Schémas d'augmentation universels pour la navigation dans les réseaux

Pierre Fraigniaud (CNRS, U. Paris 7),
Cyril Gavoille (U. Bordeaux),
Adrian Kosowski (U. Gdansk, Pologne),
Zvi Lotker (U. Ben Gurion, Israël)
et Emmanuelle Lebhar (CNRS, U. Paris 7).

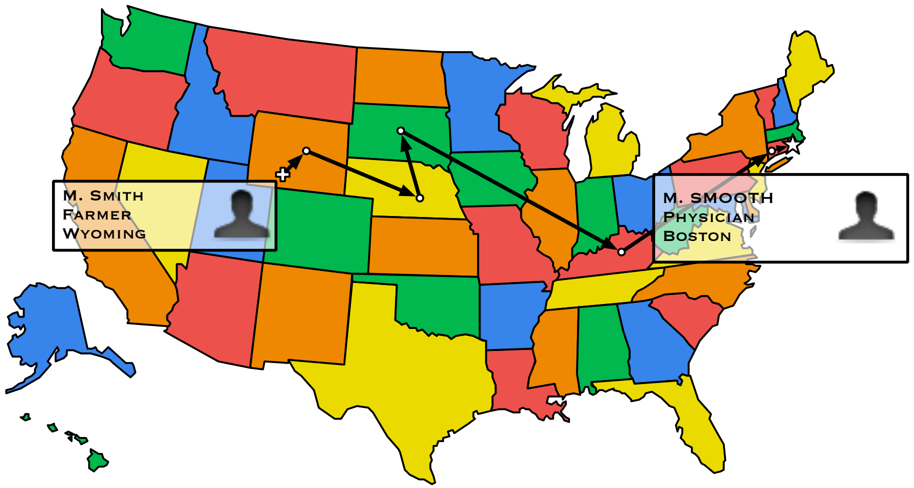
LIAFA

CENTRE NATIONAL
DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

université PARIS DIDEROT PARIS 7

Graphes augmentés

- "Effet petit monde": découverte de chemins très courts avec une vision locale.



- Modélisation [Kleinberg'00]:
  - L'algorithme glouton pour la recherche du chemin.
  - Les graphes augmentés pour la structure du réseau.

Graphes augmentés

- Graphe augmenté (G,φ):
  - un graphe G
  - + 1 lien aléatoire / noeud u selon une

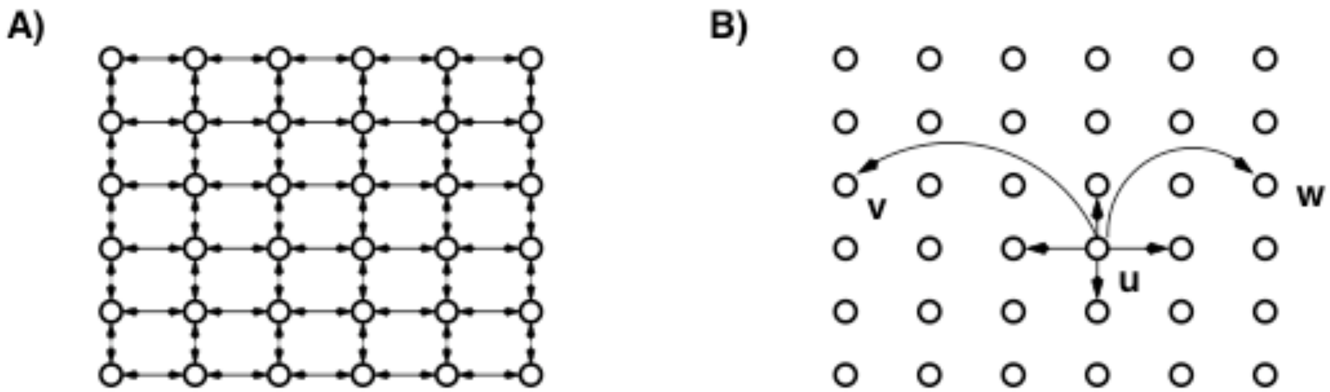
    distribution φ_u: $\varphi_u(v)=\Pr\{u \to v\}$.

Graphes augmentés

- Graphe augmenté (G,φ):
  - un graphe G
  - + 1 lien aléatoire / noeud u selon une

    distribution φ_u: $\varphi_u(v)=\Pr\{u \rightarrow v\}$.

Ex:



Distribution: $\Pr\{u \rightarrow v\}$ prop.elle à $1/|u\text{-}v|^2$

[Kleinberg 2000]

Navigation

- Routage glouton dans un graphe augmenté:
  - connaissance des distances dans G,
  - connaissance locale des liens aléatoires.

Navigation

- Routage glouton dans un graphe augmenté:
  - connaissance des distances dans G,
  - connaissance locale des liens aléatoires.

(G,φ), est f(n)-navigable ssi:

- Il existe une distribution φ t.q.
- le routage glouton dans (G,φ) calcule des routes d'espérance au plus f(n) entre toute paire.

Navigation

- **Routage glouton dans un graphe augmenté:**
  - **connaissance des distances dans G,**
  - **connaissance locale des liens aléatoires.**

(G,φ), est f(n)-navigable ssi:

- **Il existe une distribution φ t.q.**
- **le routage glouton dans (G,φ) calcule des routes d'espérance au plus f(n) entre toute paire.**

- **Exemple:**
  - **Les grilles de dim° d sont O($\log^2 n$)-navigables.**

Graphes navigables

- Graphes polylog(n)-navigables:
  - Grilles de dim° d [Kleinberg'00]/ Croissance bornée [Duchon, Hanusse,L.,Schabanel'05]/ dim° doublante bornée [Slivkins'05]/ largeur arborescente bornée [Fraigniaud'05]/ graphes excluant un mineur fixe [Abraham, Gavoille'06].

➡ Schémas d'augmentation <u>spécifiques</u>.

Graphes navigables

- Graphes polylog(n)-navigables:
  - Grilles de dim° d [Kleinberg'00]/ Croissance bornée [Duchon, Hanusse,L.,Schabanel'05]/ dim° doublante bornée [Slivkins'05]/ largeur arborescente bornée [Fraigniaud'05]/ graphes excluant un mineur fixe [Abraham, Gavoille'06].

