Un algorithme exact pour le problème d'indépendant faiblement connexe de cardinalité minimum.

Djelloul Mameri Fatiha Bendali Jean Mailfert

Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand. Laboratoire LIMOS, UMR 6158 CNRS.

14èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications

29 Mai au 1er Juin 2012, La Grande Motte, Hérault, France.

Plan

Plan

1. **Introduction**
2. **Structures DS, CDS, WCDS, IS, MIS et** *Weakly Connected Independent Set* (*WCIS*)
3. **Complexité et approximabilité du** *WCIS* **minimum**
4. **Algorithme exact pour la recherche du** *WCIS* **minimum**
5. **Premiers résultats numériques**
6. **Perspectives**

Plan

1. **Introduction**
2. **Structures DS, CDS, WCDS, IS, MIS et** *Weakly Connected Independent Set* (*WCIS*)
3. **Complexité et approximabilité du** *WCIS* **minimum**
4. **Algorithme exact pour la recherche du** *WCIS* **minimum**
5. **Premiers résultats numériques**
6. **Perspectives**

Plan

1. **Introduction**
2. **Structures DS, CDS, WCDS, IS, MIS et** *Weakly Connected Independent Set (WCIS)*
3. **Complexité et approximabilité du** *WCIS* **minimum**
4. **Algorithme exact pour la recherche du** *WCIS* **minimum**
5. **Premiers résultats numériques**
6. **Perspectives**

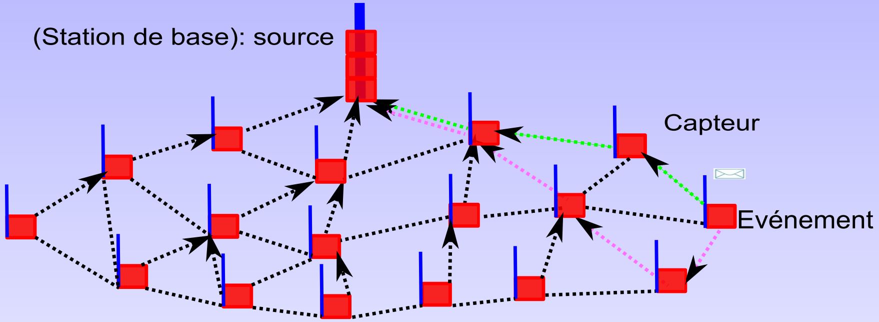
Plan

1. **Introduction**
2. **Structures DS, CDS, WCDS, IS, MIS et** *Weakly Connected Independent Set (WCIS)*
3. **Complexité et approximabilité du** *WCIS* **minimum**
4. **Algorithme exact pour la recherche du** *WCIS* **minimum**
5. **Premiers résultats numériques**
6. **Perspectives**

Plan

1. **Introduction**
2. **Structures DS, CDS, WCDS, IS, MIS et**
   Weakly Connected Independent Set (*WCIS*)
3. **Complexité et approximabilité du** *WCIS* **minimum**
4. **Algorithme exact pour la recherche du** *WCIS* **minimum**
5. **Premiers résultats numériques**
6. **Perspectives**

Réseau de capteurs



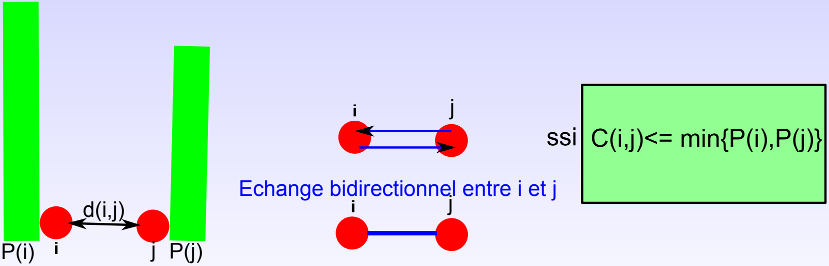
- Capteurs/traitement de données physiques $\Rightarrow$ Mémoire et capacité de calcul limitées.
- Transmission sans fil $\Rightarrow$ Faible portée radio.
- Energie (batterie) $\Rightarrow$ Energie limitée.

Modélisation par un graphe communications

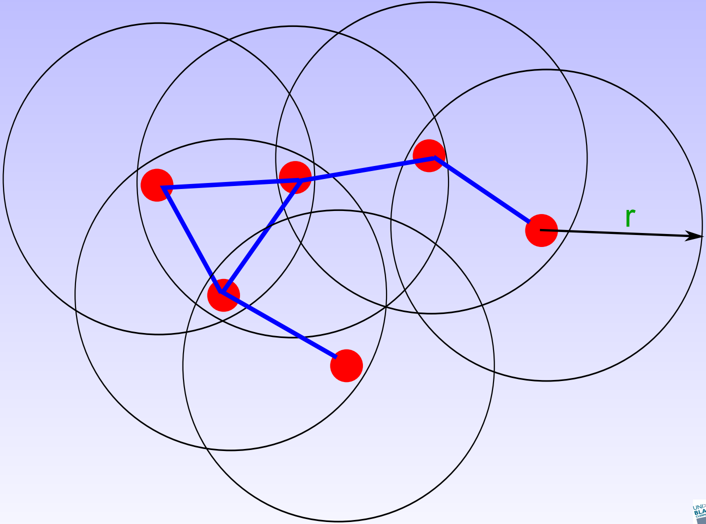
Puissance nécessaire C pour une transmission d'un nœud i à un nœud j

$$C(i,j) = \alpha.d(i,j)^{\beta} + \gamma \qquad (1)$$

Où $d(i,j)$ est la distance entre i et j ; $\alpha > 0$; $\gamma \geq 0$; $\beta \in [2,5]$.



Graphe de communication



r : rayon d'émission des capteurs.

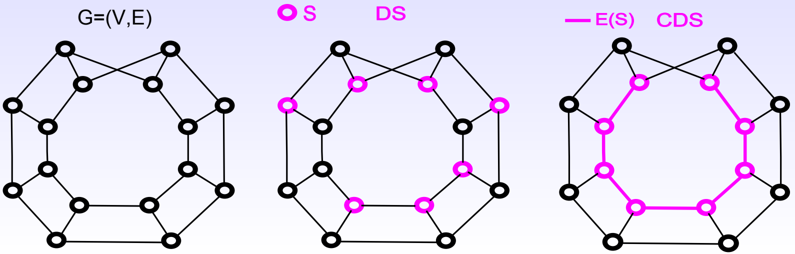
Plan

Structures DS et CDS

$G = (V, E)$ connexe ; $S \subset V$.

