

Le développement de certaines périodes exponentielles dans une base entière

Boris Adamczewski

Institut Camille Jordan
CNRS & Université Claude Bernard Lyon 1, France
Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr
<http://math.univ-lyon1.fr/~adamczew>

Périodes



M. Kontsevitch and D. Zagier, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer-Verlag, 2001.

Une **période** est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de \mathbb{R}^n définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Périodes



M. Kontsevitch and D. Zagier, *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer-Verlag, 2001.

Une **période** est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont les valeurs d'intégrales absolument convergentes de fractions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de \mathbb{R}^n définis par des (in)égalités polynomiales à coefficients rationnels.

Exemples :

$$\sqrt{2} = \int_{0 \leq 2x^2 \leq 1} dx, \quad \pi = \int_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy, \quad \log 3 = \int_1^3 \frac{1}{x} dx,$$

$$\zeta(s) = \int_{1 > x_1 > x_2 > \dots > x_s > 0} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_{s-1}}{x_{s-1}} \dots \frac{dx_s}{1 - x_s}.$$

Périodes exponentielles

Malheureusement, le nombre e n'est (conjecturalement !) pas une période.

Périodes exponentielles

Malheureusement, le nombre e n'est (conjecturalement !) pas une période.

Une **période exponentielle** est définie comme une période mais on autorise l'intégrande à être multiplié par l'exponentielle d'une fonction algébrique.

Périodes exponentielles

Malheureusement, le nombre e n'est (conjecturalement !) pas une période.

Une **période exponentielle** est définie comme une période mais on autorise l'intégrande à être multiplié par l'exponentielle d'une fonction algébrique.

Par exemple,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx,$$

l'exponentielle d'un nombre algébrique ou les valeurs des fonctions de Bessel et de la fonction Gamma aux points rationnels sont des périodes exponentielles.

L'article de Kontsevitch et Zagier se termine par la remarque suivante :

“Then all classical constants are periods in an appropriate sense”.

Développement d'une période dans une base entière

Dans cet exposé, on s'intéresse aux développements des périodes dans une base entière, par exemple au développement de $\sqrt{2}$, π ou e en base 10.

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 806\ 887 \dots$$

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643 \dots$$

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287 \dots$$

Développement d'une période dans une base entière

Dans cet exposé, on s'intéresse aux développements des périodes dans une base entière, par exemple au développement de $\sqrt{2}$, π ou e en base 10.

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 806\ 887 \dots$$

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643 \dots$$

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287 \dots$$

Principe d'indépendance : par défaut, le développement d'une période dans une base entière devrait avoir les mêmes propriétés que celui d'un **nombre choisi au hasard**.

Développement d'une période dans une base entière

Dans cet exposé, on s'intéresse aux développements des périodes dans une base entière, par exemple au développement de $\sqrt{2}$, π ou e en base 10.

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 806\ 887 \dots$$

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643 \dots$$

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287 \dots$$

Principe d'indépendance : par défaut, le développement d'une période dans une base entière devrait avoir les mêmes propriétés que celui d'un **nombre choisi au hasard**.

Attention, ce principe est valable... sauf évidence du contraire (pensez aux nombres rationnels).

La suite des chiffres d'un nombre choisi au hasard



É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909.

Nombre normal en base b : chaque bloc de chiffres de longueur n (il y en a exactement b^n) apparaît dans son développement en base b avec une fréquence égale à $1/b^n$.

Nombre normal : nombre normal en toute base entière.

La suite des chiffres d'un nombre choisi au hasard



É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909.

Nombre normal en base b : chaque bloc de chiffres de longueur n (il y en a exactement b^n) apparaît dans son développement en base b avec une fréquence égale à $1/b^n$.

Nombre normal : nombre normal en toute base entière.

Théorème (Borel, 1909). Presque tout nombre réel est normal.

La suite des chiffres d'un nombre choisi au hasard



É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909.