  ➡ Schémas d'augmentation <u>spécifiques</u>.
- Schéma d'augmentation <u>universel</u>?

Graphes navigables

- Graphes polylog(n)-navigables:
  - Grilles de dim° d [Kleinberg'00]/ Croissance bornée [Duchon, Hanusse,L.,Schabanel'05]/ dim° doublante bornée [Slivkins'05]/ largeur arborescente bornée [Fraigniaud'05]/ graphes excluant un mineur fixe [Abraham, Gavoille'06].

  ➡ Schémas d'augmentation spécifiques.

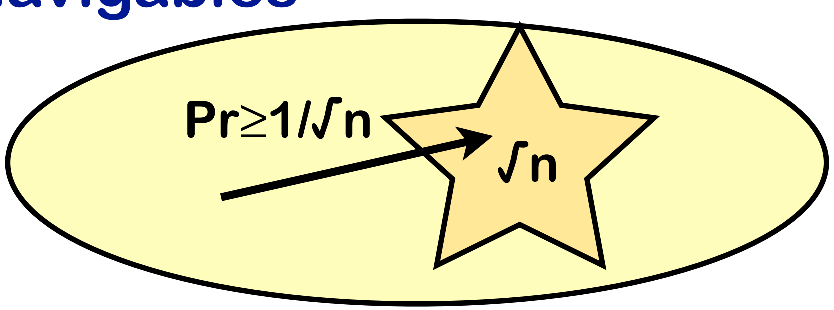
- Schéma d'augmentation universel?
  - Il existe des graphes non polylog(n)-navigables (aucune distribution possible).[Fraigniaud,L.,Lotker'06]

Graphes navigables

- Graphes polylog(n)-navigables:
  - Grilles de dim° d [Kleinberg'00]/ Croissance bornée [Duchon, Hanusse,L.,Schabanel'05]/ dim° doublante bornée [Slivkins'05]/ largeur arborescente bornée [Fraigniaud'05]/ graphes excluant un mineur fixe [Abraham, Gavoille'06].

➡ Schémas d'augmentation <u>spécifiques</u>.

- Schéma d'augmentation <u>universel</u>?
  - Il existe des graphes non polylog(n)-navigables (aucune distribution possible).[Fraigniaud,L.,Lotker'06]
  - Tous les graphes sont √n - navigables (distribution uniforme).



Augmentation universelle

A) Augmentation a posteriori pour tout graphe :

- **Borne inf:** $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - ? - **Borne sup:** $O(\sqrt{n})$

Augmentation universelle

A) Augmentation a posteriori pour tout graphe :

- **Borne inf: $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - ? - Borne sup: $O(\sqrt{n})$**

➡ **Il existe un schéma d'augmentation qui permet un routage glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$ entre toute paire pour tout graphe. [SPAA'07]**

Augmentation universelle

A) Augmentation a posteriori pour tout graphe :

- **Borne inf:** $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - ? - **Borne sup:** $O(\sqrt{n})$

➡ Il existe un schéma d'augmentation qui permet un routage glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$ entre toute paire pour tout graphe. [SPAA'07]

B) Augmentation a priori : déf° des matrices d'augmentation universelles.

Augmentation universelle

A) Augmentation a posteriori pour tout graphe :

- Borne inf: $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - ? - Borne sup: $O(\sqrt{n})$

➡ Il existe un schéma d'augmentation qui permet un routage glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$ entre toute paire pour tout graphe. [SPAA'07]

B) Augmentation a priori : déf° des matrices d'augmentation universelles.

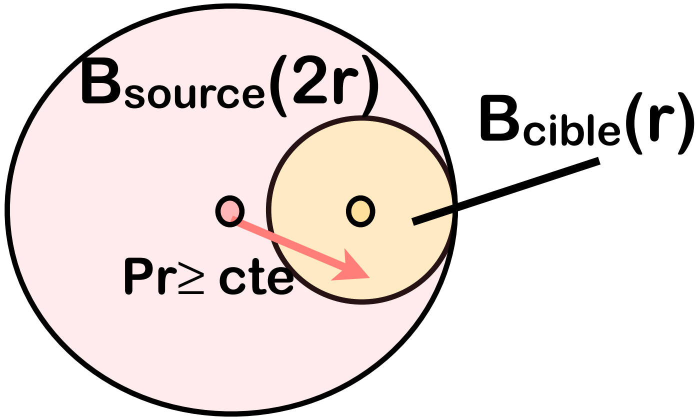
Bornes sur le nombre de pas du glouton :

- Indépendantes de l'étiquetage: $\Omega(\sqrt{n})$ pas.
- Etiquettes < log n : $\Omega(n^b)$ pas.
- Matrice + étiquetage: $O(\min(\text{pathshape}(G),\sqrt{n}))$.

A) Tous les graphes sont $\tilde{O}(n^{1/3})$-navigables.

Distributions 1/B(r)

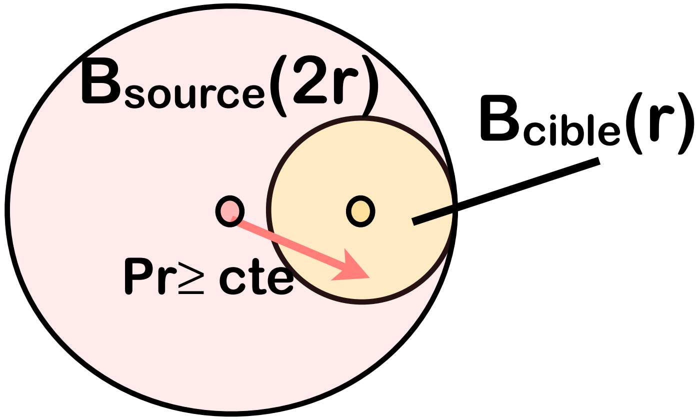
- Augmentation des graphes à croissance bornée:
  - $B_u(2r) \leq c.\ B_u(r)$.
  - $Pr(u \rightarrow v) \sim 1/B_u(d(u,v))$.



