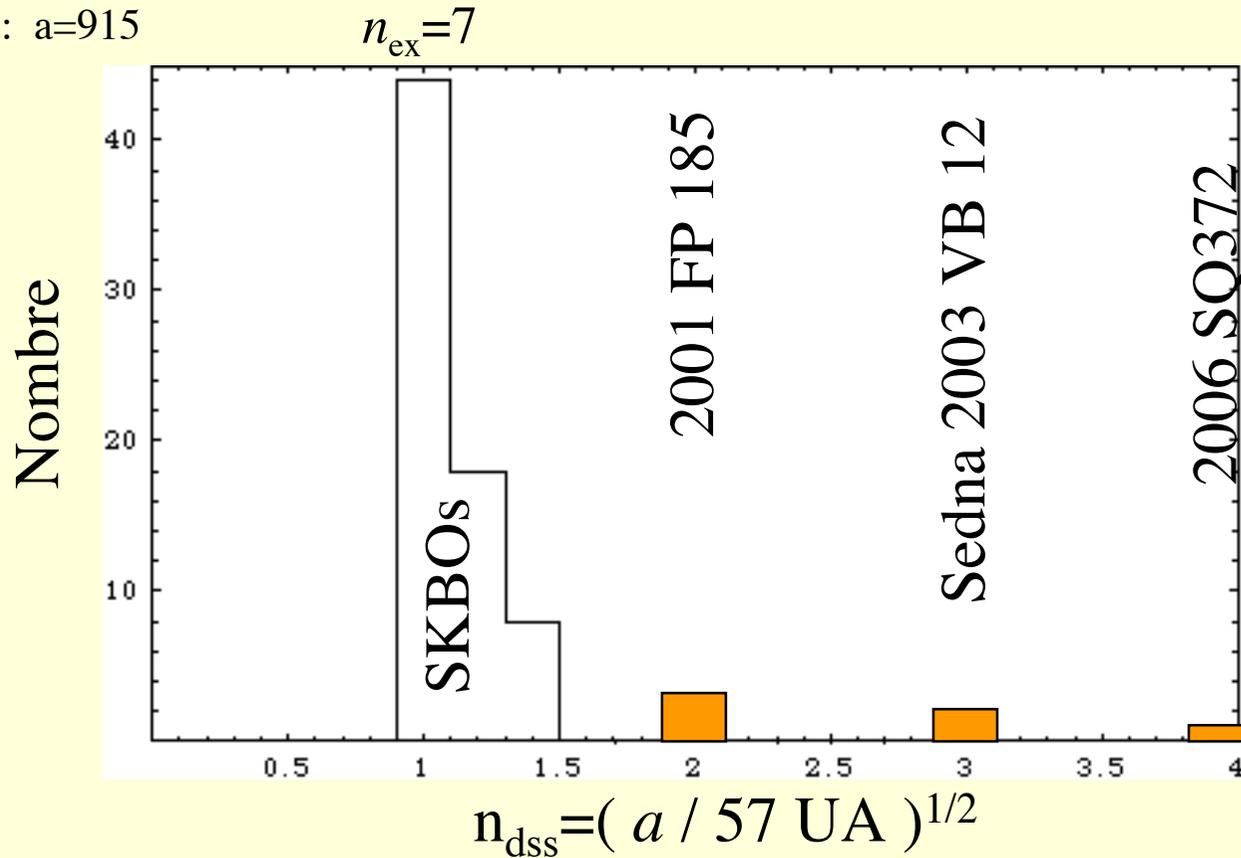
Validation of predicted probability peaks (55, 70, 90, 110 AU, ...)