Définition : Ensemble dominant (DS) et Ensemble dominant connexe (CDS)

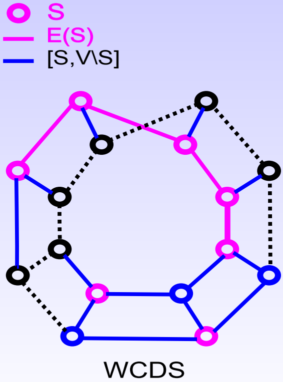
- S est un ensemble *dominant* de G si $\forall v \in V \backslash S, \exists u \in S$ tel que $(u, v) \in E$.
- Un ensemble *dominant* S de G est connexe si le graphe $G_S = (S, E(S))$ est connexe.



Structure WCDS

Définition : Ensemble dominant *faiblement connexe* ($WCDS$)

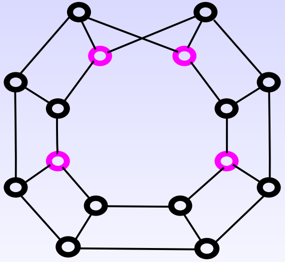
- Un ensemble *dominant* S de G est *faiblement connexe* si le graphe $G_S = (V, E(S) \cup [S, V \backslash S])$ est connexe.

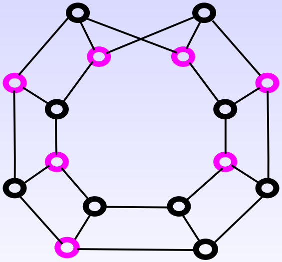


Structures IS et MIS

Définition : Indépendant (IS) et indépendant maximal (MIS)

1. S est un *indépendant* ou *stable* de G si aucune arête de E ne relie deux sommets de S.
2. Un *indépendant* S de G est *maximal* si aucun indépendant de G ne le contient strictement.


IS


MIS

Structure *WCIS*

Définition : Indépendant faiblement connexe (*WCIS*)

- Un *indépendant* S de G est faiblement connexe si le graphe $G_S = (V, [S, V \backslash S])$ est connexe.

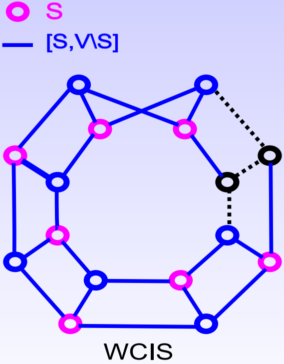
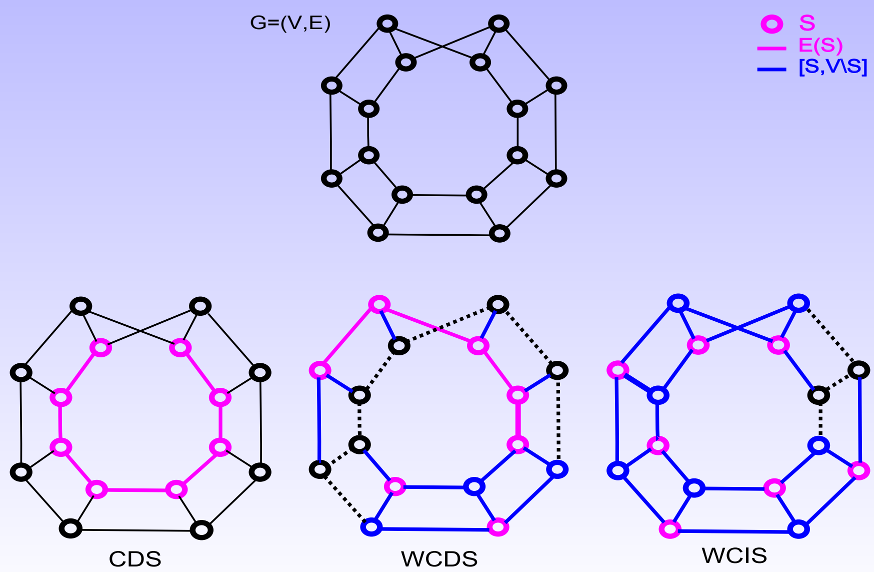
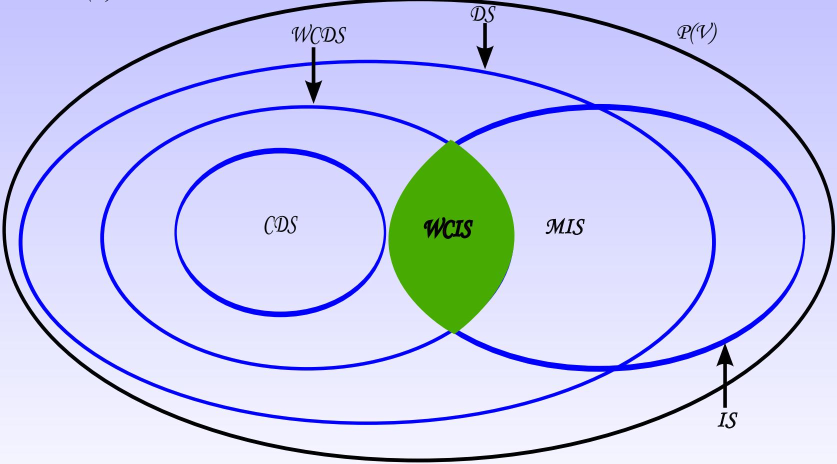


Illustration des structures



Comparaison ensembliste

G=(V,E) ; $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ est l'ensemble des parties de V.



Motivations pour la structure *WCIS*

1. Les problèmes de décision associés au *MIS*, *CDS* et *WCDS* sont NP-Complets.

2. *WCIS* intermédiaire pour la recherche de *MCDS* et *MWCDS* [1].

3. Résultat négatif pour l'approximation de *MMIS* [2] :
   $\nexists \epsilon : |A(G)| \leq n^{1-\epsilon} \ |MMIS(G)|$.