Distributions 1/B(r)

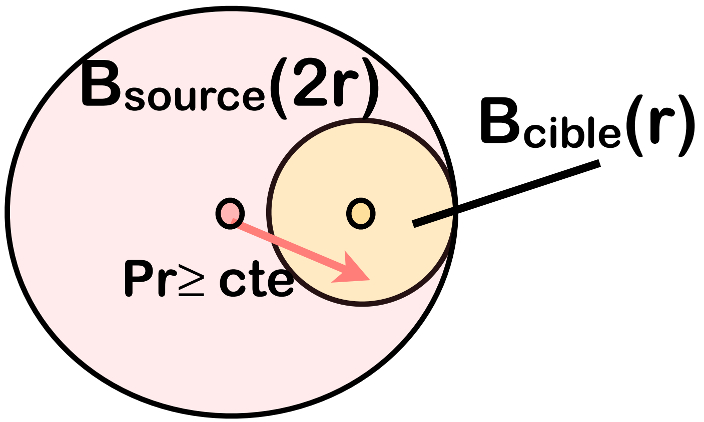
- Augmentation des graphes à croissance bornée:
  - $B_u(2r) \leq c.\ B_u(r)$.
  - $Pr(u \rightarrow v) \sim 1/B_u(d(u,v))$.

➡ Distr° non uniforme
+ cardinalités bien réparties



Distributions 1/B(r)

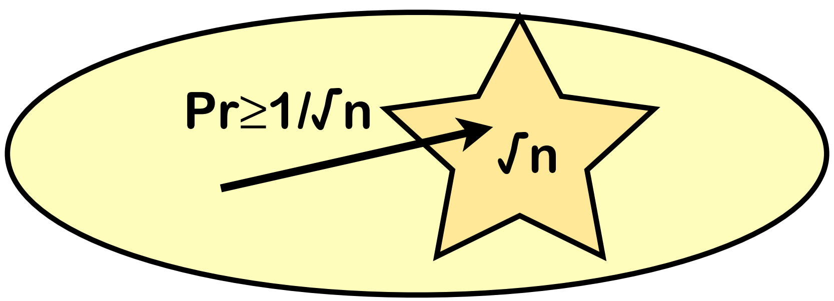
- Augmentation des graphes à croissance bornée:
  - $B_u(2r) \leq c.\ B_u(r)$.
  - $Pr(u \rightarrow v) \sim 1/B_u(d(u,v))$.



➡ Distr° non uniforme
+ cardinalités bien réparties

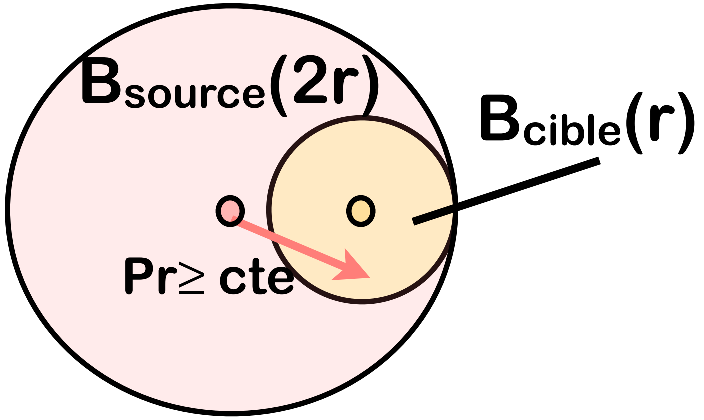
- Augmentation uniforme:

Pr≥ 1/ (cardinalité ensemble)



Distributions 1/B(r)

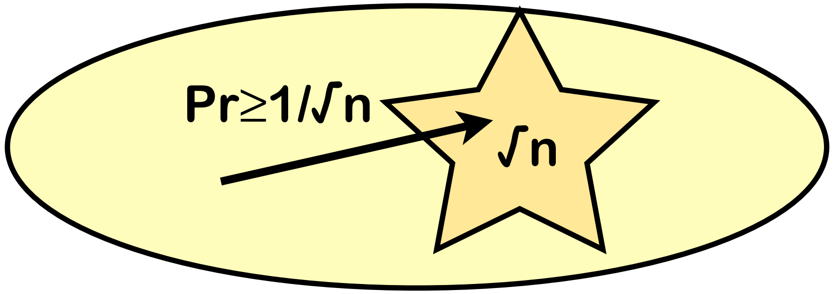
- Augmentation des graphes à croissance bornée:
  - $B_u(2r) \leq c.\ B_u(r)$.
  - $Pr(u \rightarrow v) \sim 1/B_u(d(u,v))$.



➡ Distr° non uniforme
+ cardinalités bien réparties

- Augmentation uniforme:

Pr≥ 1/ (cardinalité ensemble)



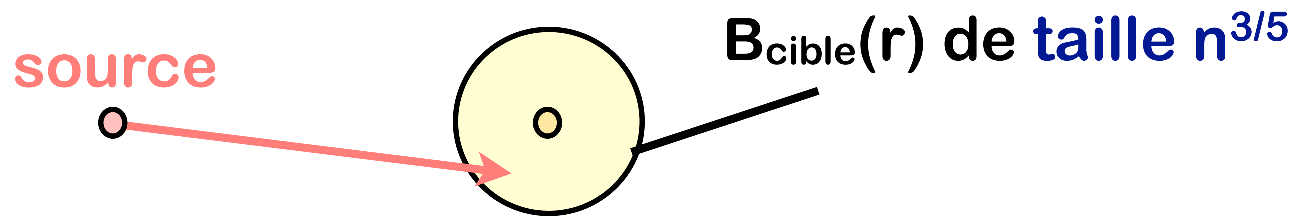
➡Compromis: taille de l'ensemble - diamètre de l'ensemble

Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans **G**.

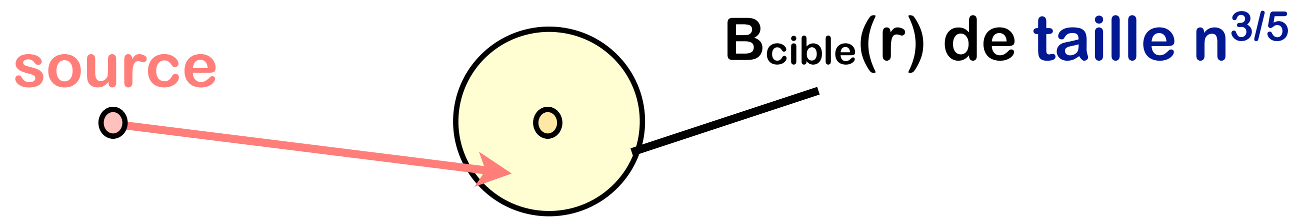
Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans G.



Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

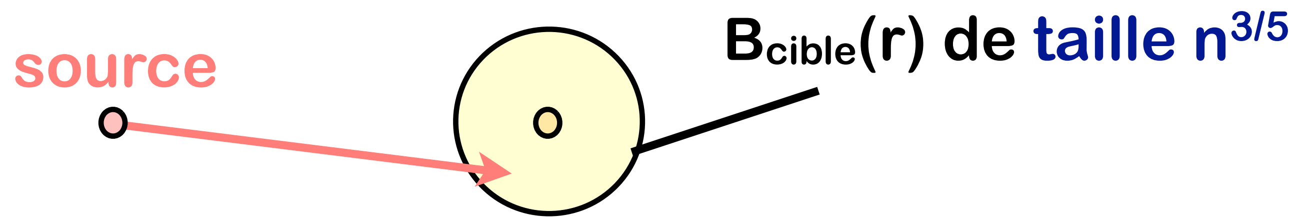
- Augmentation:
  - Proba 1/2 : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - Proba 1/2 : u tire v uniformément dans G.



$Pr \geq (1/2) \times (n^{3/5}/n)$
$= 1/(2n^{2/5})$

Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans G.

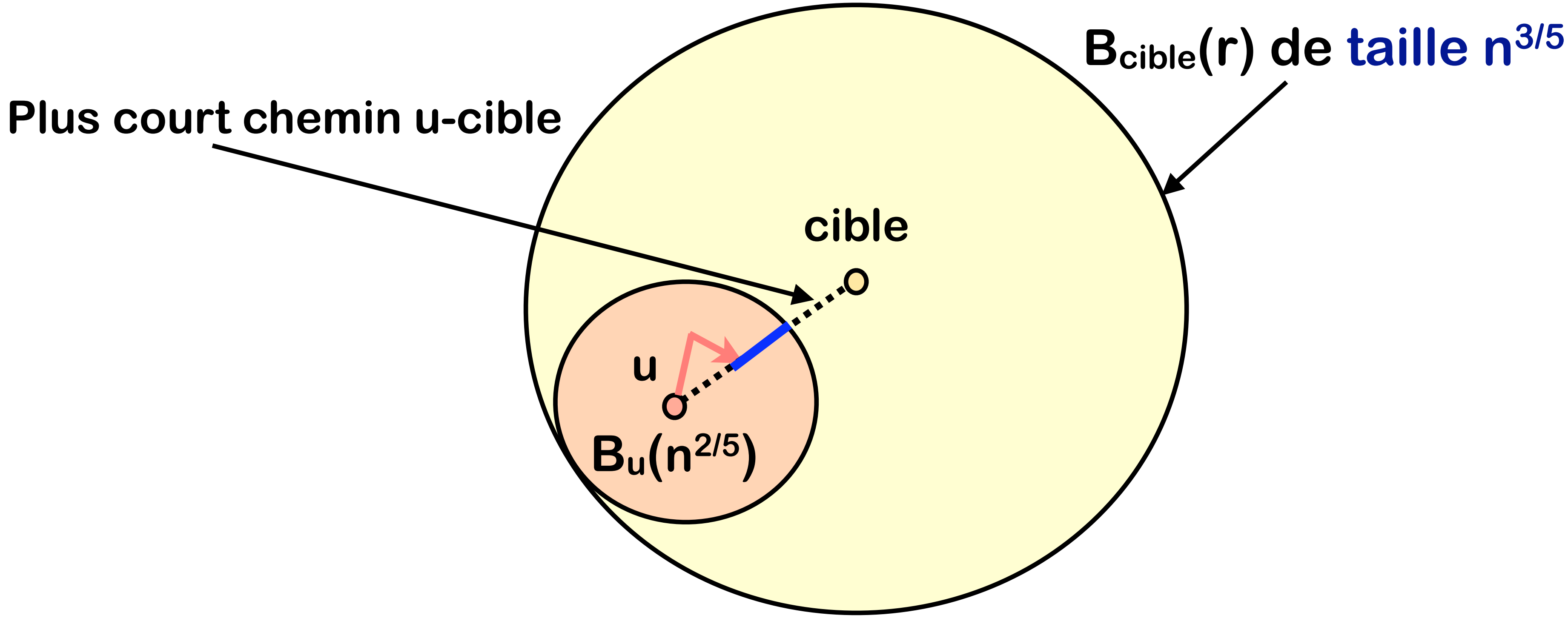


$Pr \geq (1/2)x(n^{3/5} /n)$
$= 1/(2n^{2/5})$

➡ **On entre dans la boule après $O(n^{2/5})$ étapes en espérance.**

Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- Augmentation:
  - Proba 1/2 : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - Proba 1/2 : u tire v uniformément dans G.

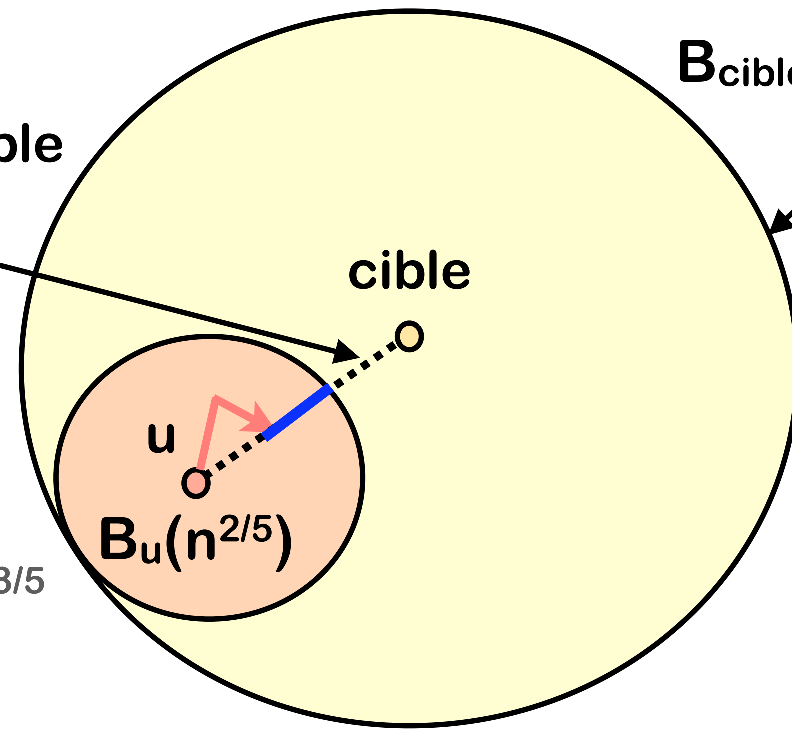


Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans G.

