Annotations / opérateurs pour les arbres LEMA

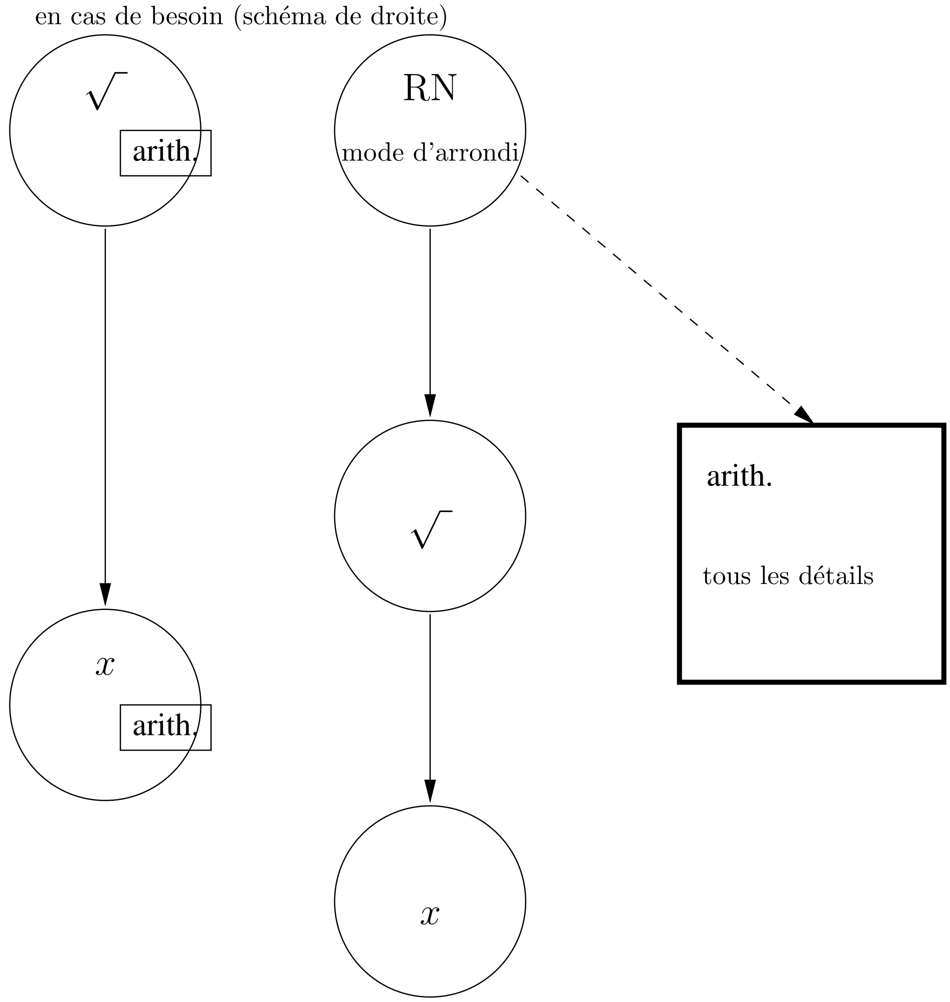
VL, NR

1er février 2008

1 Où s'est-on arrêté le 31 janvier ?

Deux points de vue ont été proposés, qui ne semblent pas foncièrement différents...

- soit on annote les opérations "purement" mathématiques par l'arithmétique utilisée (schéma de gauche)
- soit on exprime explicitement toutes les opérations effectuées, y compris les arrondis ; les opérations héritent / dépendent aussi d'une arithmétique en cas de besoin (schéma de droite)



2 Quelles annotations / opérateurs ?

D'après les transparents de Vincent et les notes de Nathalie prises pendant les différentes réunions EVA-Flo.

Note : dans tous les cas, il faut pouvoir distinguer les arrondis volontaires (nécessaires dans la conception de l'algorithme et qui sont vus comme de véritables fonctions mathématiques) des arrondis non volontaires.