[1] : Li. Yingshu, M.T Thai, W. Feng, C.W. Yi, P.J Wan and D.Z. Du. *Wireless Communications and mobile computing*, 2005.
[2] : Magnús M. Halldórsson. *Information Processing Letters*, 1993.

Problème de décision *WCISD*

Problème : (*WCISD*)

Instance : $G = (V, E)$ *un graphe non orienté connexe et* k *un entier ;*
Question : G *contient-il un* *WCIS* *de taille au plus* k *?*

Théorème de complexité

WCISD est NP-Complet.

Théorème d'inapproximabilité

Il n'existe pas d'algorithme d'approximation polynomial A pour le problème du *WCIS* de cardinalité minimum tel que :

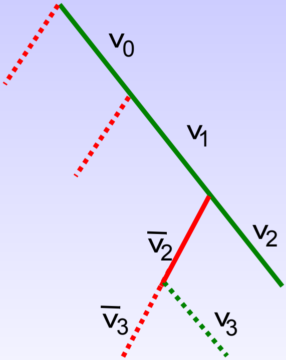
$$|A(G)| \leq |V|^{1-\epsilon}|MWCIS(G)|,\ 0 < \epsilon < 1.$$

Complexité de *WCISD* dans des classes de graphes particulières

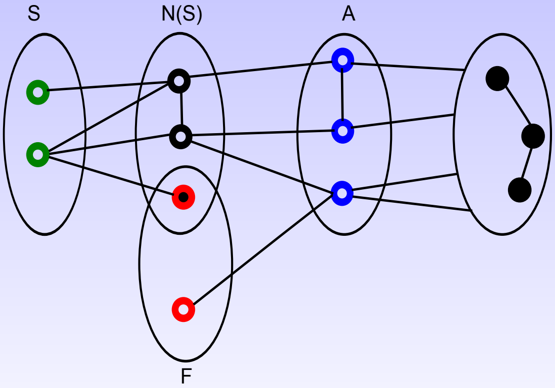
Classe de graphes	DSD	MISD	WCISD
co-graphes	P	P	P
Arbres	P	P	P
Graphe biparti	NPc	NPc	P
Graphe de comparabilité	NPc	NPc	NPc
Split graphe	NPc	P	P

Algorithme d'énumération des *WCIS* de cardinalité minimum

Soit $S \subset V$ le *WCIS* partiel.



Arbre binaire



Variables principales de l'algorithme

Les cas de stérilisation dans l'arbre binaire

(1) Un *WCIS* de cardinalité minimum est obtenu.

(2) La cardinalité de l'ensemble indépendant courant dépasse celle du plus petit *WCIS* obtenu jusque là.

(3) La propriété de dominance n'est plus assurée.

Les cas de stérilisation dans l'arbre binaire

(1) Un *WCIS* de cardinalité minimum est obtenu.

(2) La cardinalité de l'ensemble indépendant courant dépasse celle du plus petit *WCIS* obtenu jusque là.

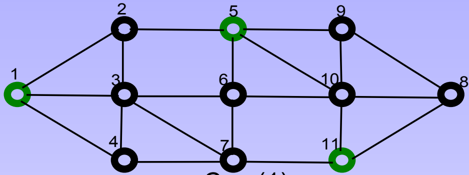
(3) La propriété de dominance n'est plus assurée.

Les cas de stérilisation dans l'arbre binaire

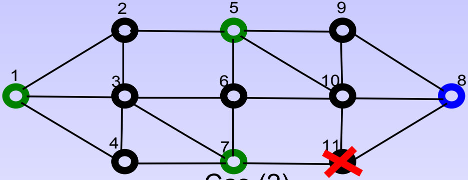
(1) Un *WCIS* de cardinalité minimum est obtenu.

(2) La cardinalité de l'ensemble indépendant courant dépasse celle du plus petit *WCIS* obtenu jusque là.

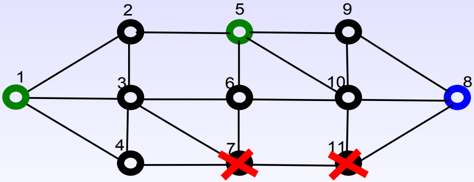
(3) La propriété de dominance n'est plus assurée.



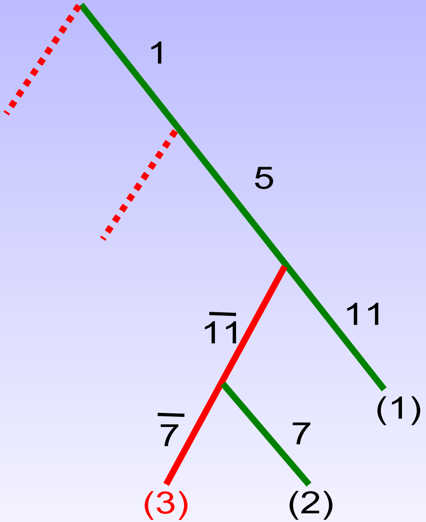
Cas (1)



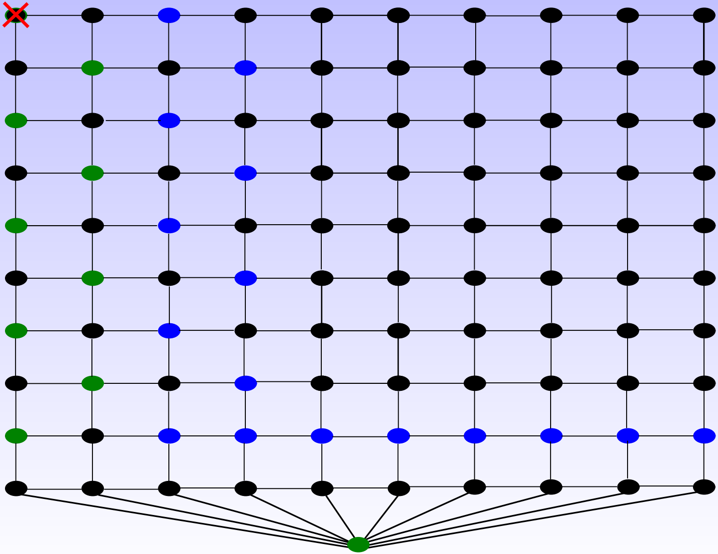
Cas (2)