$B_{cible}(r)$ de taille $n^{3/5}$

Plus court chemin u-cible



$\underline{Pr(u \rightarrow \text{bleu})}$

$\geq$

$(1/2) \times (n^{2/5}/2) \,/\, B_u(n^{2/5})$

$= \Omega\,(1/n^{1/5})$

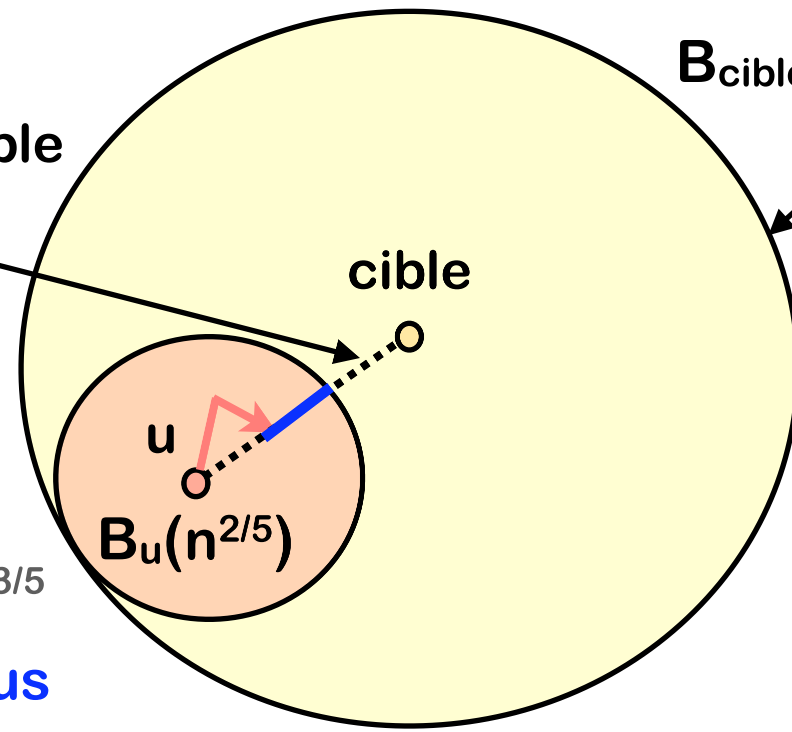
$\leq n^{3/5}$

Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans G.

$B_{cible}(r)$ de taille $n^{3/5}$

Plus court chemin u-cible



$$\underline{Pr(u \to \text{bleu})}$$
$$\geq$$
$$(1/2) \times (n^{2/5}/2) \,/\, B_u(n^{2/5})$$
$$= \Omega\,(1/n^{1/5})$$

$\leq n^{3/5}$

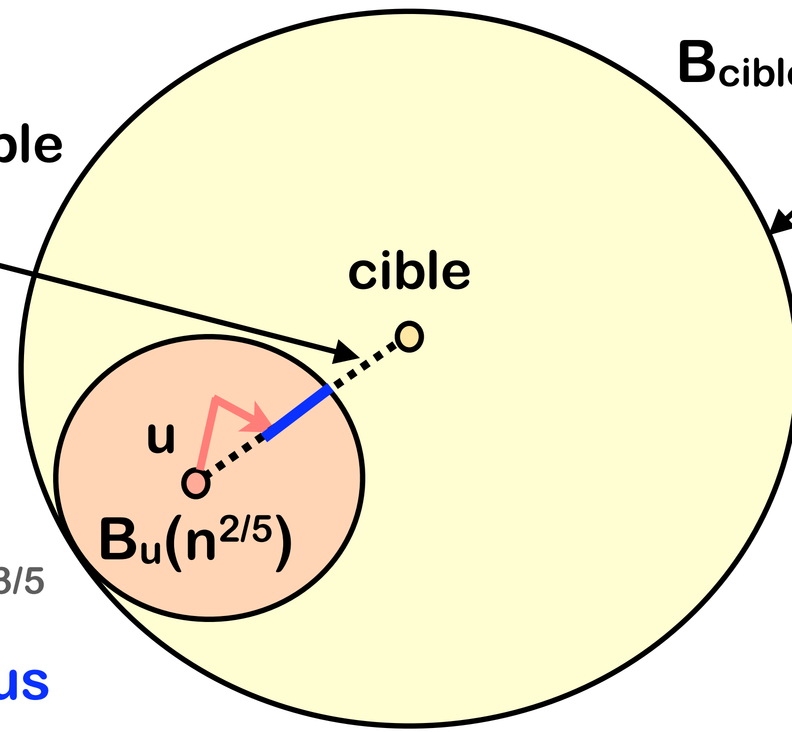
+ au plus $n^{1/5}$ intervalles bleus

Diamètre glouton $O(n^{2/5})$

- **Augmentation:**
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans $B_u(n^{2/5})$.
  - **Proba 1/2** : u tire v uniformément dans **G**.