Nombre normal en base b : chaque bloc de chiffres de longueur n (il y en a exactement b^n) apparaît dans son développement en base b avec une fréquence égale à $1/b^n$.

Nombre normal : nombre normal en toute base entière.

Théorème (Borel, 1909). Presque tout nombre réel est normal.

Les nombres $0.23571113171923\dots$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n 10^{5^n}}$ sont normaux en base 10, mais on ne connaît aucun nombre normal.

Complexité des nombres réels



M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math., 1938.

La **fonction de complexité** de $\xi = a_0.a_1a_2\dots$ en base b est définie par :

$$p(n, \xi, b) = \text{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+n-1}), j \geq 1\}.$$

Il s'agit d'une mesure classique de la complexité d'une suite en **dynamique symbolique** qui raffine la notion d'**entropie topologique**.

Complexité des nombres réels



M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math., 1938.

La **fonction de complexité** de $\xi = a_0.a_1a_2\dots$ en base b est définie par :

$$p(n, \xi, b) = \text{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+n-1}), j \geq 1\}.$$

Il s'agit d'une mesure classique de la complexité d'une suite en **dynamique symbolique** qui raffine la notion d'**entropie topologique**.

Si ξ est normal en base b , alors sa complexité est maximale :

$$p(n, \xi, b) = b^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Nombres rationnels et complexité

Théorème (Morse & Hedlund, 1940). $\xi \in \mathbb{Q} \iff p(n, \xi, b)$ est bornée pour toute base b .

On comprend dès lors qu'il est difficile (mais intéressant) de minorer la complexité dans une base entière d'un nombre tel que $\zeta(5)$.

Nombres rationnels et complexité

Théorème (Morse & Hedlund, 1940). $\xi \in \mathbb{Q} \iff p(n, \xi, b)$ est bornée pour toute base b .

On comprend dès lors qu'il est difficile (mais intéressant) de minorer la complexité dans une base entière d'un nombre tel que $\zeta(5)$.

Morse et Hedlund ont également donné une première minoration non triviale pour tout nombre dont on sait prouver l'irrationalité.

Théorème (Morse & Hedlund, 1940). Si ξ est un nombre irrationnel, alors $p(n, \xi, b)$ est strictement croissante et donc

$$p(n, \xi, b) \geq n + 1, \quad \forall n \geq 1.$$

Les plus simples des périodes : les nombres algébriques

Les plus simples des périodes : les nombres algébriques



S. Ferenczi and Ch. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory, 1997.

Théorème (Ferenczi & Mauduit, 1997). Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$

Les plus simples des périodes : les nombres algébriques



S. Ferenczi and Ch. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory, 1997.

Théorème (Ferenczi & Mauduit, 1997). Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$

Outils : *version p -adique* du théorème de Roth + combinatoire des mots sturmiens.

Le théorème de Roth



K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, *Mathematika*, 1955.

Théorème (Roth, 1955). Soient ξ un nombre algébrique et $\varepsilon > 0$. Alors, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q .

Bégaiements et approximations rationnelles

Si le développement en base 10 d'un nombre réel ξ commence par

0.123 735 418 923 923 923 923 712 ...
motif bégayant

Bégaiements et approximations rationnelles

Si le développement en base 10 d'un nombre réel ξ commence par

$$0.123\,735\,418\,\underbrace{923\,923\,923\,923}_{\text{motif bégayant}}\,712\,\dots$$

Alors, ξ est **proche** du nombre rationnel

$$\frac{p}{q} := 0.123\,735\,418\,\overline{923} := 0.123\,735\,418\,923\,923\,923\,923\,\dots\,923\,\dots$$

Bégaiements et approximations rationnelles

Si le développement en base 10 d'un nombre réel ξ commence par

$$0.123\,735\,418\,\underbrace{923\,923\,923\,923}_{\text{motif bégayant}}\,712\,\dots$$