Cas (3)



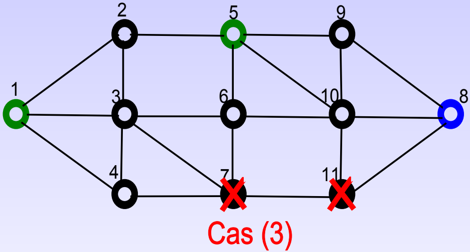
Intérêt de la procédure échec dominance

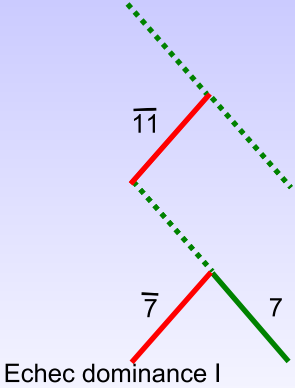


Situation échec dominance

Échec dominance de type I

1. $\exists v_0 \in F$ tel que $N(v_0) \subset N(S) \cup F$.





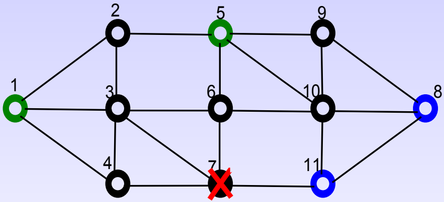
$S = \{1,5\}$, $N(S) = \{2,3,4,6,9,10\}$, $F = \{7,11\}$.
$v_0 = 7$, $N(v_0) = \{3,4,6,11\} \subset N(S) \cup F$.

Situation échec dominance

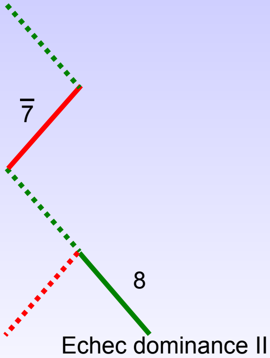
Notations : $\overline{N^2}(v) = N^2(v) \setminus (S \cup N(S))$.

Échec dominance de type II

1. $\exists v \in \overline{N^2}(v_0) \cap F$ tel que $N(v) \subset N(S) \cup F \cup N(v_0)$.



Cas (3)



$v_0 = 8,\ S = \{1,5\},\ N(S) = \{2,3,4,6,9,10\},\ F = \{7\}$,
$N(v_0) = \{9,10,11\}$. $v = 7,\ N(7) = \{3,4,6,11\} \subset N(S) \cup F \cup N(v_0)$.

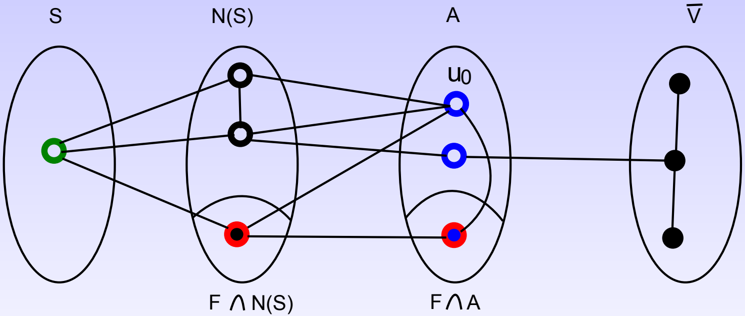
Schéma de l'algorithme exact

Require: $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe.
Ensure: $\mathcal{S}^* = \{S^* \subset V : S^*$ est un $MWCIS(G)\}$.

Soit v_{min} le sommet de plus petit degré, $v_0 \leftarrow v_{min}$, stop$\leftarrow$ false ;
for $iv_0 = 1$ to $|N[v_{min}]|$ **do**
  Initialiser les variables de l'algorithme : S, F et A.
  while not stop **do**
    Etape 1 :
    Empiler v_0 et mettre à jour les variables S, F et A ;
    Si échec dominance II alors **Interdire** v_0, aller à l'Etape 2 ;
    Si $WCIS$ alors enregistrer si meilleur, **Interdire** v_0, Etape 2 ;
    Si taille depassée alors **Interdire** v_0, aller à l'Etape 2 ;
    Etape 2 :
    Si On trouve un nouveau candidat v_0, alors aller à l'Etape 1 ;
    Retour en arrière (interdire le dernier sommet, échec I) ;
    Si la pile est non vide alors Etape 2 **Sinon** stop $\leftarrow$true ;
  end while
end for

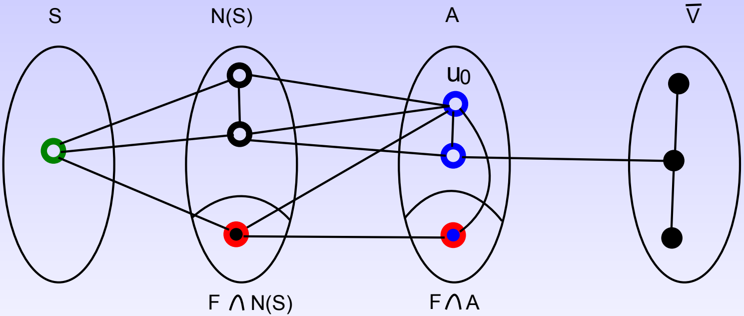
Analyse de l'algorithme exact

(1) $|N(u_0)\backslash S \cup N(S) \cup F| = 0 \Longrightarrow T(p) \leq T(p-1)$.



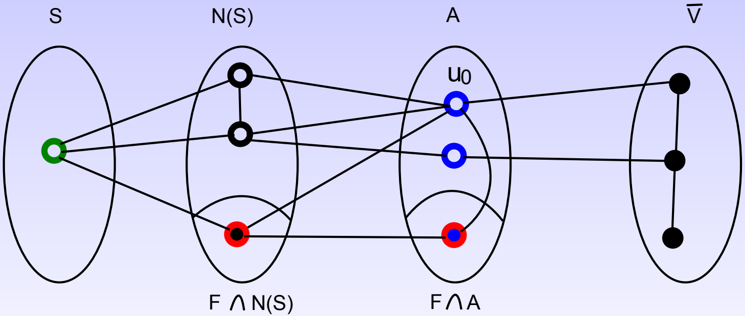
Analyse de l'algorithme exact

(2) $|N(u_0) \backslash S \cup N(S) \cup F| = 1 \Longrightarrow T(p) \leq T(p-2) + T(p-2)$.