$B_{cible}(r)$ de taille $n^{3/5}$

Plus court chemin u-cible



$$\underline{Pr(u \to \text{bleu})}$$

$$\geq$$

$$(1/2) \times (n^{2/5}/2) \,/\, B_u(n^{2/5})$$

$$= \Omega(1/n^{1/5})$$

$\leq n^{3/5}$

+ au plus $n^{1/5}$ intervalles bleus

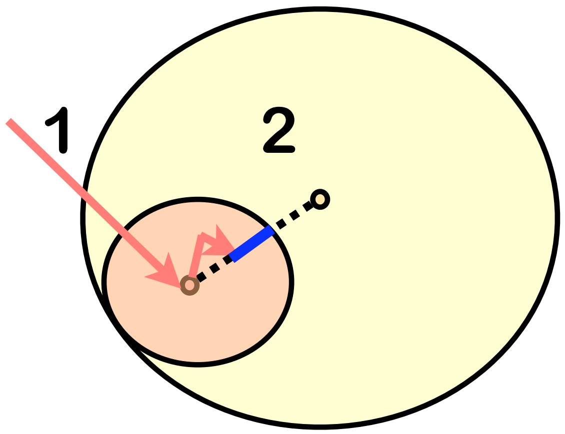
E(# étapes) $\leq O(n^{2/5}) + O(n^{1/5}) \times n^{1/5} = O(n^{2/5})$.

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe clé du $O(n^{2/5})$:**

  1- Entrer dans un ensemble de taille réduit.

  2- Progresser dans l'ensemble en tirant dans de plus petits ensembles.

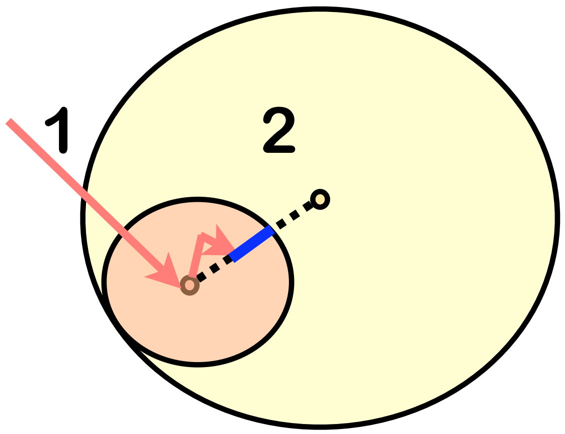


Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe clé du $O(n^{2/5})$:**

  1- Entrer dans un ensemble de taille réduit.

  2- Progresser dans l'ensemble en tirant dans de plus petits ensembles.



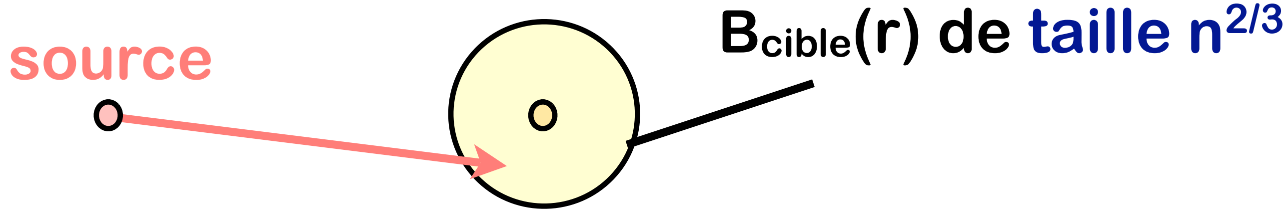
- **Nouvelle augmentation :**
  - **u choisit un niveau i entre 1 et log n.**
  - **u tire v uniformément dans $B_u(2^i)$.**
- **<u>THM</u> : diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$ pour tout graphe.**

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**

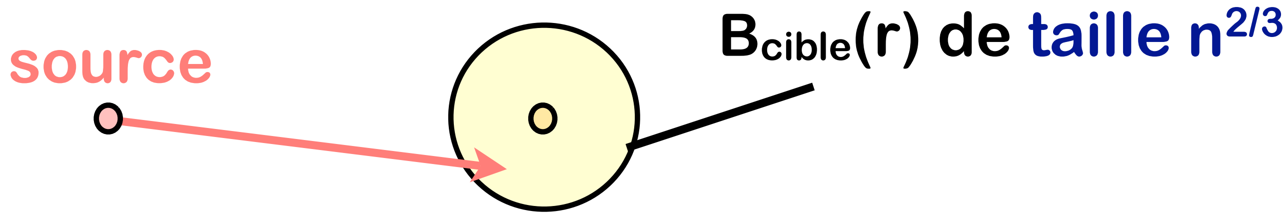
Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



Diamètre glouton Õ($n^{1/3}$)