2002 GB 32: a=219
 2000 CR 105: a=222
 2001 FP 185: a=228
 2003 VB 12: a=495
 2000 OO 67: a=517
 2006 SQ372: a=915

Sedna + distant SKBOs

Nouveau: Septembre 2005

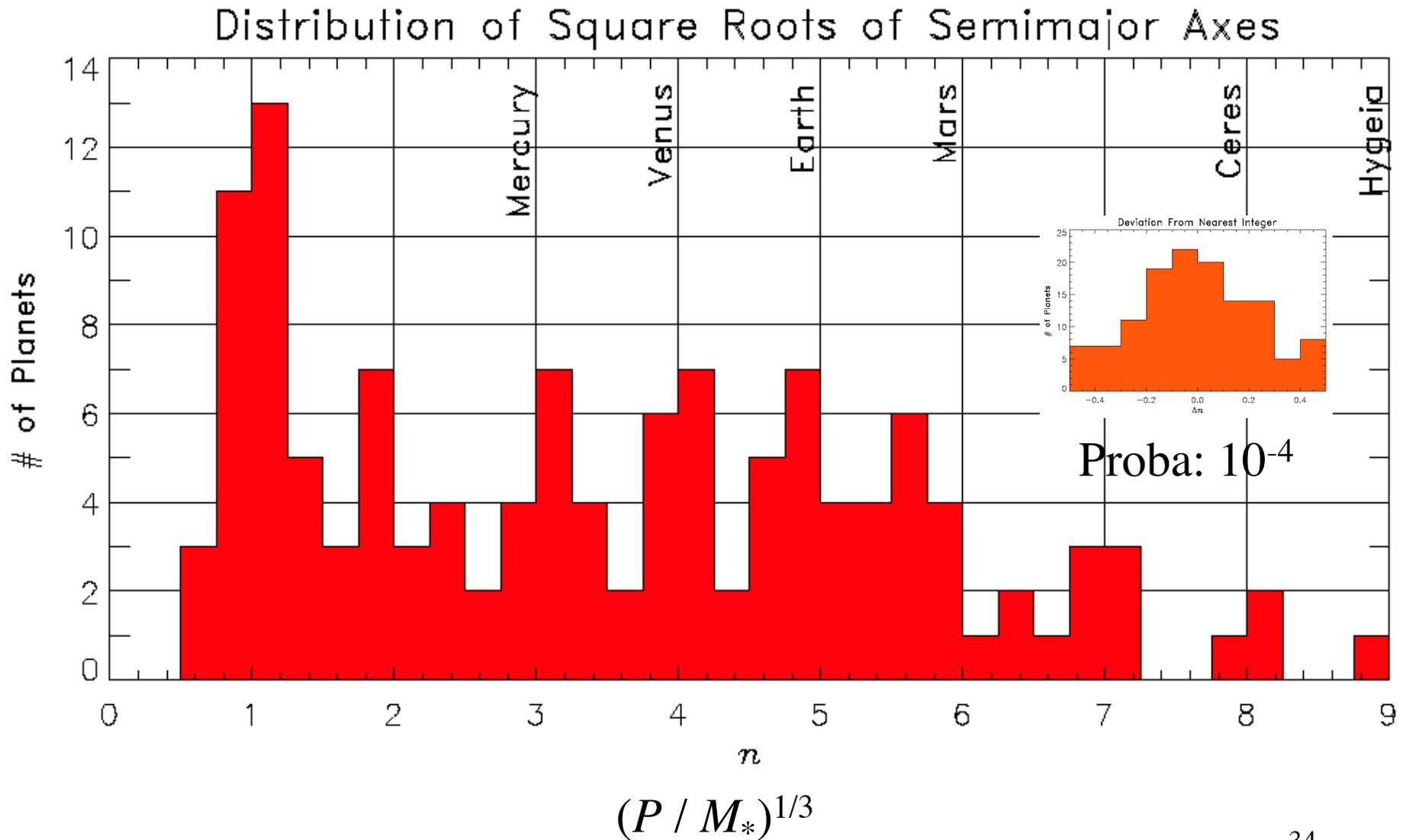


Confirmation:
 2 nouveaux
 objets en n=2,
 1 nouvel objet
 en n=3

Juin 2007

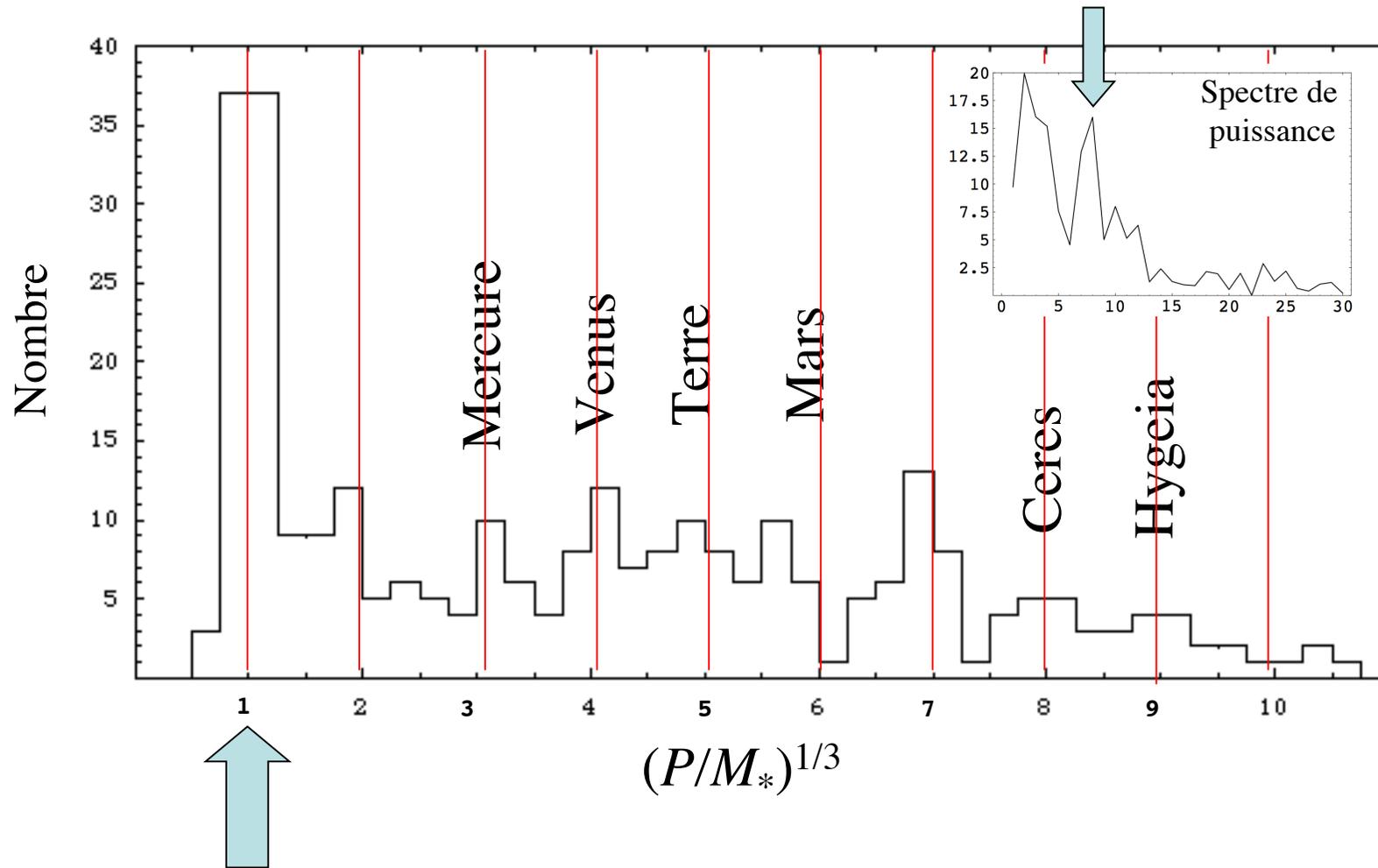
Prédit,UA	(57)	228	513	912	1425	2052
Observé	57	227	509	915		

Exoplanets (data 2005)



Exoplanètes (données 2008, N=301)

Proba = 10^{-7}

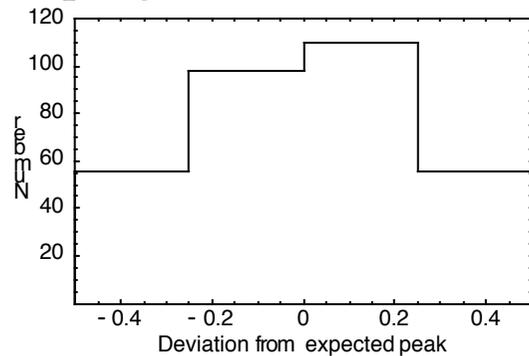


Prédit (1993), niveau fondamental, 0.043 UA/ M_{sol}

Exoplanètes: données 2010

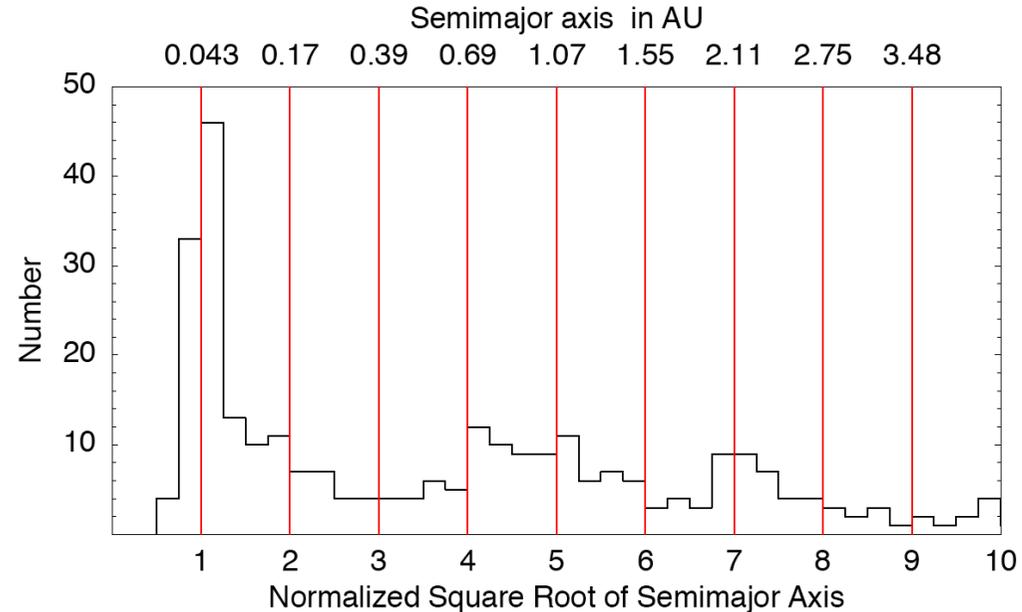
Catalogue Wright et Marcy: Exoplanet Orbit Database at exoplanets.org: 362 exoplanètes au 12-04-10.

Repliage:

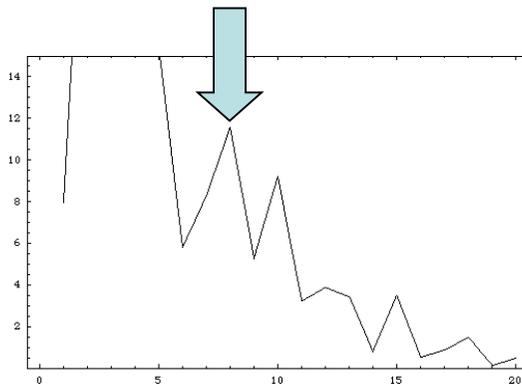


Proba 2×10^{-6}

(tenant compte de l'ajustement)



Spectre de puissance:



331 exoplanètes

entre 0.6 et 8.6 ->

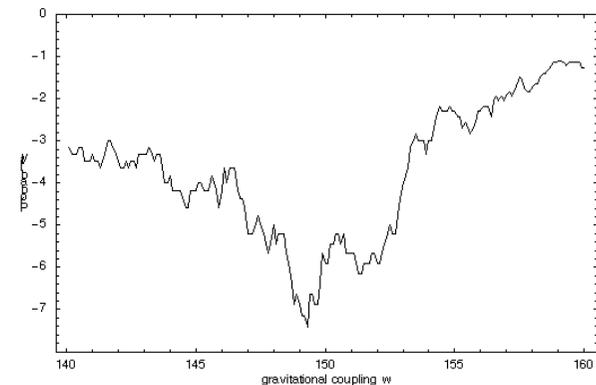
pic prévu en $k=8$.

Observé avec

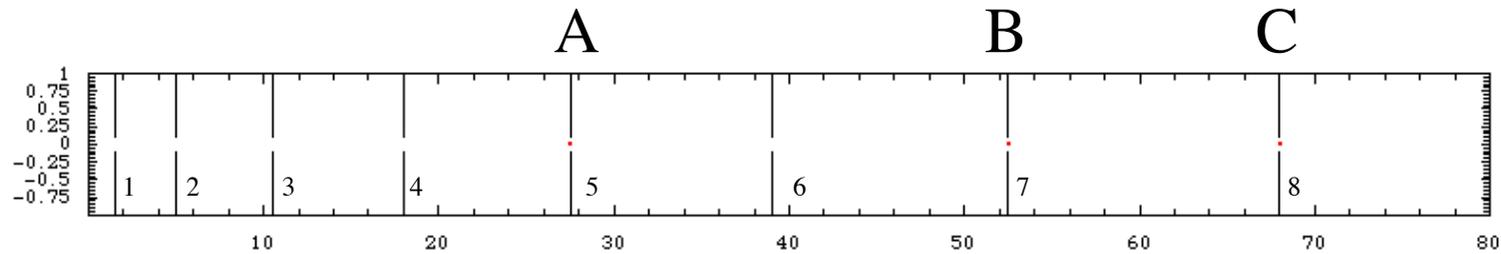
puissance $p=12$

Proba: $e^{-p} = 6 \times 10^{-6}$

Ajustement de la constante de couplage gravitationnelle: $w_0 = 149.3 \text{ km/s}$