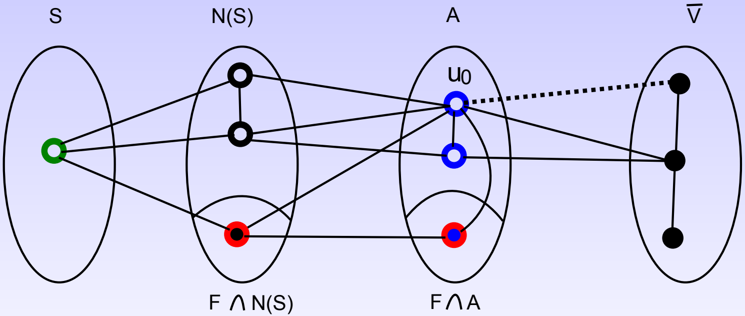
Analyse de l'algorithme exact

(2) $|N(u_0)\backslash S \cup N(S) \cup F| = 1 \Longrightarrow T(p) \leq T(p-2) + T(p-2)$.



Analyse de l'algorithme exact

(3) $|N(u_0) \backslash S \cup N(S) \cup F| \geq 2 \Longrightarrow T(p) \leq T(p-3) + T(p-1)$.



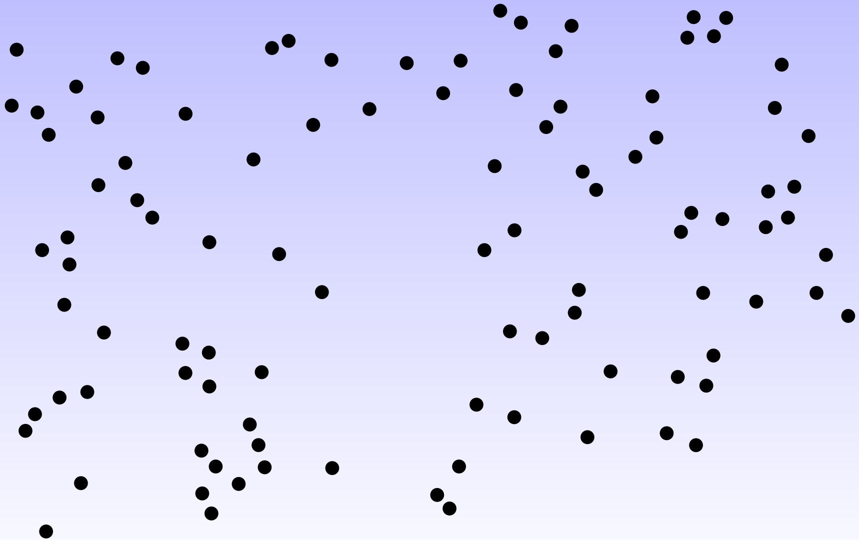
Analyse de l'algorithme exact

$|N(u_0)\backslash S \cup N(S) \cup F| \geq 2 \Longrightarrow T(p) \leq T(p-3) + T(p-1)$.

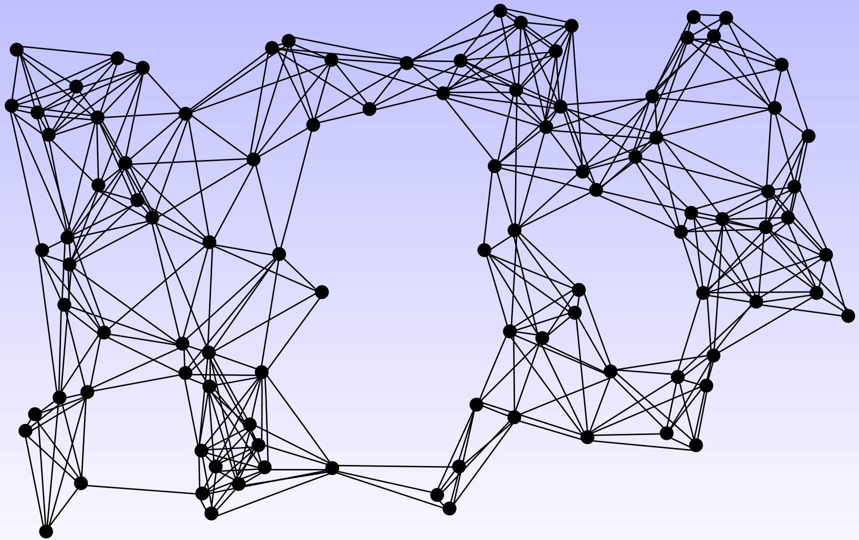
Théorème de complexité

- La complexité temporelle de l'algorithme exact est de $O^*(1.4656^n)$.
- La complexité spatiale est de $O(n^2)$.

