Proposition de stage : vers les spectraèdres p-adiques, définition et propriétés algorithmiques

Tristan Vaccon* et Simone Naldi†

Le présent sujet de stage porte sur la généralisation à des corps p-adiques de la notion de spectraèdre et aux calculs effectifs qui en découlent. Le stage se déroulera à l'Université de Limoges.

Mots clefs. spectraèdre, corps non-archimédiens, algorithmique p-adique

1 Introduction

Definition 1.1. Soient $A_0, A_1, \ldots A_n$ des matrices symétriques réelles de taille $d \times d$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n.$$

On définit le *spectraèdre* associé à A par :

$$S_A := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A(x) \text{ est semi-définie positive}\}.$$

Autrement dit, un spectraèdre est une section affine du cône des matrices réelles symétriques semi-définies positives (en particulier, c'est un ensemble convexe).

Example 1.2. En prenant $n = 4$, et

$$A(x, y, z) := \begin{bmatrix} 1+x & y & 0 & 0 \\ y & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-z \end{bmatrix},$$

on voit facilement que le spectraèdre correspondant est une portion de cylindre plein :

$$S_A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ -1 \leq z \leq 1\right\}.$$

Une sous-classe speciale de spectraèdres est celle des *polyèdres*: si les matrices $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont diagonales, S_A est le polyèdre définie par les fonctions affines

*tristan.vaccon@unilim.fr
†simone.naldi@unilim.fr

définies par la diagonale de $A(x)$. Le problème de decider, à partir des matrices définissant un spectraèdre S_A, si l'ensemble est un polyèdre est NP-dur [10] et des aspects algorithmiques ont été étudiés en [3].

L'étude des spectraèdres possède des applications nombreuses notamment en *optimisation* grâce à la *programmation semi-définie (SDP)*, ainsi qu'en géométrie algébrique [4]. Les spectraèdres sont à la programmation semi-définie ce que les polyèdres sont à la programmation linéaire. Le problème de decider si un spectraèdre S_A est vide à partir d'une matrice linéaire A, autrement dit, si le problème SDP associé est admissible, a été étudié [8, 7].

Généraliser la notion de spectraèdre à des corps autres que $\mathbb{R}$ est une question intéressante, notamment si on veut résoudre des problèmes d'optimisation qui ne sont pas sur des objets réels.

2 Sujet

En 2016, Allamigeon, Gaubert et Skomra ont définit des spectraèdres sur le corps des séries de Puiseux à coefficients réels, ce qui leur a permis de définir les *spectraèdres tropicaux* [2] et de demontrer une version tropicale de la conjecture de Helton-Nie sur l'existence de représentations semi-définies d'ensembles semi-algébriques convexes [1].

Nous souhaiterions aller maintenant vers d'autres corps non-archimédiens. Le présent stage consistera à

- Un travail bibliographique sur les spectraèdres, les corps non-archimédiens, la géométrie tropicale, et les travaux d'Allamigeon, Gaubert et Skomra ;
- Un travail bibliographique sur les corps p-adiques et comment calculer sur ces corps (voir [5]) ;
- L'étude d'une définition de spectraèdres qui aurait du sens sur des corps non-archimédiens ;
- L'étude algorithmique des questions liées aux spectraèdres ainsi définis : déterminer s'ils sont non-vides, calculer de bonnes représentations, minimiser la norme d'une fonction linéaire sur un spectraèdre p-adique. On souhaiterait des études de complexité et des implantations dans Sagemath.
- Si le temps le permet, s'intéresser à la généralisation aux p-adiques de la notion de polynômes hyperboliques et étudier leur lien avec les spectraèdres (Conjecture de Lax généralisée, voir [6, 9]).

References

[1] X. Allamigeon, S. Gaubert, and M. Skomra. The tropical analogue of the Helton–Nie conjecture is true. *Journal of Symbolic Computation*, 91:129–148, 2019.

[2] X. Allamigeon, S. Gaubert, and M. Skomra. Tropical spectrahedra. *Discrete & Computational Geometry*, 63(3):507–548, 2020.

[3] A. Bhardwaj, P. Rostalski, and R. Sanyal. Deciding polyhedrality of spectrahedra. *SIAM Journal on Optimization*, 25(3):1873–1884, 2015.

[4] G. Blekherman, P.A. Parrilo, and R.R. Thomas. *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*, volume 13. SIAM, 2013.

[5] Xavier Caruso. Computations with p-adic numbers. *Les cours du CIRM*, 5(1), 2017. talk:2.

[6] J.W. Helton and V. Vinnikov. Linear matrix inequality representation of sets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(5):654–674, 2007.

[7] D. Henrion, S. Naldi, and M. Safey El Din. Exact algorithms for linear matrix inequalities. *SIAM J. Optim.*, 26(4):2512–2539, 2016.

[8] L. Khachiyan and L. Porkolab. On the complexity of semidefinite programs. *Journal of Global Optimization*, 10(4):351–365, 1997.

[9] M. Kummer, S. Naldi, and D. Plaumann. Spectrahedral representations of plane hyperbolic curves. *Pacific J. Math.*, 303(1):243–263, 2019.

[10] M.V. Ramana. Polyhedra, spectrahedra, and semidefinite programming. *Topics in semidefinite and interior-point methods, Fields Institute Communications*, 18:27–38, 1997.