Planètes autour du pulsar PSR1257+12



Base: planète C : $a_C = 68$, $n_C = 8$

$$\text{Planète A: } (a_A)^{\text{pred}} = 27.5 \quad \leftrightarrow \quad (a_A)^{\text{obs}} = 27.503 \pm 0.002$$

$$(n_A)^{\text{pred}} = 5 \quad \leftrightarrow \quad (n_A)^{\text{obs}} = 5.00028 \pm 0.00020$$

$\delta n_A / n_A = 5 \times 10^{-5}$ Amélioration d'un facteur 12 (/ 1996)

Planète B, prise en compte quasi-résonance B-C:

$$(a_B)^{\text{pred}} = 52.474 \quad \leftrightarrow \quad (a_B)^{\text{obs}} = 52.4563 \pm 0.0001$$

$$(n_B)^{\text{pred}} = 7 \quad \leftrightarrow \quad (n_B)^{\text{obs}} = 6.9985 \pm 0.00001$$

$\delta n_B / n_B = 2 \times 10^{-4}$ Amélioration d'un facteur 2

Cosmologie

Constante cosmologique

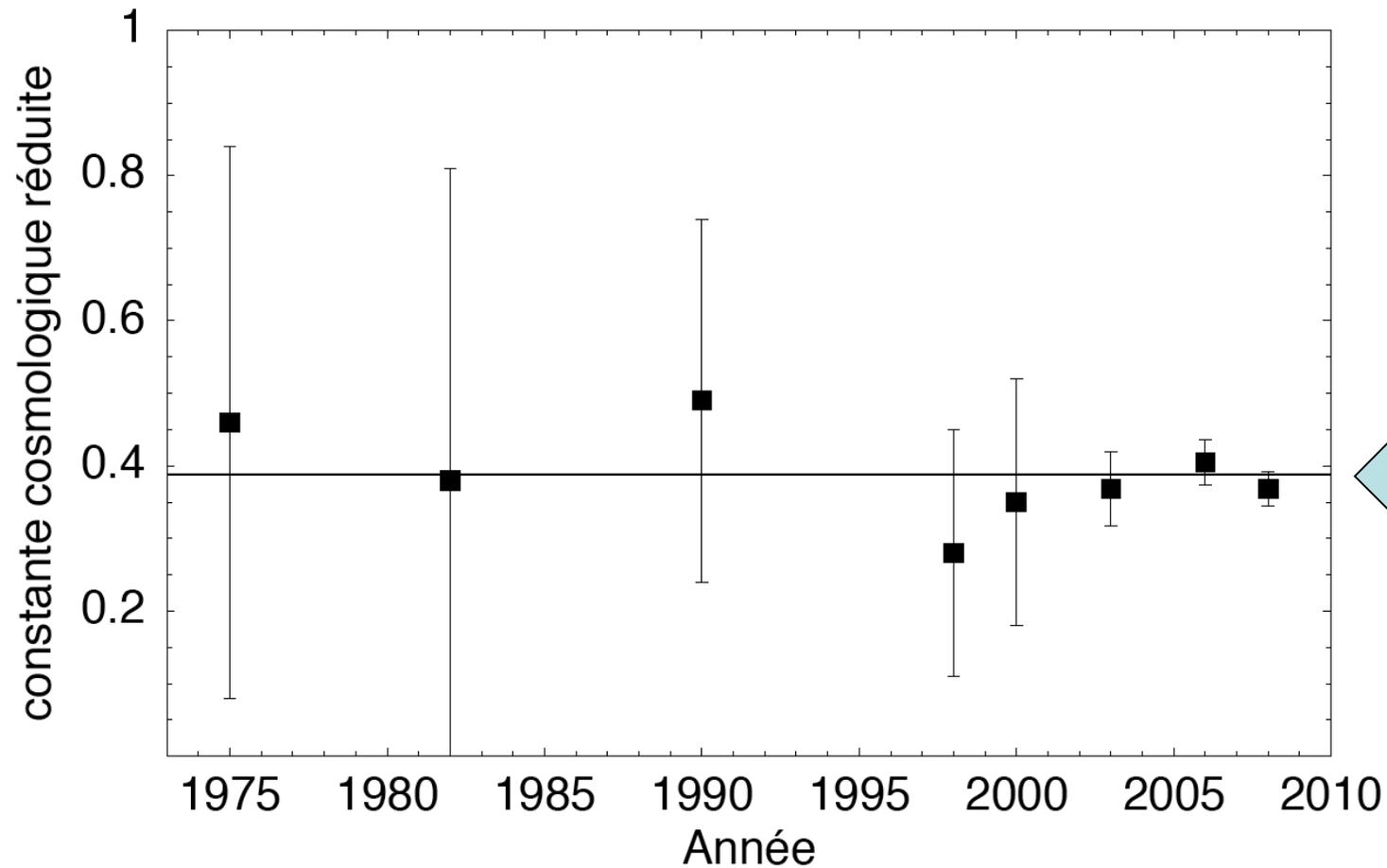
Comparaison prédiction (1993) / observations (2009, WMAP 5 ans)

$$\mathbb{L}_{\text{pred}} = (2.77604 \pm 0.00028) \text{ Gpc}$$

$$\text{LN93: } \mathbb{L} = \left(\alpha \frac{m_{\text{P}}}{m_e} \right)^3 l_{\text{P}},$$

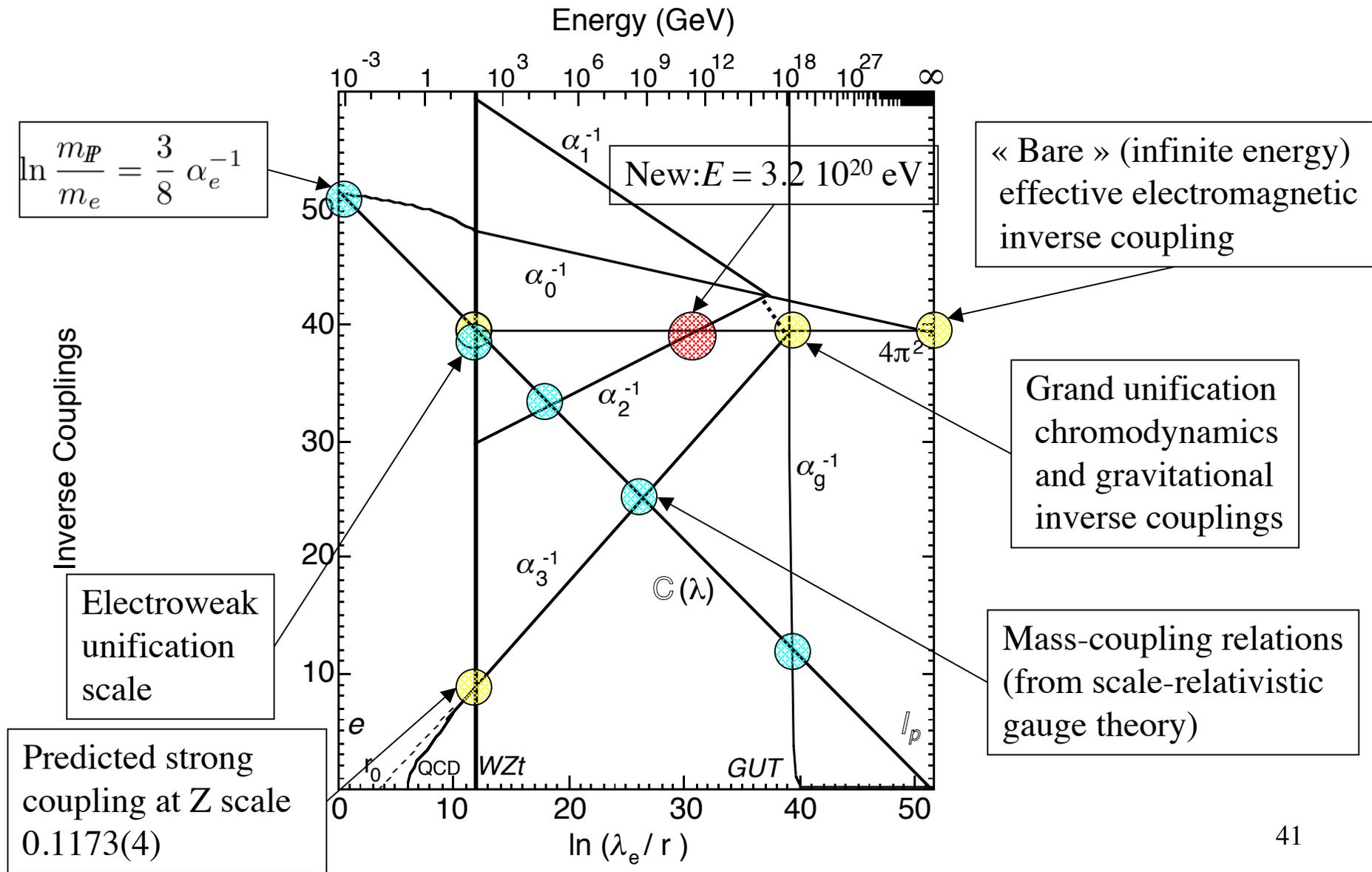
$$\Lambda = 1.36284(27) 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$$

