

Utilisation des Filtres de Chebycheff et Construction de Préconditionneurs Spectraux pour l'Accélération des Méthodes de Krylov

Ahmed Touhami

CNRS ENS de Lyon
Ahmed.Touhami@ens-lyon.fr

Le Contexte de cet exposé est l'algèbre linéaire numérique. Plus précisément, on s'intéresse à des préconditionnements pour les méthodes de Krylov, basés sur une connaissance de certains espaces propres. Ces techniques sont en particulier très utiles lorsque l'on résout une séquence de systèmes linéaires avec la même matrice mais différents second membres. L'information sur les espaces propres est extraite dans une phase d'initialisation, ou au cours de la résolution du premier système, et utilisée dans la résolution des systèmes suivants.

Dans une première partie, je considérerais le cas où le système linéaire est symétrique défini positif. Pour résoudre ce type de système, la méthode itérative de choix est le gradient conjugué. Le but de cette méthode est de trouver $\mathbf{x}^{(m)} \in \mathbf{x}^{(0)} + \mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \mathbf{r}^{(0)})$ minimisant la quantité suivante appelée erreur : $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(m)}\|_{\mathbf{A}}$, et où $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$ est le résidu initial. Comme les espaces de Krylov sont emboîtés et de taille croissante, l'erreur ne peut que décroître au sens large au fur et à mesure de la construction de ces espaces. La motivation de ce premier travail est partie du fait que la convergence de la méthode de gradient conjugué est souvent pénalisée dès que le système linéaire à résoudre possède des valeurs propres au voisinage de zéro. Plusieurs techniques sont proposées dans la littérature, pour atténuer l'effet néfaste de ces plus petites valeurs propres, en mettant à jour le préconditionneur ou en contraignant la méthode du gradient conjugué à travailler dans le complémentaire orthogonal du sous espace invariant associé aux plus petites valeurs propres. La première partie de cet exposé sera consacrée à une étude comparative sur le comportement et l'efficacité numériques de ces différentes techniques. Parmi ces techniques, je considérerais dans un premier temps l'algorithme CHEBYCHEFF-PSF permettant de réaliser une factorisation partielle spectrale. Ce dernier est basé sur des filtres polynomiaux de Chebycheff combinés avec le processus de Lanczos pour calculer, avec différents niveaux de filtrage ε , une base orthogonale $\mathbf{W}(\varepsilon)$ du sous espace invariant associé aux plus petites valeurs propres. Cette information spectrale est ensuite exploitée dans des techniques de déflation ainsi que des algorithmes deux-grilles, pour lesquels on a testé différents lisseurs. Tous ces algorithmes ont été implémentés en MATLAB pour l'évaluation de leurs potentiels ou de leurs limitations.

Dans une deuxième partie, une nouvelle approche basée sur une combinaison de la méthode du gradient conjugué avec des filtres polynomiaux de Chebycheff comme préconditionneurs, sera présentée. Cette technique vise à mettre la méthode du gradient conjugué dans un mode particulier (*i.e cluster*), où le conditionnement du système linéaire n'est pas tellement réduit, mais son spectre en grande partie regroupé autour de 1. Ce préconditionnement consiste à appliquer les filtres polynomiaux de Chebycheff, seulement, à une partie du spectre de la matrice d'itérations pour pouvoir décaler la quasi totalité des valeurs propres du système linéaire près de 1, sans dégrader la distribution des plus petites valeurs propres. La méthode se distingue par sa capacité à construire une base de Krylov de taille petite, très riche en ce qui concerne les plus petits vecteurs propres/valeurs propres. Cette base de Krylov peut être réutilisée dans un deuxième niveau de préconditionnement pour une multirésolution, c'est-à-dire une résolution d'une séquence de systèmes linéaires avec la même matrice mais différents seconds membres.

Cette technique de préconditionnement requiert principalement la multiplication d'un vecteur par la matrice initiale et quelques mises-à-jour de vecteur, mais aucuns produits scalaires. Cette remarque est très importante dans le contexte du calcul parallèle, et en particulier dans les environnements à mémoire distribuée où le calcul des produits scalaires exigent une attention particulière. Enfin, nos algorithmes sont testés sur des exemples extraits de la bibliothèque Harwell-Boeing et sur des problèmes d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP).

Dans une troisième partie, j'introduirais une nouvelle technique adaptative de préconditionnement dans le cadre d'une multirésolution issue d'un processus de linéarisation. Le préconditionneur est basé sur l'information des sous espaces de Krylov produite aux étapes précédentes dans l'itération non-linéaire. L'approche sera validée sur des problèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides (Navier-Stokes) et sur des méthodes de décomposition de domaine pour la résolution de problèmes elliptiques.