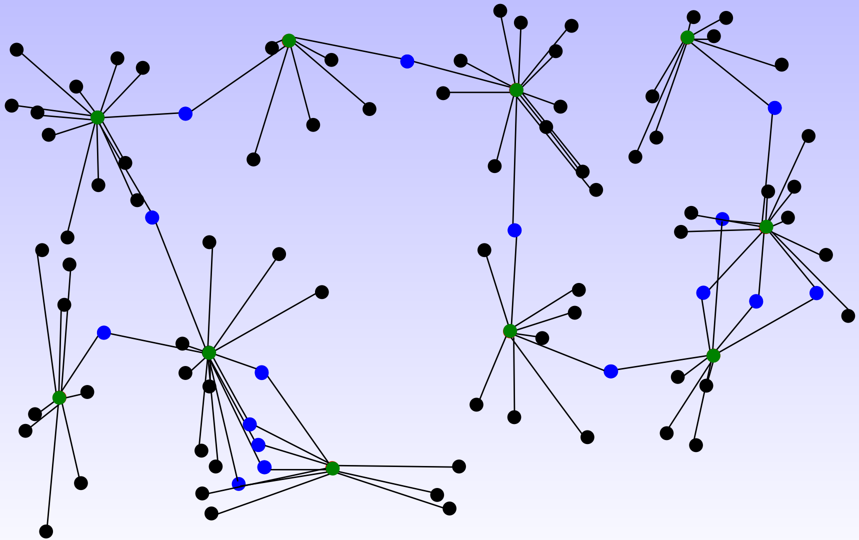
Premiers résultats numériques



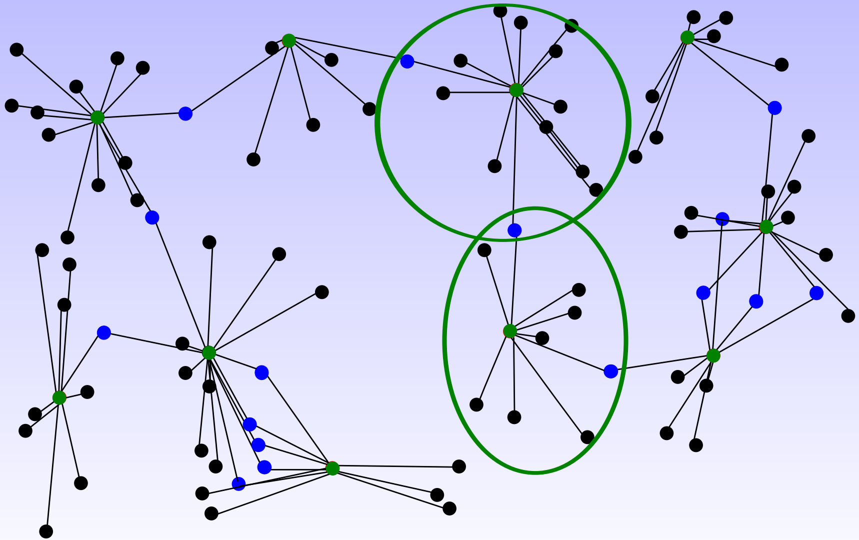
Premiers résultats numériques



Premiers résultats numériques

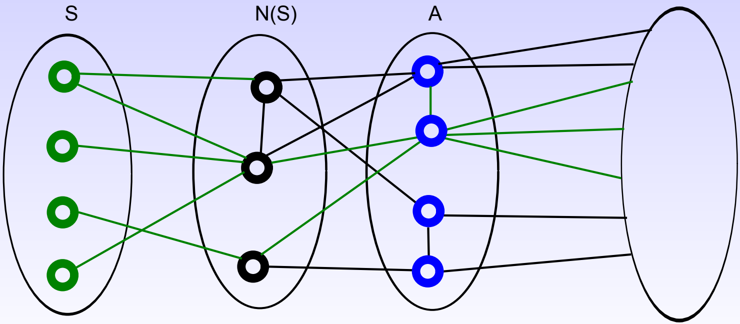


Premiers résultats numériques



Heuristique pour le problème du *WCIS* minimum

- Entrée : G=(V,E).
- Sorties : $G_{glo} = (V, [S, V \backslash S]), S = A_{glo}(G)$.



Premiers résultats numériques

Instances	$\|V\|$	Opt	$\sharp Opt$	$CPU(s)$	$\frac{Opt_1}{Nd}$	A_{120s}	H	H_{120s}
kroA100	100	11	76596	748	16%	12	13	12
kroB100	100	11	1954	624	37%	12	16	12
kroC100	100	10	60	934	87%	11	13	12
kroD100	100	11	21074	838	2%	11	15	12
kroE100	100	11	14070	1040	91%	12	14	12
eil101	101	12	8	1871	65%	13	16	15
ch130	130	12	154670	21695	85%	13	15	14

Table: Résultats numériques de l'algorithme exact et l'heuristique sur des instances de la TSPLIB.

Premiers résultats numériques

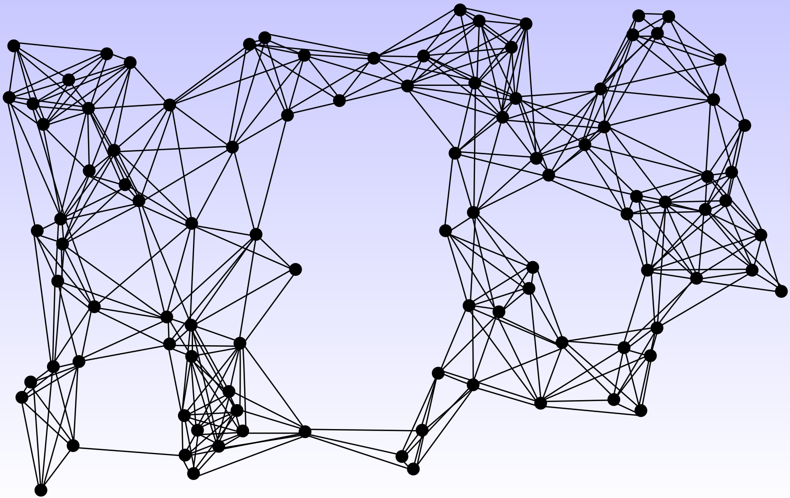
Graphes	$\vert V\vert$	Opt	$CPU(s)$	A_{120s}	H	H_{120s}
Random40	40	7	0	-	8	7.5
Random50	50	11	0.26	-	12.66	11.66
Random60	60	11.4	1.62	-	13.4	11.6
Random70	70	10.75	5.42	-	12	11.25
Random80	80	10.66	38.79	-	13.88	11.55
Random90	90	10.5	200.45	-	13.62	11.75
Random100	100	11.33	884.33	12.1	14.4	12.5
Random110	110	10.88	2211	12.1	13.88	12.44

Table: Résultats numériques de l'algorithme exact et l'heuristique sur des instances aléatoires.

PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

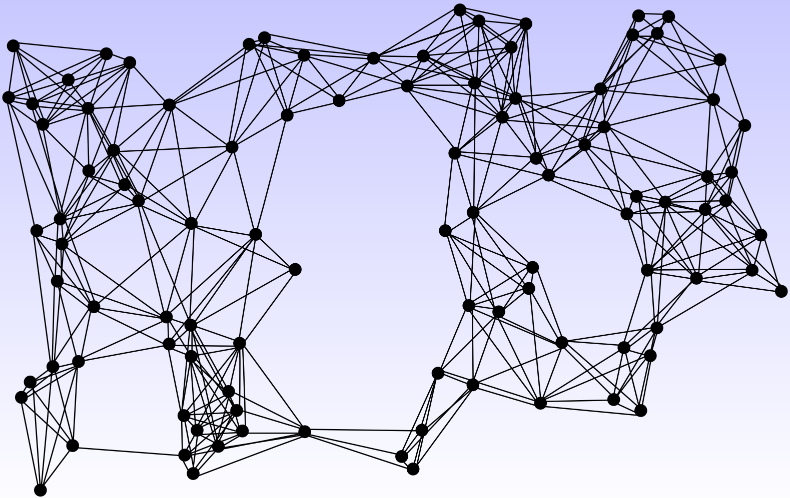
- Décomposition modulaire (vrais jumeaux, cliques).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

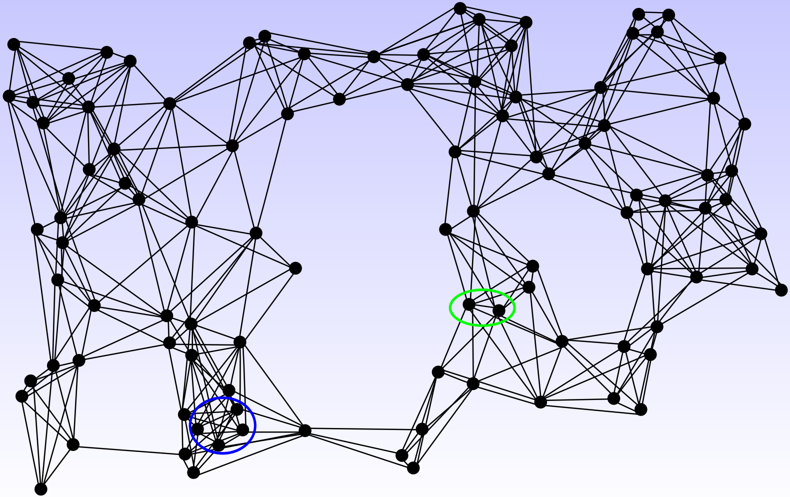
- Décomposition modulaire (vrais jumeaux, cliques).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

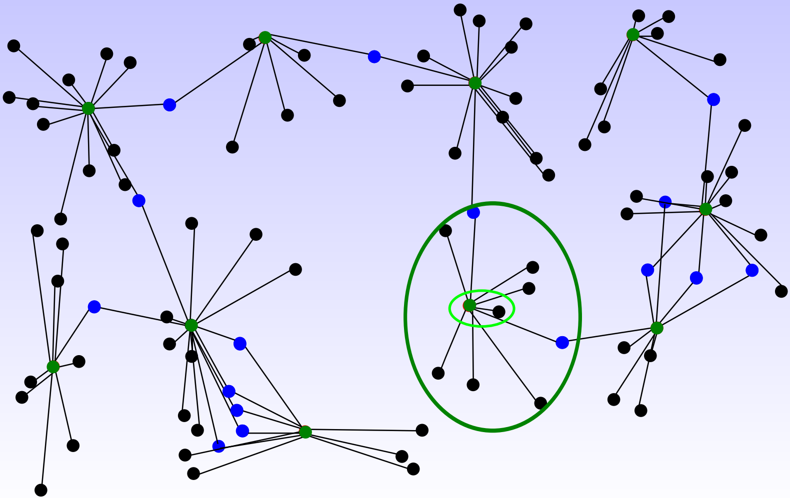
- Décomposition modulaire (vrais jumeaux, cliques).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

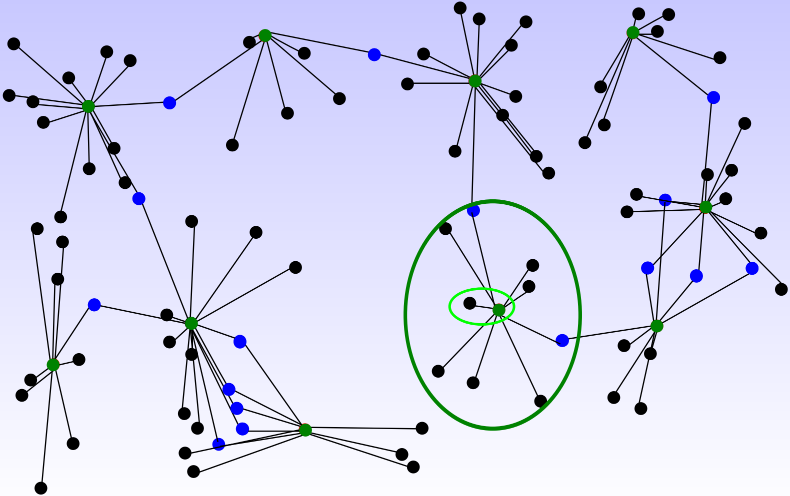
- Décomposition modulaire (vrais jumeaux, cliques).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

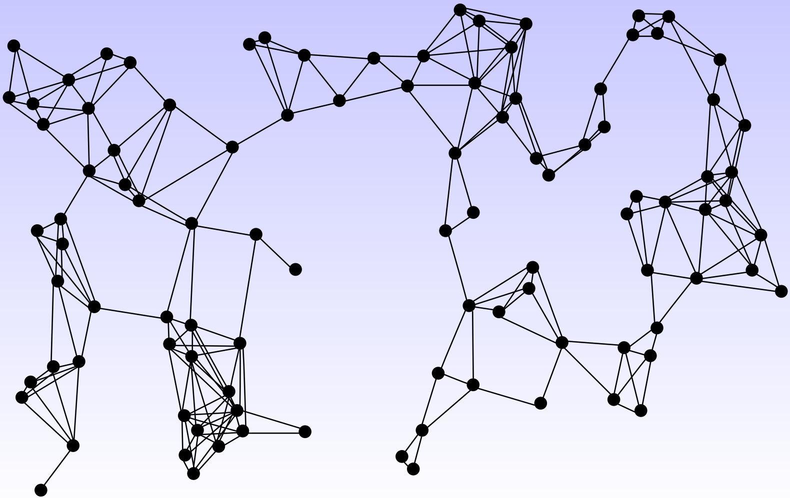
- Décomposition modulaire (vrais jumeaux, cliques).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