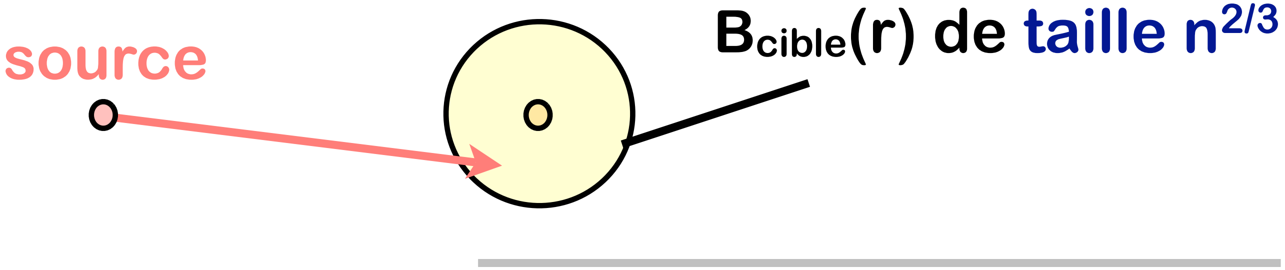
- **Principe de l'analyse:**



→O($n^{1/3}$) étapes

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

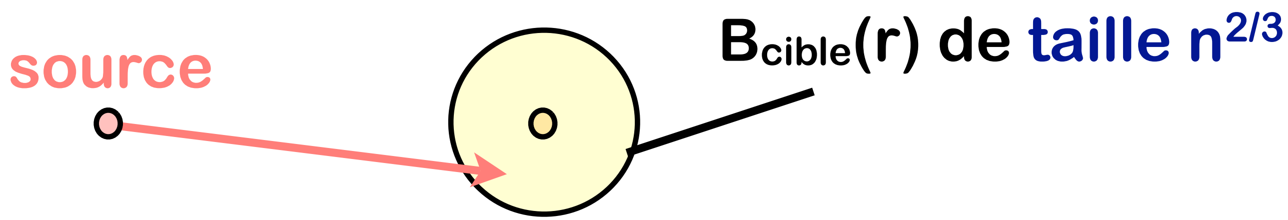
- **Principe de l'analyse:**



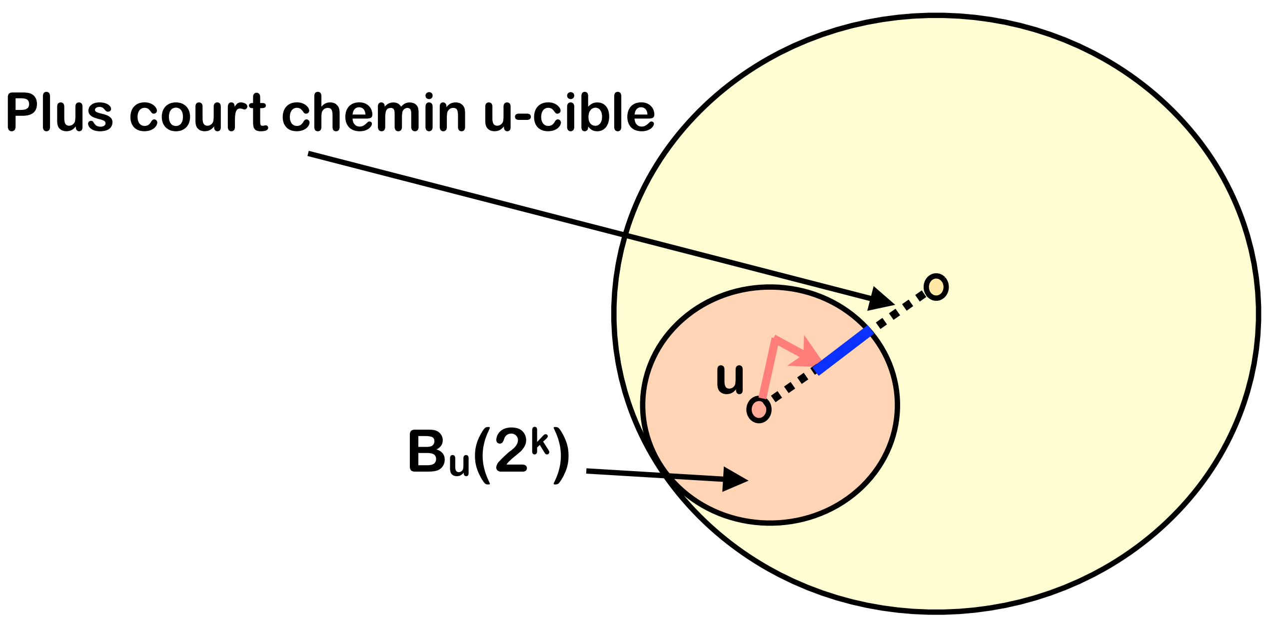
$\rightarrow O(n^{1/3})$ étapes

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**

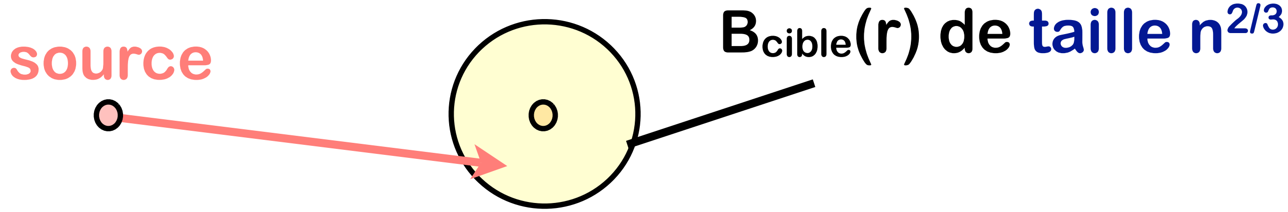


$\rightarrow O(n^{1/3})$ étapes

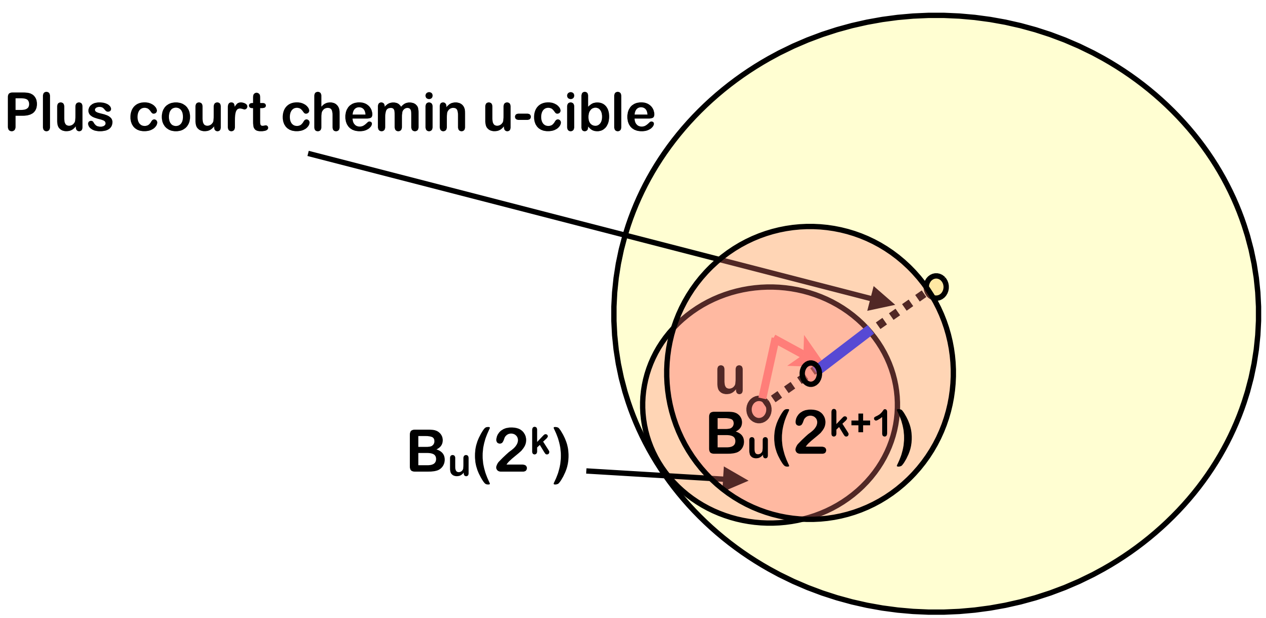


Diamètre glouton Õ($n^{1/3}$)