$$\Omega_{\Lambda} h^2 = 0.38874(12)$$

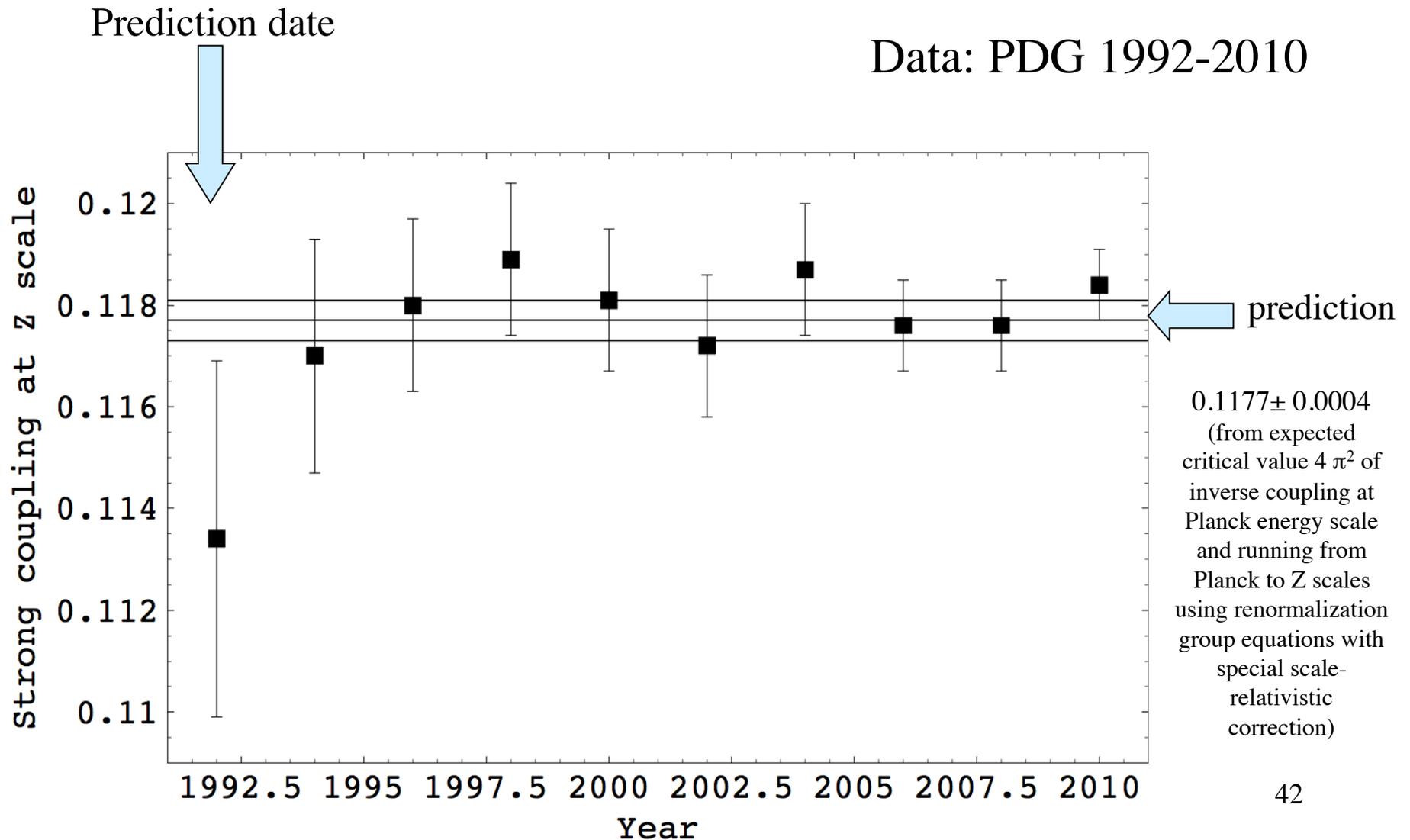


Particle Physics and High Energy Physics

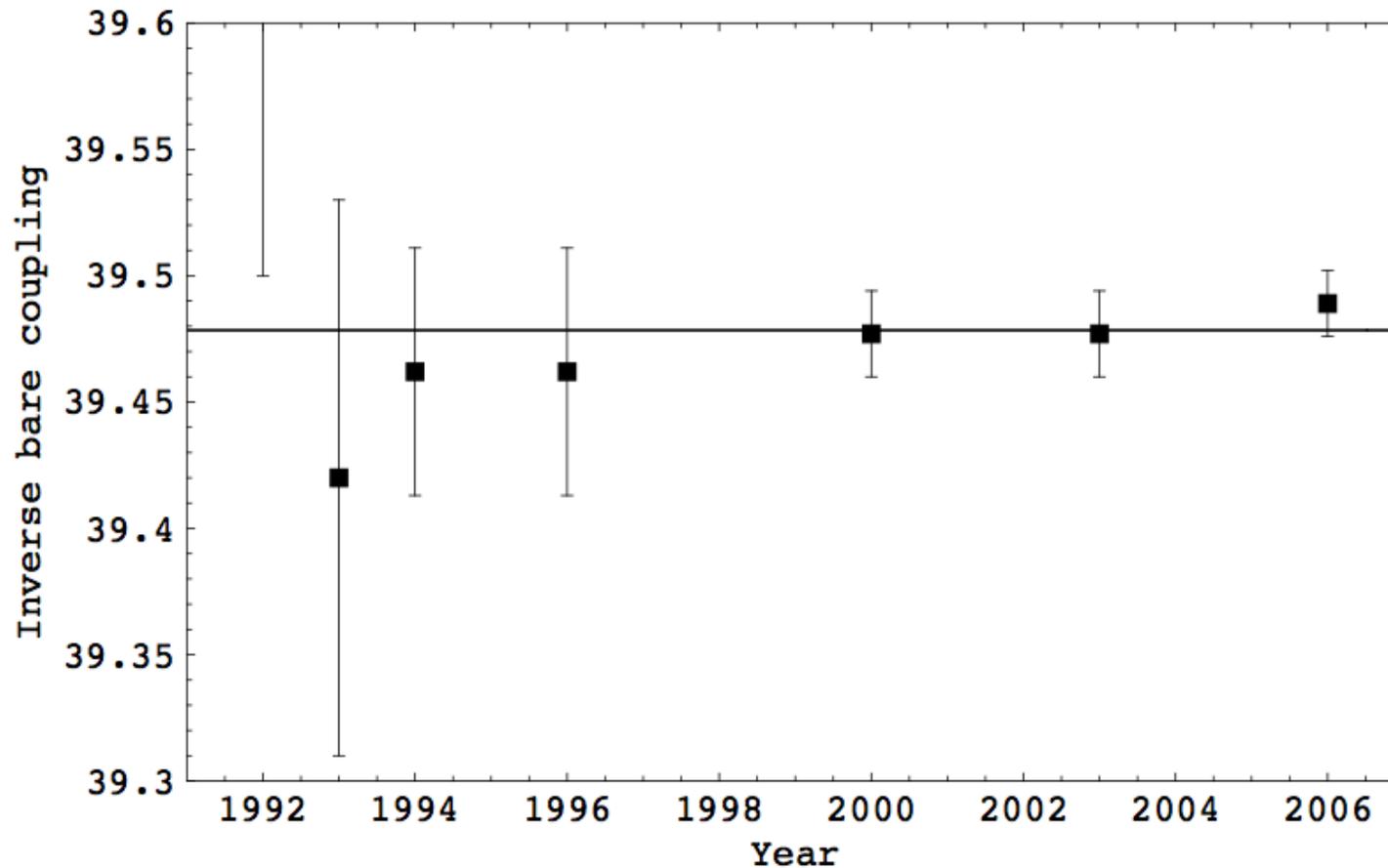
Comparison to experimental data + extrapolation by renormalization group



Constante de couplage forte $\alpha_s(m_Z)$



Constante de couplage électromagnétique « nue » (à énergie infinie)



Prédiction
théorique:

