Sujet stage L3 : Substitutions et k-reconnaissabilité dans les automates cellulaires unilatères : Des outils pour étudier la décidabilité du problème de finitude des groupes d'automate.

2023

Proposé par Martin Delacourt et Nicolas Ollinger (LIFO, Orléans)

Les groupes d'automates sont définis à l'aide d'automates de Mealy (transducteurs 1-1 déterministes complets) et ont servi notamment à produire des exemples pour des propriétés classiques de théorie des groupes [1]. Différents problèmes de décision ont obtenu des réponses différentes : le problème du mot par exemple est décidable, alors que le problème de conjugaison ne l'est pas [2]. Nous nous intéressons ici au problème de finitude qui est fortement lié au problème de périodicité des automates cellulaires unilatères (ACU).

Les automates cellulaires (AC) sont des modèles de calcul parallèle [3]. Dans le cas de la dimension 1, une configuration est une ligne infinie de cellules contenant chacune un état pris dans un ensemble fini. La dynamique est donnée par une règle locale (chaque cellule n'a accès qu'à l'état de ses voisines) appliquée simultanément en chaque cellule, ce qui produit la configuration image. L'action répétée de cette transformation globale engendre le diagramme espace-temps de l'AC partant d'une configuration initiale.

On s'intéresse ici au cas particulier des AC unilatères, c'est-à-dire que chaque cellule ne voit que sa voisine de droite, l'information ne peut donc se propager que dans une direction, ce qui n'est dans le cas général qu'un décalage d'un AC classique. Si l'on exige de plus la réversibilité (l'inverse doit aussi être donné par une règle locale unilatère dans le même sens), on obtient cette fois une sous-classe stricte des AC réversibles, bien plus contrainte.

Le problème de la périodicité est indécidable dans le cas général mais ouvert pour les ACU. Des résultats préliminaires [4] ont été démontrés en utilisant l'équivalence connue entre expressivité des k-substitutions, des ensembles k-reconnaissables et des formules définies dans la logique du premier ordre [5]. Certains diagrammes espace-temps d'ACU réversibles sont en effet semblables à des configurations substitutives. On peut d'autre part décider quelles configurations substitutives peuvent être des diagrammes d'ACU. On va donc chercher dans ce stage à caractériser les ensembles de points k-reconnaissables qui peuvent être « marqués »par une règle d'ACU réversible, donnant ainsi des outils pour implémenter des constructions dans les ACU.

Les travaux en cours utilisent walnut [6,7], un logiciel de calcul des transformations entre substitutions, reconnaissabilité par automate et définissabilité dans la logique du premier ordre.

[1] Bartholdi, L.,Silva, P.V. :Groups defined by automata, in AutoMath A handbook, https ://arxiv.org/abs/1012.1531.

[2] Sunic, Z.,Ventura, E. : The conjugacy problem in automaton groups is not solvable. Journal of Algebra 364, 148-154(2012).

[3] Kari, J. : Theory of cellular automata : A survey. Theoretical computer science 334(1),3-33(2005).

[4] Delacourt, M., Ollinger, N. : Permutive one-way cellular automata and the finiteness problem for automaton groups. Computability in Europe (CiE2017), LNCS (Springer, Berlin, 2017).

[5] Bruyere, V., Hansel, G., Michaux, C., Villemaire, R. : Logic and p-recognizable sets of integers. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin 1(2), 191-238 (1994).

[6] Mousavi, H. : Automatic Theorem Proving in Walnut. arXiv :1603.06017 [cs.FL].

[7] Shallit, J. : The Logical Approach to Automatic Sequences : Exploring Combinatorics on Words with Walnut. London Mathematical Society Lecture Note Series,Cambridge University Press (2022)