

Projet EVA-Flo

Maîtriser les erreurs d'arrondi commises par votre ordinateur

Une exigence de qualité pour les calculs numériques en arithmétique flottante

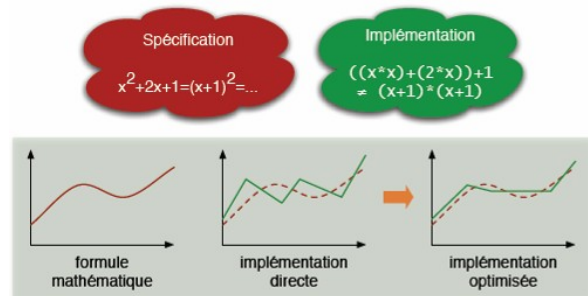
Lors du passage d'une formulation mathématique à un calcul numérique sur ordinateur, on aimerait que les résultats calculés soient proches des valeurs exactes. Or les ordinateurs calculent le plus souvent en arithmétique flottante : ils utilisent une représentation de taille finie et fixée pour les nombres et commettent donc, entre autres, des erreurs d'arrondi. Le premier objectif du projet EVA-Flo est d'évaluer numériquement une formule mathématique, de façon rapide et précise. On veut pouvoir spécifier la qualité du résultat calculé, par exemple une erreur absolue ou relative entre le résultat calculé et le résultat exact, ou la garantie qu'aucun débordement ne se produit (nombres trop grands, arrondis en ∞ , ou trop petits)...

Le deuxième objectif est que cette qualité soit quantifiée (par exemple « erreur relative $\leq 10^{-14}$ ») et garantie, le dernier objectif étant que ce processus d'évaluation et de validation soit automatisé.

Les formules mathématiques visées s'expriment à l'aide d'opérations arithmétiques ou algébriques et de fonctions mathématiques (exp, sin, atanh...), ainsi que de branchements conditionnels et de boucles. Il s'agit typiquement de petites portions critiques de plus gros codes numériques.

Automatiser, automatiser, automatiser l'expertise acquise

De nombreux exemples ont été traités à la main par le passé, le stade actuel est d'automatiser l'expertise ainsi acquise pour chacune des étapes. Tout d'abord, il s'agit de définir précisément le résultat mathématique cherché et de construire de bons approximations (faible erreur relative) qui conduisent à une implantation adaptée à un calcul sur ordinateur, typiquement des polynômes à coefficients flottants. Ensuite on détermine des schémas d'évaluation rapides et précis pour ces approximations, par exploration exhaustive ; il faut ici tenir compte des contraintes architecturales. Pour atteindre une précision satisfaisante, différentes techniques sont envisageables : utilisation de double-double, de schémas compensés... La mise au point de la preuve de la qualité du résultat ainsi calculé fait appel à des propriétés fines de l'arithmétique flottante, à des calculs en arithmétique par intervalles et en arithmétique à précision étendue... Ces preuves sont établies de façon à pouvoir être vérifiées par un assistant de preuve (Coq dans notre cas) : en effet ces preuves, impliquant beaucoup de cas particuliers, sont sujettes aux oublis et erreurs, d'où l'importance de les vérifier automatiquement.



La formulation mathématique, par exemple une fonction (à gauche) peut donner lieu à une implantation qui en est une mauvaise approximation (au centre). On aimerait obtenir une meilleure implantation (à droite) et de façon la plus automatisée possible.

Le projet « EVA-Flo Evaluation et Validation Automatique pour le calcul Flottant - New Automatic Tools for Validated Floating-point Computations » est un projet de **recherche fondamentale / recherche industrielle / développement expérimental** coordonné par Arénaire (LIP, ENS Lyon). Il associe aussi Dali (LP2A, U. Perpignan), MeASI (LIST, CEA Saclay), et Tropics (INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée). Le projet a commencé en janvier 2006 pour une durée de 48 mois : il bénéficie d'une aide ANR de 130 k€ pour un coût global de l'ordre de 1,5 M€.

IMPACTS

Résultats majeurs

Notre objectif d'automatisation s'est concrétisé par la création de logiciels :

- Sollya : recherche d'un bon approximant ;
- Gappa : preuve de qualité numérique, vérifiable par Coq ;
- CRlibm : fonctions mathématiques avec arrondi correct ; à l'origine de la recommandation de la norme IEEE 754-2008 d'inclure les fonctions mathématiques avec arrondi correct ;
- Flip : arithmétique flottante sur certains DSP ;
- calcul numérique sur GPU ;
- Fluctuat : analyse de la qualité numérique de codes scientifiques (pré-existant au projet) ;
- projet Sardanes : analyse et amélioration de la qualité d'expressions mathématiques.

Production scientifique et brevets

Outre les logiciels déjà cités, six thèses ont été soutenues. Une quinzaine d'articles de revues et une vingtaine de présentations lors de conférences internationales ont été produits. Enfin, l'expertise du groupe sur l'arithmétique flottante a donné lieu à un livre collectif, The Handbook of Floating-Point Arithmetic, à paraître à l'automne 2009. À noter aussi, la participation active et la présidence du groupe IEEE de normalisation de l'arithmétique par intervalles.