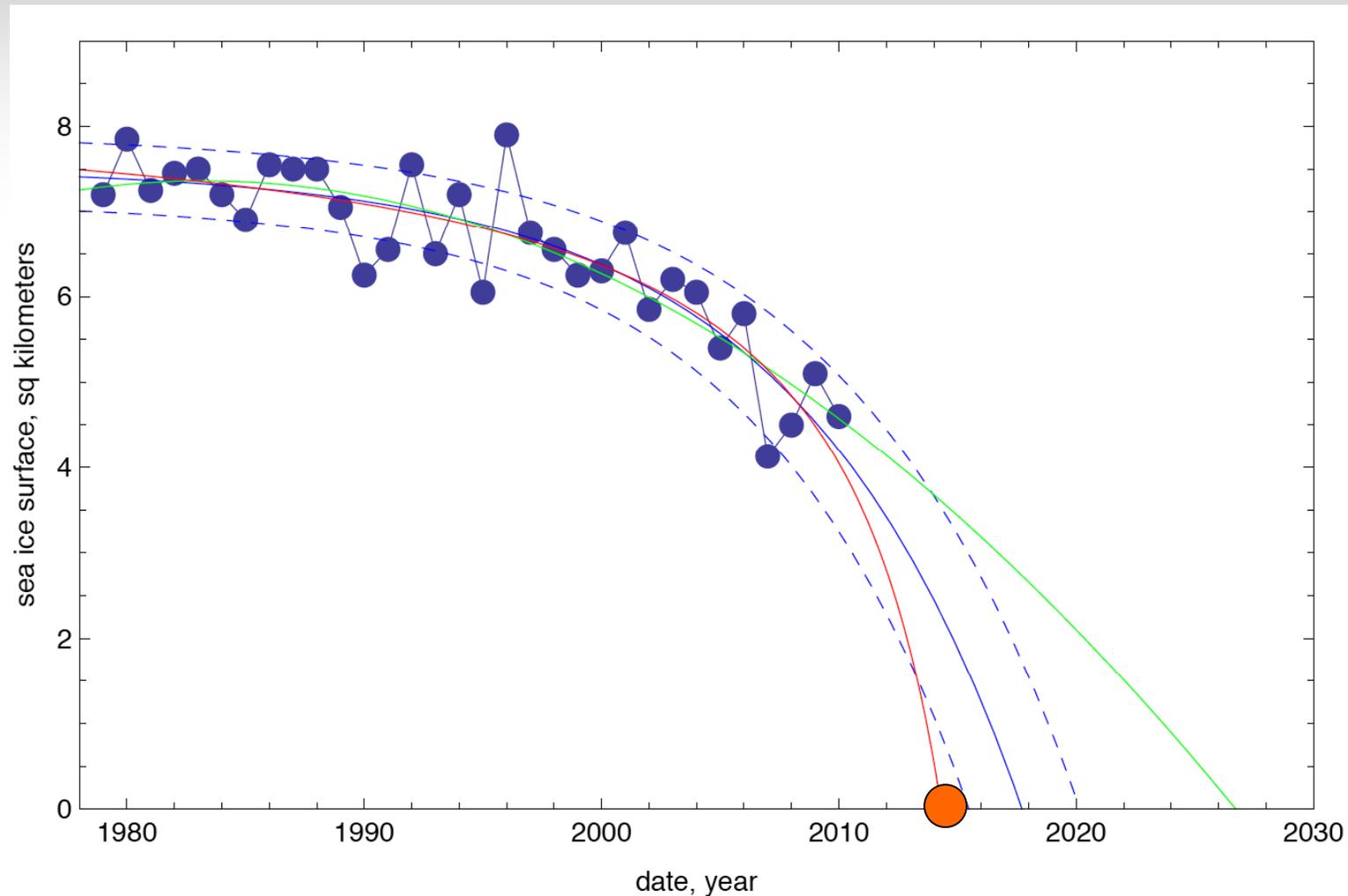
← $4\pi^2$

Géosciences

Banquise Arctique 1953-2009

*Loi exponentielle : $t_{\text{Student}} = 14.6$, $var = 0.198$; $t_0 = 2018$, $S = 7.92 - 0.34 \exp(0.075 t)$

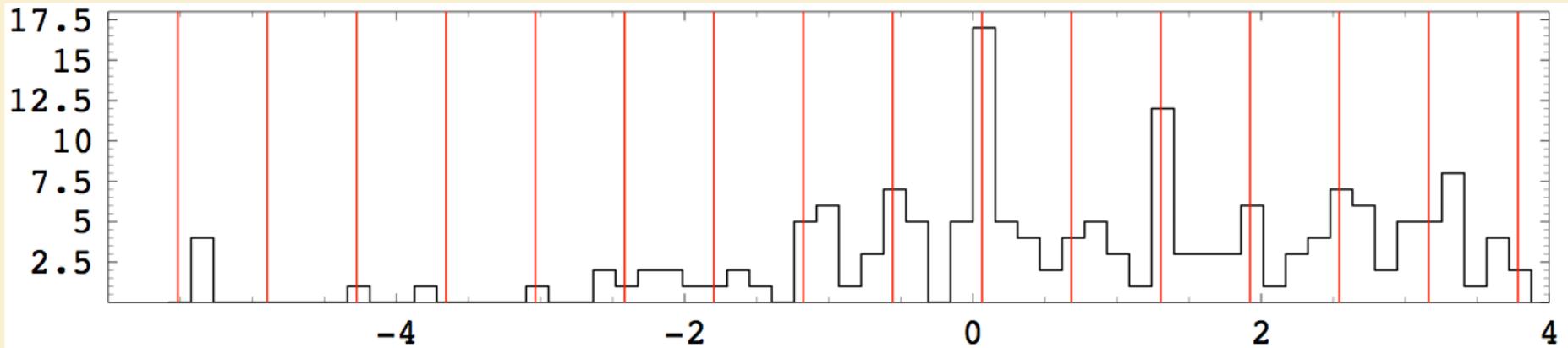
*Loi critique : $t_{\text{Student}} = 14.7$, $var = 0.195$; $t_0 = 2014$, $S = 8.61 - 59.8 (2020.5 - t)^{-1.03}$



Séismes

Sichuan 2008: distribution du taux de répliques.

Nbr



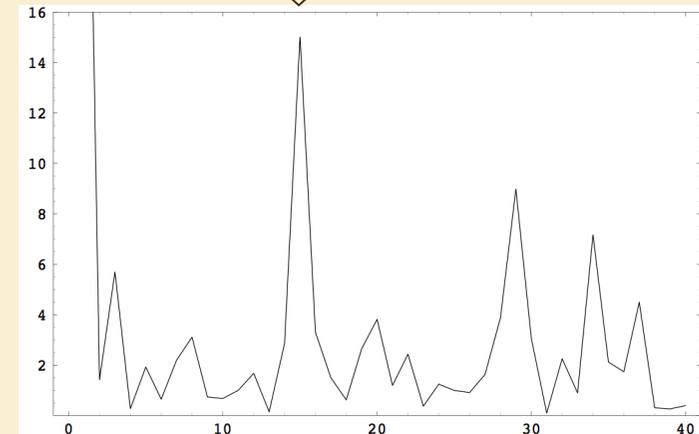
$\ln(t - t_c)$

$t_c = 12.265$ (12 mai 2008)

Proba d'accord pic / creux : 0.0001

Analyse par spectre de puissance:

power = 15.01 (proba 6×10^{-6})