2.1 Opérations et relations

À ajouter au lexique MathML :
- mantisse, exposant, exposant modulo
- mode d'arrondi : fonction ou relation dans le cas de l'arrondi fidèle ;
- opérateurs FMA, $\|.\|_2$;

Quid des informations sur la fonction calculée : est-elle continue, dérivable, $\mathcal{C}^2$, analytique... ? Si on dispose de ces informations, elles devront apparaître dans les annotations.

2.2 Arithmétique machine

À mettre soit dans les annotations (une arithmétique étant définie par un certain nombre de paramètres), soit dans la grosse boîte carrée dont héritent les opérateurs et opérandes :
- précision du calcul, cf. formats IEEE ;
- base de calcul ;
- présence ou non des dénormalisés ;
- plage pour les exposants.

À propos de la précision arbitraire : la précision désirée pour le code à générer est fixée au début de l'exécution, que dire de celle qui est utilisée en cours de route (pour les évaluations précises de polynômes, pour établir les encadrements...) ?

2.3 Informations sur les opérandes

On peut représenter à l'aide d'arbres, avec des opérations relationnels :
- majorant, strict ou non : $<$ ou $\leq$;
- minorant, strict ou non : $>$ ou $\geq$;
- plage restreinte de valeurs $a \leq x \leq b$;
- x est normalisé : à remplacer par $x = m.2^e$ avec $1/2 \leq m < 1$ et $-1023 \leq e \leq 1022$;
  c'est-à-dire remplacer x par l'arbre qui représente cette expression et qui hérite de l'arithmétique adéquate ;
- exprimer un domaine à trous : $[-1, 1] \setminus [-2^{-15}, 2^{-15}]$: à écrire ;
- ce résultat est mathématiquement valide (note : cela ne veut pas dire qu'il ne pourra pas prendre la valeur NaN : un NaN peut être possible à cause des erreurs d'arrondi).

Comment exprimer :
- ce résultat ne peut jamais prendre la valeur NaN ?

2.4 Erreur

Les erreurs sont données par leurs formules, qui sont représentables par des arbres :

- dire que, bien que le résultat soit calculé en flottant, il est exact (eg. Sterbenz) : avoir une relation d'égalité entre x exact et x calculé en flottant ?
- erreur ou borne d'erreur (absolue, relative, en ulp) : on a décidé de toujours donner la formule pour l'erreur sinon on ne sait pas de quoi on parle : erreur absolue $= x - \tilde{x}$ ou bien $|x - \tilde{x}|$? erreur relative : la formule n'est pas symétrique $(x - \tilde{x})/x$;
- erreur mathématique (eg. entre une fonction et son approximation polynomiale) ;
- comment exprimer l'erreur dans le cas où on a des double-doubles, triple-doubles : par les formules adéquates, qui ne sont pas nécessairement simples mais bon ;
- exprimer une erreur piecewise.

Distinction entre valeur exacte, approchée, cf. valeur modèle, sans erreur d'arrondi ou arrondie de Sylvie Boldo : un arbre pour chaque valeur et une opération ou relation établissant le lien entre ces arbres.

2.5 Exécution

Comment exprimer

- le parallélisme ;
- coût de calcul : délai, latence, mémoire, retard :

dans une boîte qui décrit l'arithmétique.

2.6 Preuve

Pour moi, ceci n'est pas résolu : comment exprimer ce qui suit ?

- preuves : soit des propriétés (i.e. déjà prouvées), soit des hypothèses (ou obligations de preuve en langage Coq/PVS, i.e. à prouver) ;
- trace d'une preuve, par exemple si un calcul par intervalles est effectué pour prouver un encadrement : conserver les bissections effectuées ;
- dire que l'on peut relaxer des contraintes (hypothèses selon la dénomination ci-dessus) si besoin, pour rendre le problème réalisable ou pour des questions d'optimisation.