

Calcul de plus courts chemins dans des graphes pondérés paramétrés

Benjamin Monmege, Julie Parreaux et Pierre-Alain Reynier

LIS, Aix-Marseille Université

Objectif : proposer puis implémenter des algorithmes pour le calcul de l'ensemble des plus courts chemins en présence de poids paramétrés

Plus courts chemins Le calcul de plus courts chemins dans des graphes est un problème classique en informatique. L'extension au cadre des graphes pondérés est encore plus largement utilisée, et permet d'exprimer de nombreux problèmes naturels. On retrouve dans la littérature deux façons d'aborder ce problème : d'abord, en calculant les plus courts chemins à partir d'une source fixée (Dijkstra), et d'autre part en calculant les plus courts chemins entre toutes les paires de sommets du graphe (Floyd-Warshall).

Par ailleurs, le type de poids autorisé sur les arêtes introduit également des différences, en particulier la présence de poids négatifs, qui peuvent conduire à des cycles négatifs, doit être traitée de manière adaptée. Ainsi, l'algorithme de Bellman-Ford traite le cas d'une source unique en présence de poids négatifs (Floyd-Warshall gère aussi la présence de poids négatifs).

Extension paramétrée Les poids ne sont pas toujours connus précisément, ou peuvent dépendre d'un ou plusieurs paramètres en fonction de l'ajustement du système modélisé. Lorsque les valeurs exactes du ou des paramètres sont inconnues, il est utile de calculer les plus courts chemins pour toutes les valeurs possibles de ces paramètres. Initialement abordé dans [KO81] pour le cas d'un seul paramètre, et d'un sommet source unique, cet algorithme a récemment été généralisé dans [SJJ21], en présence d'un nombre quelconque de paramètres, mais toujours pour un sommet source unique.

Par ailleurs, dans le contexte de la vérification de systèmes, les matrices de différences bornées (DBM) ont été introduites dans [BM83, Dil89] pour représenter des contraintes portant sur les différences entre des variables. La normalisation de ces matrices correspond exactement à un calcul de plus courts chemins, entre toutes les paires de sommets. Dans ce contexte, une version paramétrée des DBMs a été proposée dans [AAB00]. Pour un modèle plus contraint, à un seul paramètre λ et dans lequel les coefficients sont de la forme $a + b\lambda$, avec $b \in \mathbb{N}$, une généralisation de Floyd-Warshall a été étudiée dans [Jau09, JR11], avec une application récente en vérification robuste [BMRS19].

Travail demandé Après un travail bibliographique, il vous est demandé de proposer un algorithme pour le calcul des plus courts chemins paramétrés entre toutes paires de sommets :

- d'abord dans le cas d'un unique paramètre,
- puis dans le cas général.

Développement logiciel Vous développerez ensuite un prototype afin d'étudier le passage à l'échelle de vos algorithmes. Ce développement pourra être réalisé dans le langage de votre choix.

Références

- [AAB00] Aurore Annichini, Eugene Asarin, and Ahmed Bouajjani. Symbolic techniques for parametric reasoning about counter and clock systems. In E. Allen Emerson and A. Prasad Sistla, editors, *Computer Aided Verification, 12th International Conference, CAV 2000, Chicago, IL, USA, July 15-19, 2000, Proceedings*, volume 1855 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 419–434. Springer, 2000.
- [BM83] Bernard Berthomieu and Miguel Menasche. An enumerative approach for analyzing time petri nets. In R. E. A. Mason, editor, *Information Processing 83, Proceedings of the IFIP 9th World Computer Congress, Paris, France, September 19-23, 1983*, pages 41–46. North-Holland/IFIP, 1983.
- [BMRS19] Damien Busatto-Gaston, Benjamin Monmege, Pierre-Alain Reynier, and Ocan Sankur. Robust controller synthesis in timed büchi automata : A symbolic approach. In Isil Dillig and Serdar Tasiran, editors, *Computer Aided Verification - 31st International Conference, CAV 2019, New York City, NY, USA, July 15-18, 2019, Proceedings, Part I*, volume 11561 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 572–590. Springer, 2019.
- [Dil89] David L. Dill. Timing assumptions and verification of finite-state concurrent systems. In Joseph Sifakis, editor, *Automatic Verification Methods for Finite State Systems, International Workshop, Grenoble, France, June 12-14, 1989, Proceedings*, volume 407 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 197–212. Springer, 1989.
- [Jau09] Rémi Jaubert. Aspects quantitatifs dans la réalisation de contrôleurs temps-réels robustes. Mémoire de Master Recherche, Master Informatique Fondamentale, Marseille, 2009.
- [JR11] Rémi Jaubert and Pierre-Alain Reynier. Quantitative robustness analysis of flat timed automata. In Martin Hofmann, editor, *Foundations of Software Science and Computational Structures - 14th International Conference, FOSSACS 2011, Held as Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2011, Saarbrücken, Germany, March 26-April 3, 2011. Proceedings*, volume 6604 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 229–244. Springer, 2011.
- [KO81] Richard M. Karp and James B. Orlin. Parametric shortest path algorithms with an application to cyclic staffing. *Discret. Appl. Math.*, 3(1) :37–45, 1981.
- [SJL21] Bastien Séré, Loïc Jezequel, and Didier Lime. An algorithm for single-source shortest paths enumeration in parameterized weighted graphs. In Alberto Leporati, Carlos Martín-Vide, Dana Shapira, and Claudio Zandron, editors, *Language and Automata Theory and Applications - 15th International Conference, LATA 2021, Milan, Italy, March 1-5, 2021, Proceedings*, volume 12638 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 279–290. Springer, 2021.