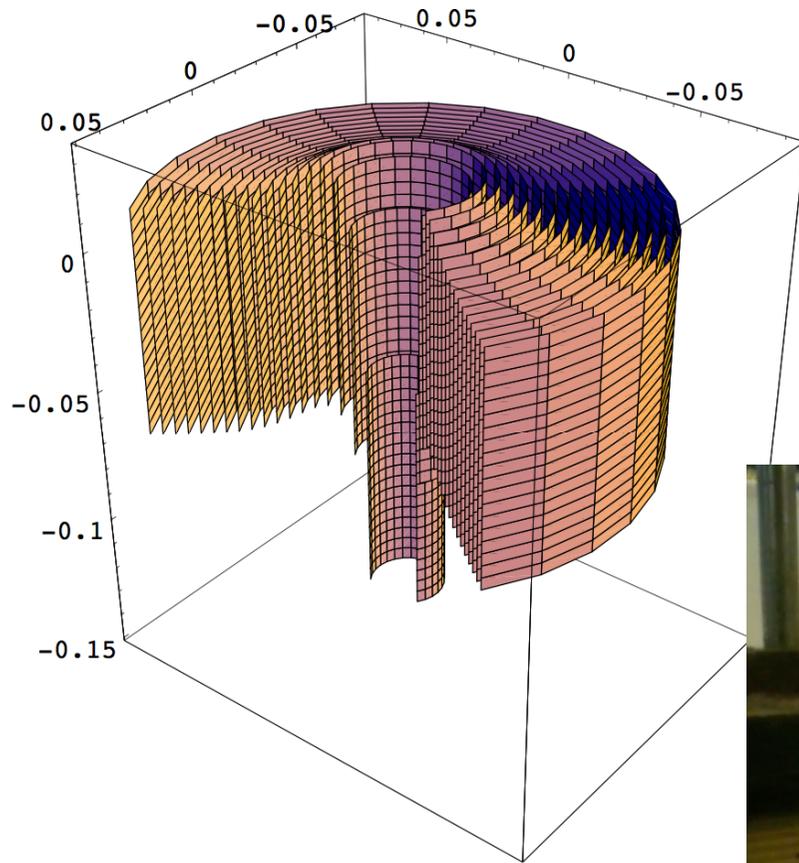
Expérimentation

Astrophysique de laboratoire

FLEX : Fluides Expérimentaux

REFLEX : Fluides Expérimentaux en
Relativité d'Echelle

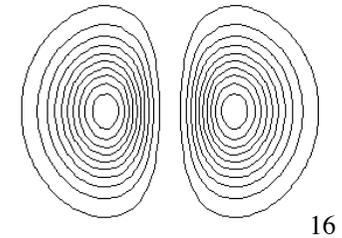
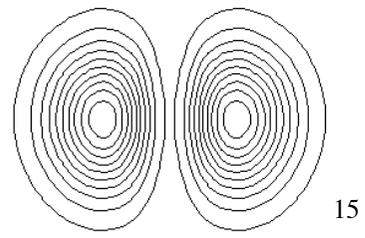
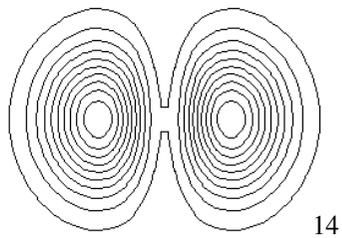
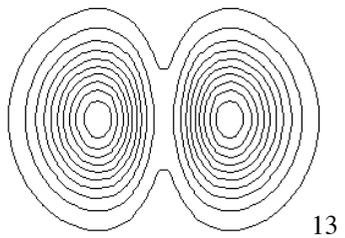
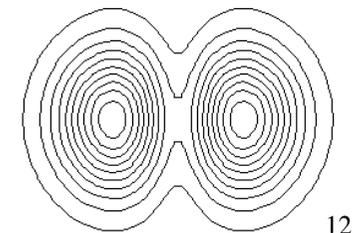
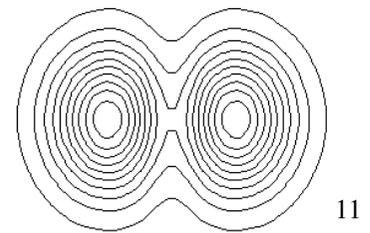
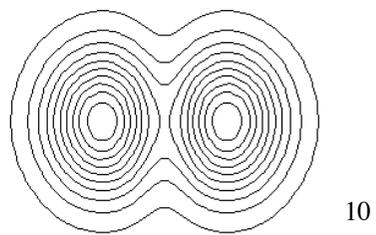
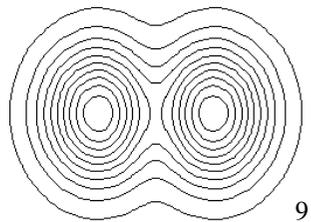
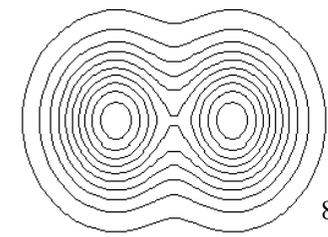
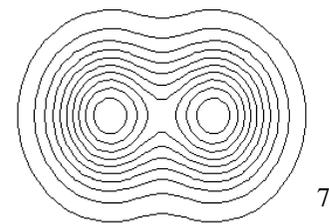
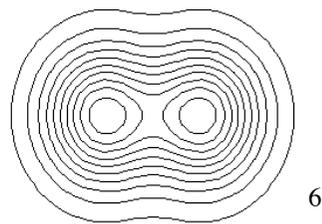
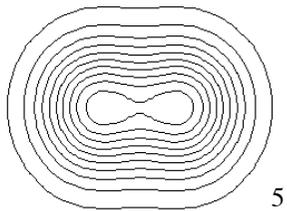
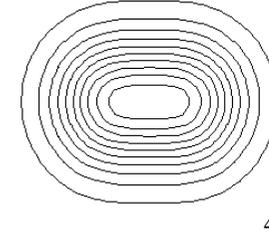
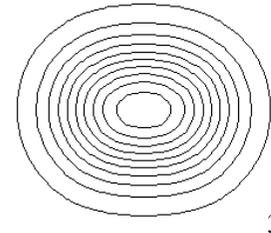
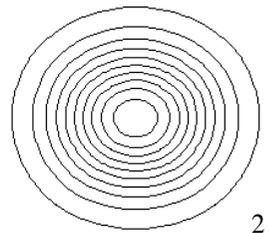
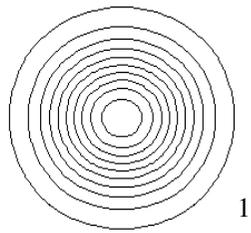
Simulation d'un potentiel quantique macroscopique



Transition
1- \rightarrow 2 vertex

Biologie

MODELE de DUPLICATION (saut d'énergie)
Solution dépendant du temps de l'équation de Schrödinger macroscopique

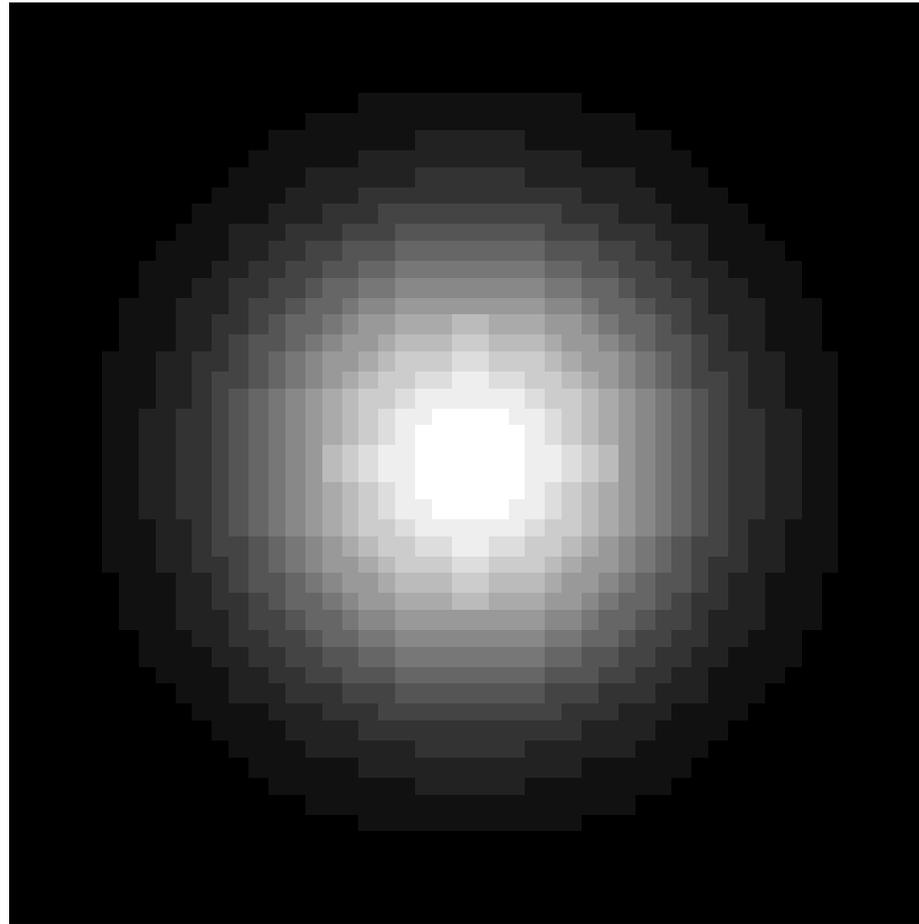


MODELE de DUPLICATION

Solution dépendant du temps de l'équation de Schrödinger généralisée

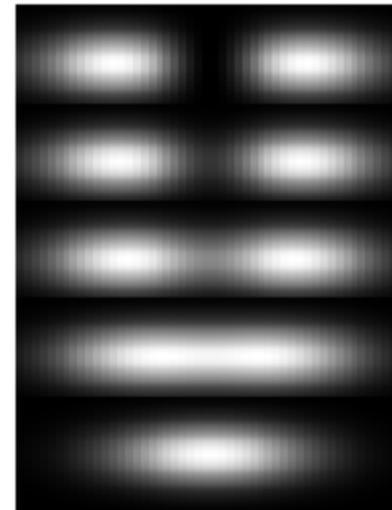
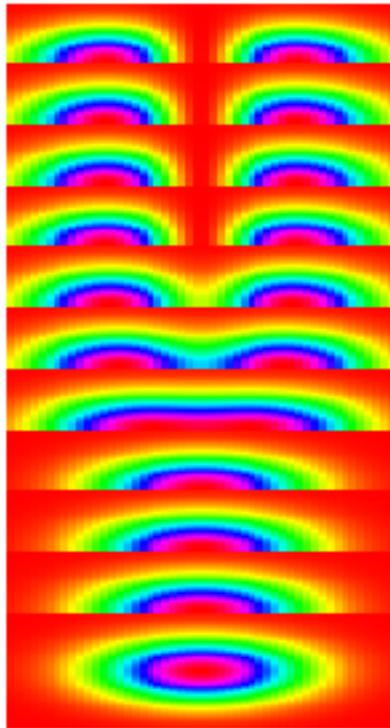
Potentiel: oscillateur harmonique 3D isotrope

