UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR — Inria — COATI — cnrs — i3s sophia antipolis

David Coudert
Tel: +33 (0)4 92 38 79 81
E-mail: david.coudert@inria.fr

Sophia Antipolis, 10 février 2023

Titre: *Bornes inférieures pour la largeur de coupe des graphes*

La largeur de coupe (*cutwidth*) est un paramètre de graphe utilisé dans de nombreux problèmes d'ordonnancement linéaire (*layout*) des sommets du graphe [3]. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, il s'agit de trouver un ordre $\sigma = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ des sommets du graphe permettant de minimiser une fonction de coût. De nombreux problèmes d'optimisation peuvent être formulés comme des problèmes d'ordonnancement linéaire (*pathwidth*, *treewidth*, *bandwidth*, *cutwidth*, etc.) [3]. Dans le cas de la cutwidth, on s'intéresse aux coupes arêtes. Si $X \subset V$ est un sous-ensemble des sommets du graphe, l'ensemble des arêtes avec un sommet dans X et un autre dans $V \setminus X$ est une coupe du graphe. Notons la taille de cette coupe $ec(X, V \setminus X)$. La largeur de coupe $w(G, \sigma)$ d'un ordre linéaire $\sigma = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est $\max_{1 \leq i < n-1} ec(X_i, V \setminus X_i)$, avec $X_i = (v_1, v_2, \cdots, v_i)$. La cutwidth d'un graphe G est la largeur minimale d'un ordonnancement linéaire de ses sommets : $cw(G) = \min\{w(G, \sigma) \mid \sigma$ est un ordonnancement linéaire de $G\}$.

Calculer la largeur de coupe est un problème NP-complet, mais il est possible de concevoir des algorithmes de *branch-and-bound* efficaces si on dispose de bonnes bornes inférieures pour couper des branches lors de l'exploration [5]. Savoir évaluer rapidement de bonnes bornes dans chaque nœud de l'arbre de recherche est donc crucial.

L'objectif de ce stage est d'abord de proposer des algorithmes efficaces pour calculer des bornes récentes [1]. Une de ces bornes est basées sur le « degré moyen maximum » du graphe, un problème qui peut se résoudre en temps polynomial (résolution basée sur la programmation linéaire) mais pour lequel aucun algorithme combinatoire efficace n'est connu. Une autre borne, de meilleure qualité, est inspirée de travaux sur l'agrégation de trafic dans les réseaux optiques [2]. Il s'agira ensuite de proposer de nouvelles bornes, et d'évaluer en pratique l'intérêt de ses bornes sur les performances d'un algorithme de branch-and-bound.

Pré-requis : théorie des graphes ; algorithmes ; langage de programmation (Python et/ou C).

Références.

1. J-C. Bermond, M. Cosnard, D. Coudert, F. Havet. Groupage sur le chemin pour borner la largeur de coupe. soumis, 2023.
2. J-C. Bermond, M. Cosnard, D. Coudert, and S. Pérennes. Optimal Solution of the Maximum All Request Path Grooming Problem. In AICT. IEEE, 2006.
3. J. Díaz, J. Petit, and M. Serna. A survey on graph layout problems. ACM Computing Surveys, 34(3) :313– 356, 2002.
4. A.C. Giannopoulou, M. Pilipczuk, J-F. Raymond, D.M Thilikos, and M. Wrochna. Cutwidth : Obstructions and algorithmic aspects. Algorithmica, 81 :557–588, 2019.
5. R. Martí, J. J. Pantrigo, A. Duarte, and E. G. Pardo. Branch and bound for the cutwidth minimization problem. Computers & Operations Research, 40(1) :137 – 149, 2013.