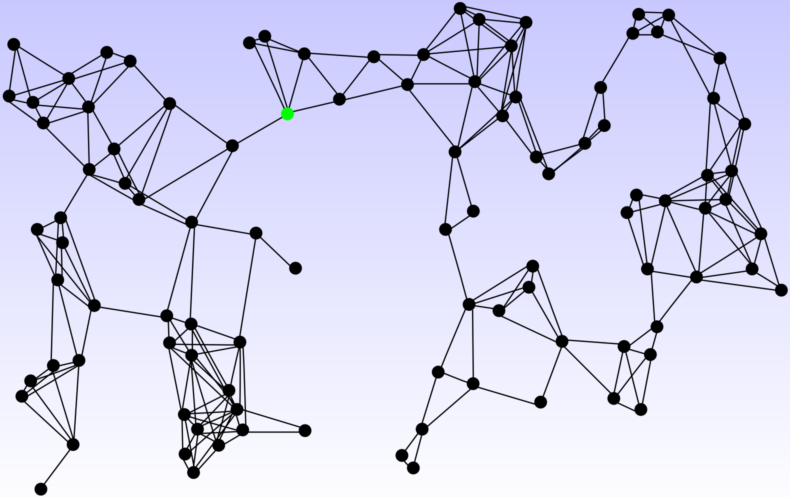
- Décomposition en coupes (point d'articulation).



PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

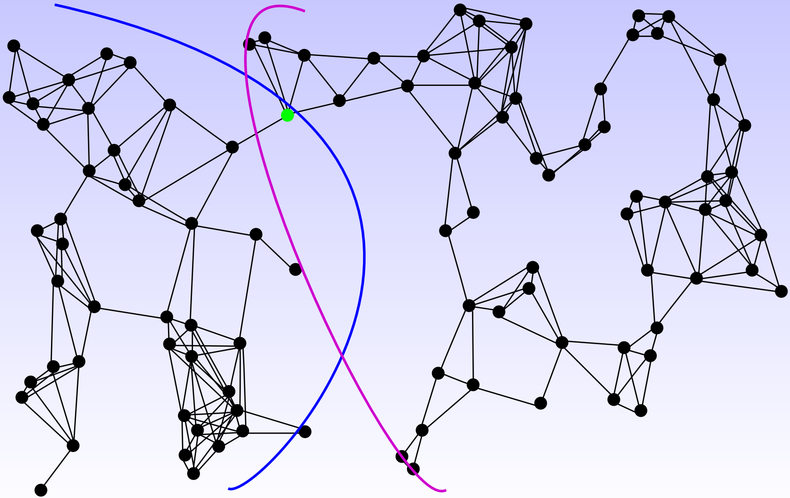
- Décomposition en coupes (point d'articulation).



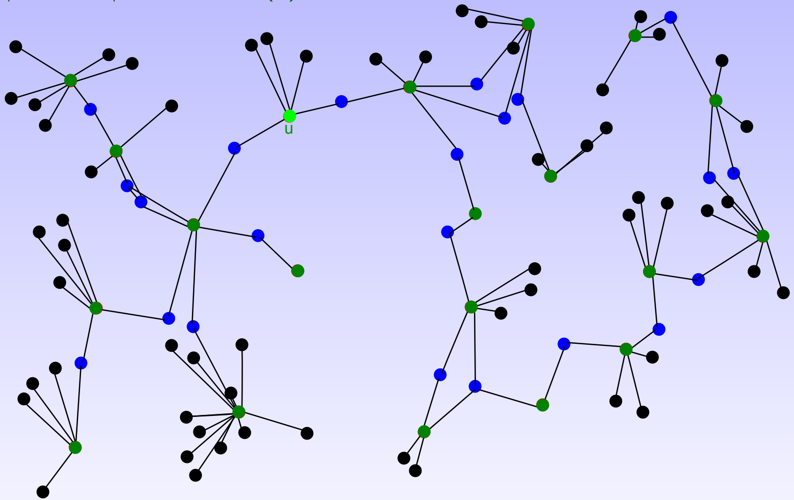
PERSPECTIVES

(1) Décomposition de graphes :

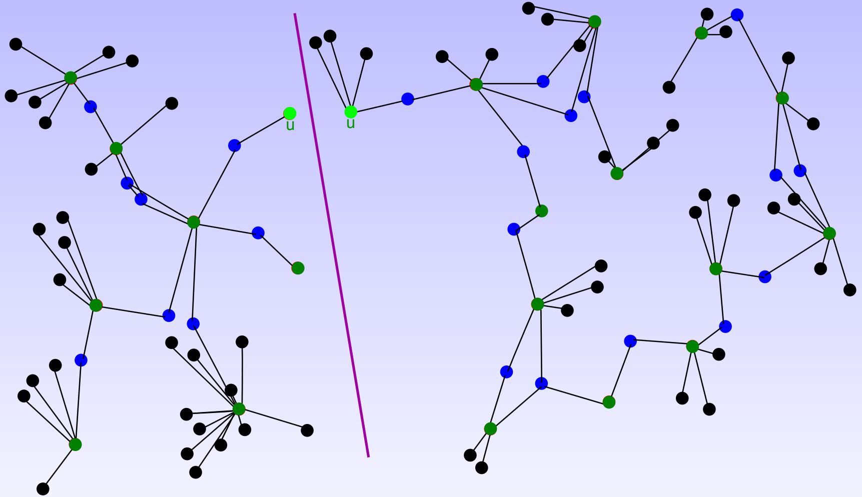
- Décomposition en coupes (point d'articulation).



$|MWCIS| = 20$, $CPU(s) = 2153$.



$|MWCIS_u(G1)| = 8$, $|MWCIS_u(G2)| = 13$ et $CPU(s) = 2.2$.



PERSPECTIVES

(2) Étude polyèdrale pour le problème du *MWCIS*.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

PERSPECTIVES

$$\min \sum_{u \in V} x(u)$$

$$x(u) + x(v) \leq 1, \ \forall (u,v) \in E \qquad (2)$$

$$\sum_{u \in \Gamma(W)} x(u) \geq 1, \ \forall W \subsetneq V \qquad (3)$$

$$x(u) \geq 0, \ \forall u \in V \qquad (4)$$

$$x(u) \in \{0,1\}, \ \forall u \in V \qquad (5)$$