Passage de $n = 0$ ($E = 3mD\omega$) à $n = 1$ ($E = 5mD\omega$)



Représentation : 2D, niveaux de densité

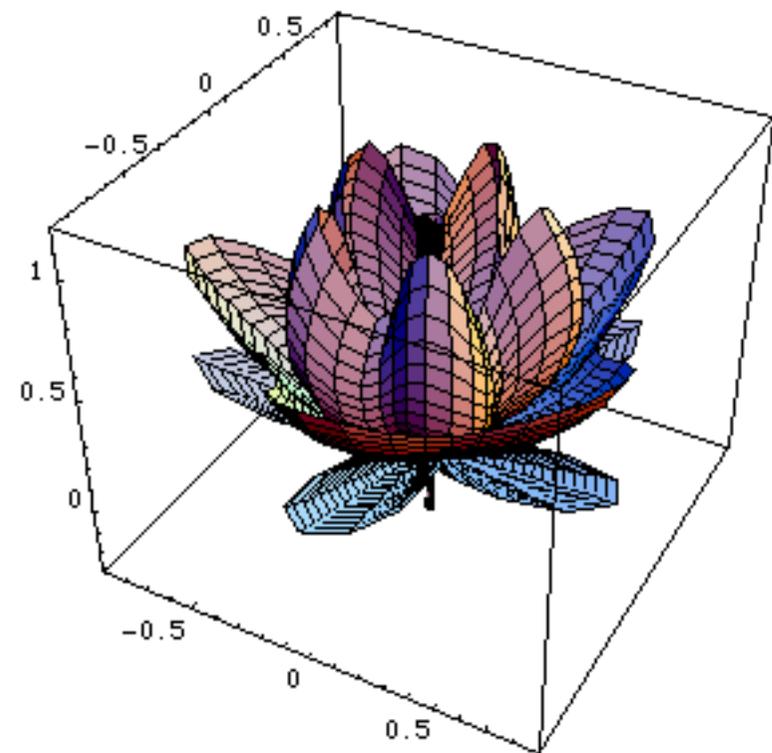
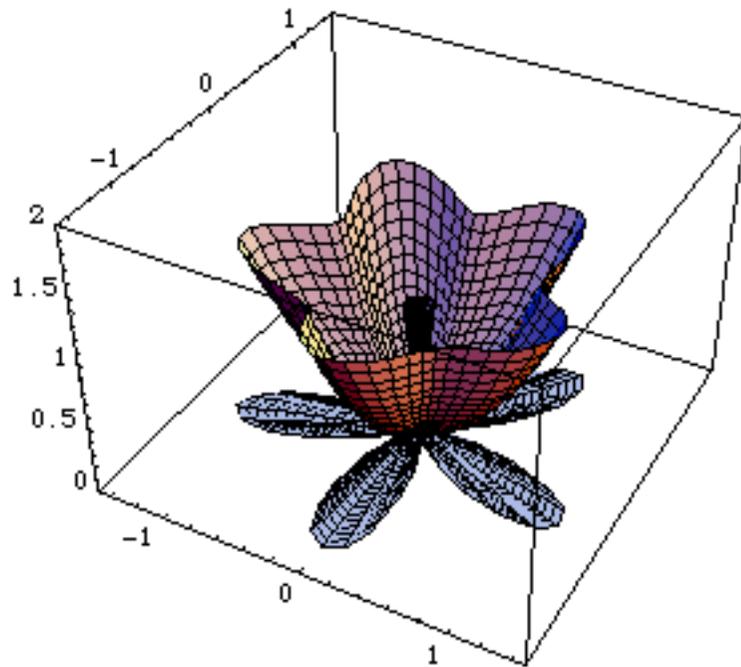
Croissance, arborescence, bifurcation
Solutions de Schrödinger (oscillateur 2D) avec sauts d'énergie



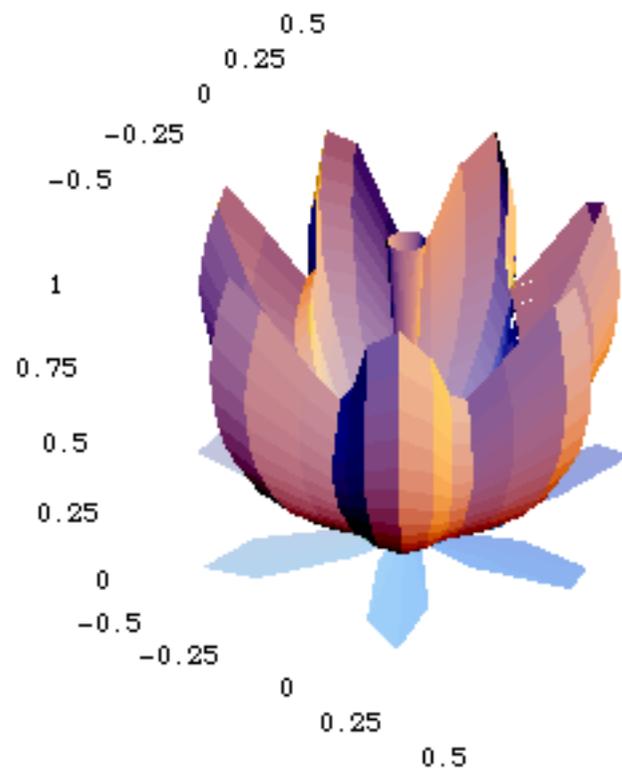
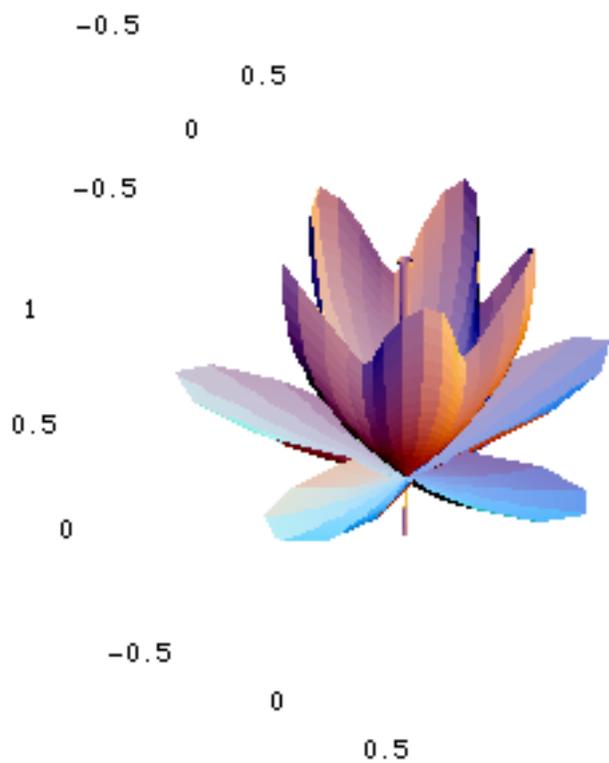
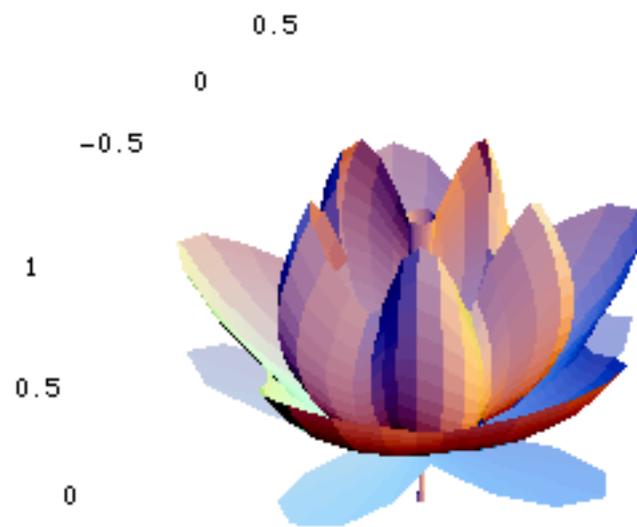
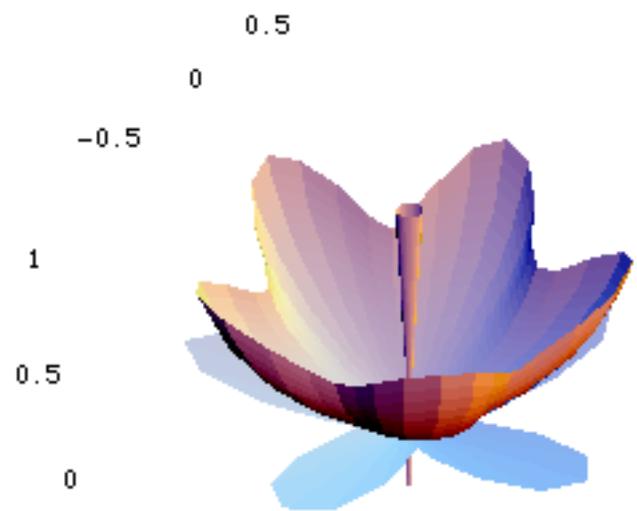
$n=0$ à $n=1$

Morphogénèse. Formes florales.