Alors, ξ est **proche** du nombre rationnel

$$\frac{p}{q} := 0.123\,735\,418\,\overline{923} := 0.123\,735\,418\,923\,923\,923\,923\,\dots\,923\,\dots$$

Plus précisément,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{9}{12} > 0 \quad \text{et} \quad q = 10^9(10^3 - 1).$$

Bégaiements et approximations rationnelles

Si le développement en base 10 d'un nombre réel ξ commence par

$$0.123\,735\,418\,\underbrace{923\,923\,923\,923}_{\text{motif bégayant}}\,712\,\dots$$

Alors, ξ est **proche** du nombre rationnel

$$\frac{p}{q} := 0.123\,735\,418\overline{923} := 0.123\,735\,418\,923\,923\,923\,923\,\dots\,923\,\dots$$

Plus précisément,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{9}{12} > 0 \quad \text{et} \quad q = 10^9(10^3 - 1).$$

Ferenczi et Mauduit montrent que si ξ a une **trop faible complexité** en base b , alors il existe $\varepsilon > 0$ et une infinité de nombres rationnels p_n/q_n tels que

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}}$$

où q_n est de la forme $b^r(b^s - 1)$.

Complexité des nombres algébriques



B. Adamczewski & Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, *Annals of Math.*, 2007.

Théorème (A. & Bugeaud, 2007). Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(\xi, b, n)}{n} = +\infty.$$

Complexité des nombres algébriques



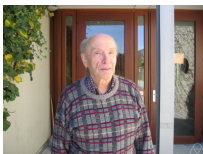
B. Adamczewski & Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, *Annals of Math.*, 2007.

Théorème (A. & Bugeaud, 2007). Soient ξ un nombre algébrique irrationnel et $b \geq 2$ un entier. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(\xi, b, n)}{n} = +\infty.$$

Outils : *version p -adique* du théorème du sous-espace de Schmidt + combinatoire élémentaire des suites de complexité en $O(n)$ (principe des tiroirs).

Le théorème du sous-espace de Schmidt



W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., Springer, 1980.


Généralisation spectaculaire du théorème de Roth exprimée en termes d'approximation simultanée de formes linéaires à coefficients algébriques.

Le théorème du sous-espace de Schmidt



 W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., Springer, 1980.

Généralisation spectaculaire du théorème de Roth exprimée en termes d'approximation simultanée de formes linéaires à coefficients algébriques.

 Yu. Bilu, *The many faces of the subspace theorem [After Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier...]*, Séminaire Bourbaki, novembre 2006.

Plus de combinatoire...



V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, *Acta Arith.*, 2006.

Théorème (BHZ + AB+ A). Si la suite $(p(n, \mathbf{a}) - n)_{n \geq 1}$ est bornée, alors :

- soit \mathbf{a} commence par une infinité de motifs VVV' , avec $V' \prec V$ pas trop court ;
- soit \mathbf{a} commence par des motifs UW^k , avec k arbitrairement grand et U pas trop long.

Plus de combinatoire...



V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, *Acta Arith.*, 2006.

Théorème (BHZ + AB+ A). Si la suite $(p(n, \mathbf{a}) - n)_{n \geq 1}$ est bornée, alors :

- soit \mathbf{a} commence par une infinité de motifs VVV' , avec $V' \prec V$ pas trop court ;
- soit \mathbf{a} commence par des motifs UW^k , avec k arbitrairement grand et U pas trop long.

Formellement, on montre que l'**exposant diophantien** de \mathbf{a} vérifie :

$$\mathbf{dio}(\mathbf{a}) > 2.$$

Plus de combinatoire...



V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, Acta Arith., 2006.

Théorème (BHZ + AB+ A). Si la suite $(p(n, \mathbf{a}) - n)_{n \geq 1}$ est bornée, alors :

- soit \mathbf{a} commence par une infinité de motifs VVV' , avec $V' \prec V$ pas trop court ;
- soit \mathbf{a} commence par des motifs UW^k , avec k arbitrairement grand et U pas trop long.