Solution de l'équation de Schrödinger généralisée pour un processus de croissance à partir d'un centre (diffusion, onde sphérique sortante)

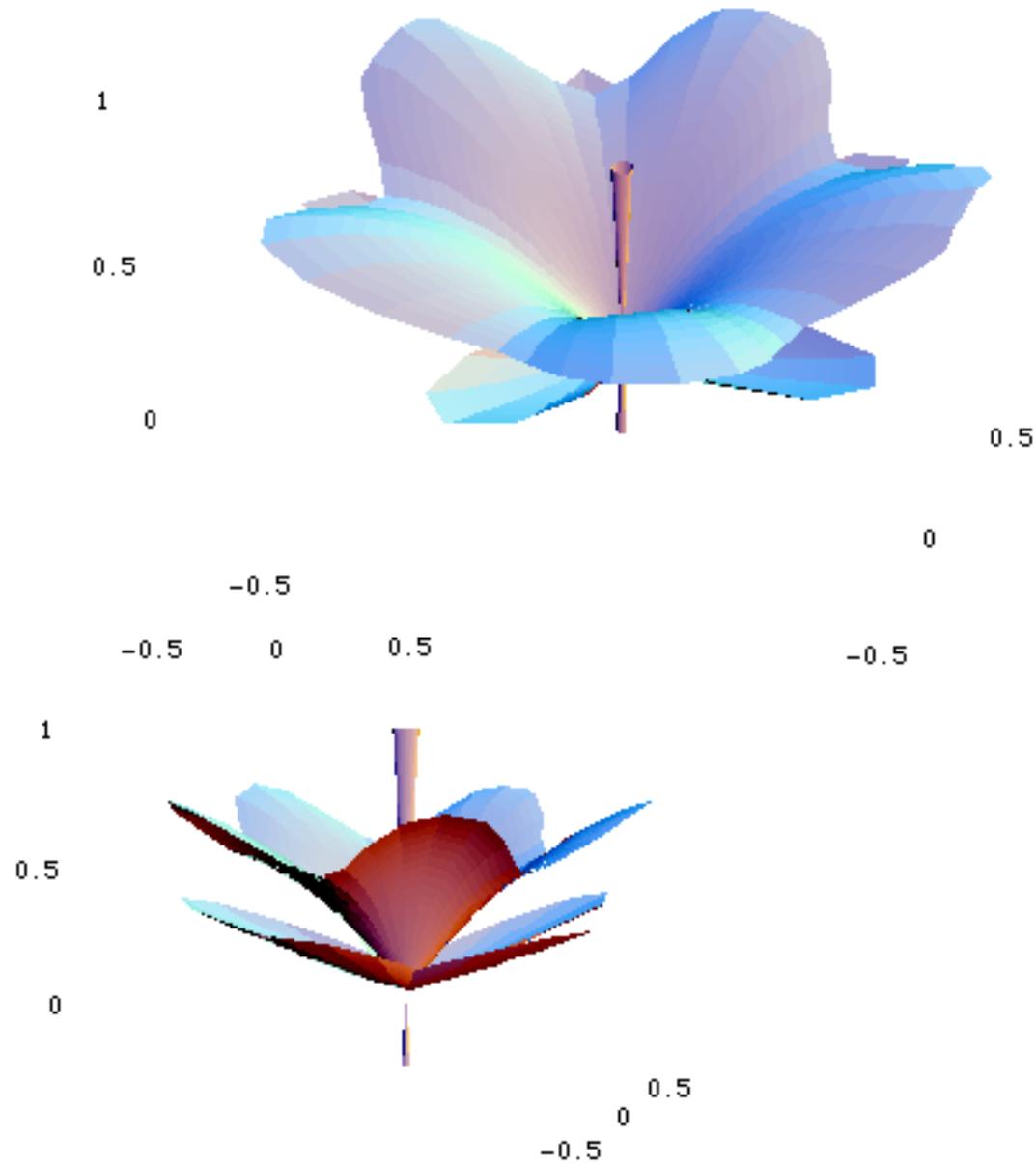


Croissance le long des angles de probabilité maximale (force constante)

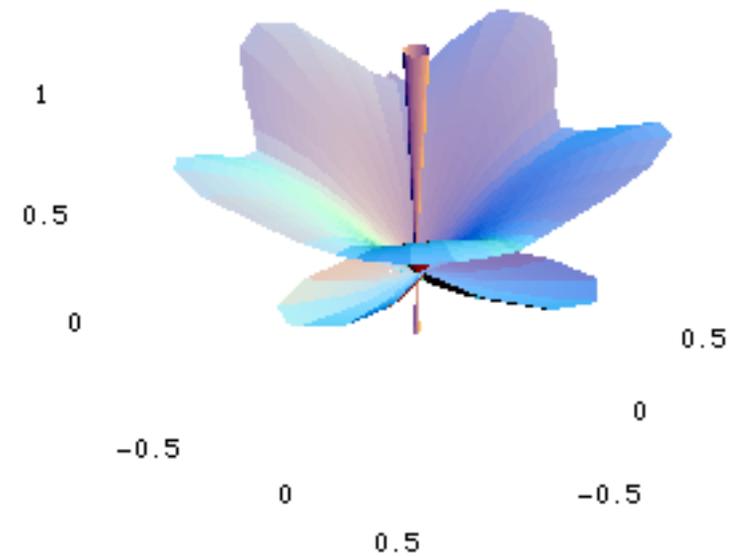


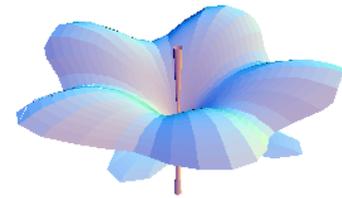
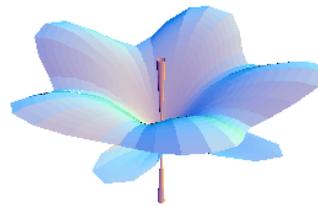
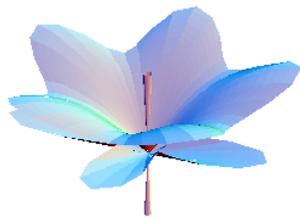
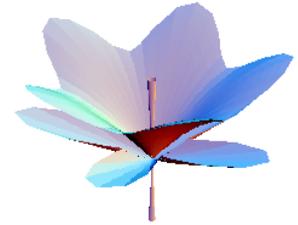
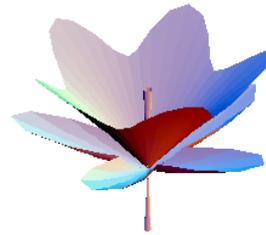
Formes florales solutions de l'équation de Schrödinger

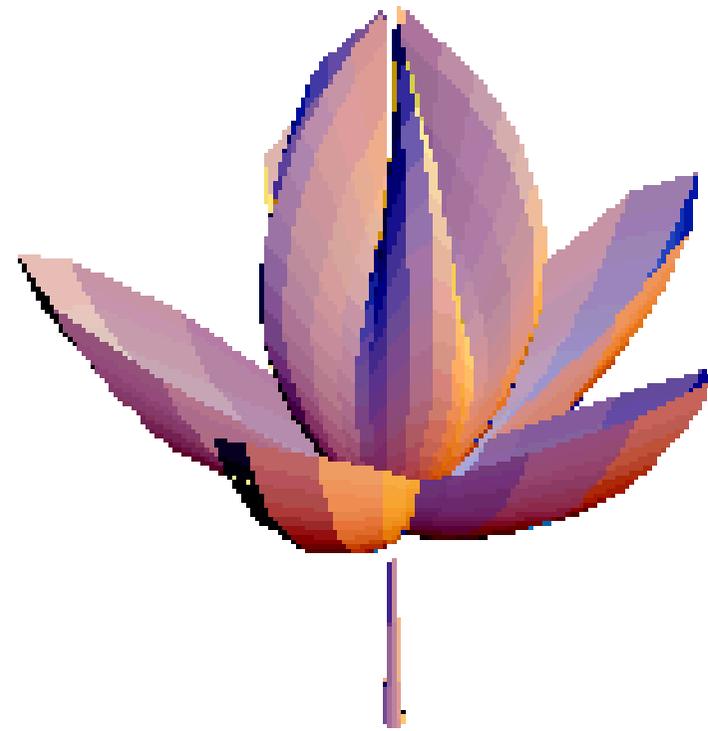
FLEURS de Schrödinger ...



Platycodon (campanulacée)!







Solutions fractales (nondifférentiables) de l'équation de Schrödinger dans une boîte