Formellement, on montre que l'**exposant diophantien** de \mathbf{a} vérifie :

$$\mathbf{dio}(\mathbf{a}) > 2.$$

Outils : combinatoire fine des mots sturmiens (fractions continues, numération d'Ostrowski).

Moins d'arithmétique : généralisation du théorème de Ferenczi et Mauduit

Théorème (A. 2009). Si l'exposant d'irrationalité de ξ est égal à 2, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$



B. Adamczewski, *On the expansion of some exponential periods in an integer base*, Math. Ann., 2009.

L'**exposant d'irrationalité** de ξ est égal à 2 si pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q .

Moins d'arithmétique : généralisation du théorème de Ferenczi et Mauduit

Théorème (A. 2009). Si l'exposant d'irrationalité de ξ est égal à 2, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\xi, b, n) - n = +\infty.$$



B. Adamczewski, *On the expansion of some exponential periods in an integer base*, Math. Ann., 2009.

L'**exposant d'irrationalité** de ξ est égal à 2 si pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

n'a qu'un nombre fini de solutions rationnelles p/q .

On a **plus besoin d'information p -adique** !

Application à certaines périodes exponentielles



La formule d'Euler

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

Application à certaines périodes exponentielles



La formule d'Euler

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

implique que l'exposant d'irrationalité de e est égal à 2.

Application à certaines périodes exponentielles



La formule d'Euler

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

implique que l'exposant d'irrationalité de e est égal à 2.

Corollaire. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n, e, b) - n = +\infty$, pour tout entier $b \geq 2$.

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, \quad a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right), a \in \mathbb{N}, a \neq 0, \sqrt{\frac{v}{u}} \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right), u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0;$$

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right), a \in \mathbb{N}, a \neq 0, \sqrt{\frac{v}{u}} \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right), u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0;$$

$$\frac{J_{(p/q)+1}(2/q)}{J_{p/q}(2/q)}, p/q \in \mathbb{Q}, \text{ où } J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz/2)^{2n}}{n! \Gamma(\lambda + n + 1)}$$

désigne la fonction de Bessel du premier ordre.

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right), a \in \mathbb{N}, a \neq 0, \sqrt{\frac{v}{u}} \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right), u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0;$$

$$\frac{J_{(p/q)+1}(2/q)}{J_{p/q}(2/q)}, p/q \in \mathbb{Q}, \text{ où } J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz/2)^{2n}}{n! \Gamma(\lambda + n + 1)}$$

désigne la fonction de Bessel du premier ordre.

- Opérations du type $\times \mathbb{Q} + \mathbb{Q}$.

Application à certaines périodes exponentielles

- Il est en fait possible de remplacer le nombre e par :

$$e^a, a \in \mathbb{Q}, a \neq 0;$$

$$\tan\left(\frac{1}{a}\right), \sqrt{a} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right);$$

$$\tanh\left(\frac{2}{a}\right), a \in \mathbb{N}, a \neq 0, \sqrt{\frac{v}{u}} \tanh\left(\frac{1}{\sqrt{uv}}\right), u, v \in \mathbb{N}, uv \neq 0;$$

$$\frac{J_{(p/q)+1}(2/q)}{J_{p/q}(2/q)}, p/q \in \mathbb{Q}, \text{ où } J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz/2)^{2n}}{n! \Gamma(\lambda + n + 1)}$$

désigne la fonction de Bessel du premier ordre.

- Opérations du type $\times \mathbb{Q} + \mathbb{Q}$.
- On peut aussi faire agir $GL_2(\mathbb{Z})$ sur n'importe lequel de ces nombres $((a\xi + b)/(c\xi + d))$ avec $|ad - bc| = 1$.

De façon surprenante, on ne sait pas améliorer le théorème de Morse et Hedlund pour des périodes comme π , $\log 2$ ou $\zeta(3)$!