- **Principe de l'analyse:**



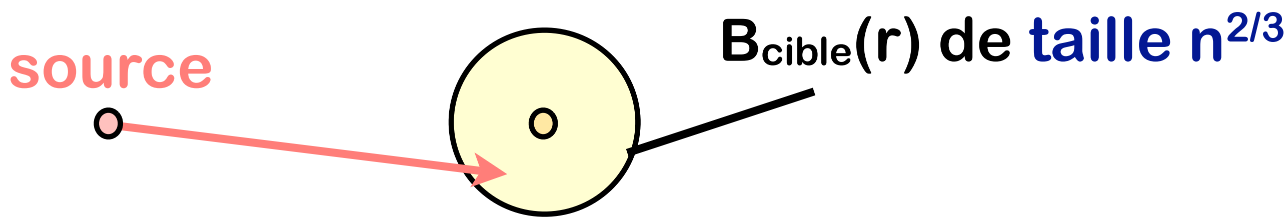
→O($n^{1/3}$) étapes



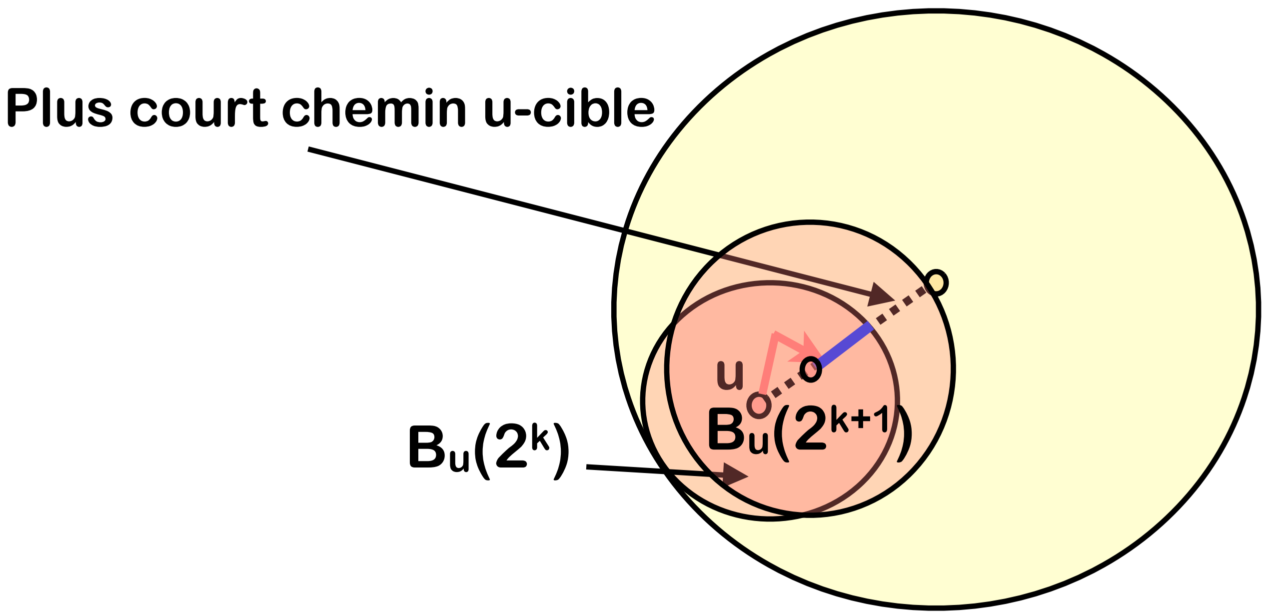
→O($n^{1/3}/2^k$) étapes
à chaque k

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



$\rightarrow O(n^{1/3})$ étapes

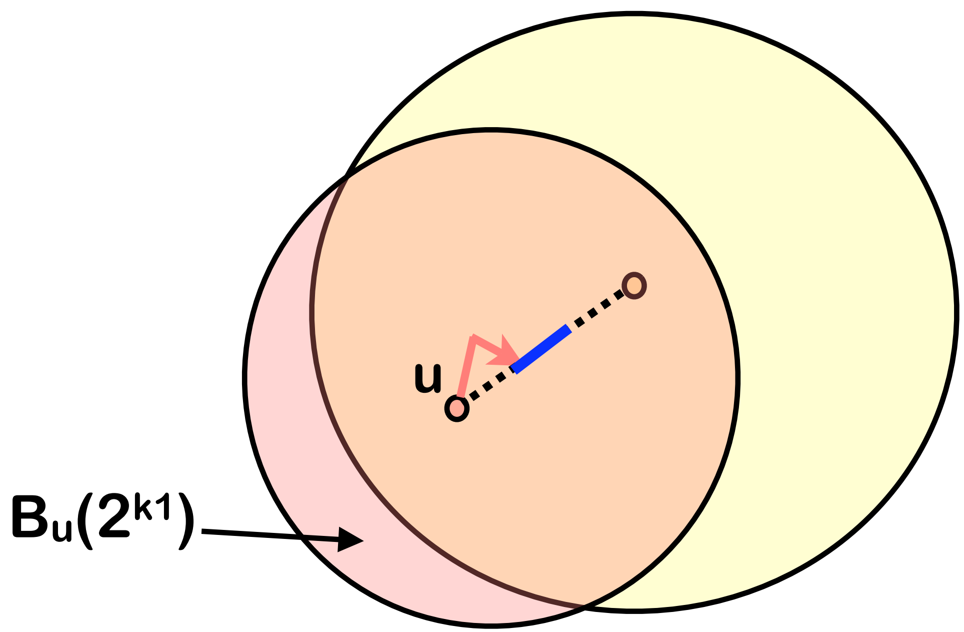


$\rightarrow O(n^{1/3}/2^k)$ étapes
à chaque k

$\rightarrow \tilde{O}(n^{1/3})$ étapes pour contenir la cible

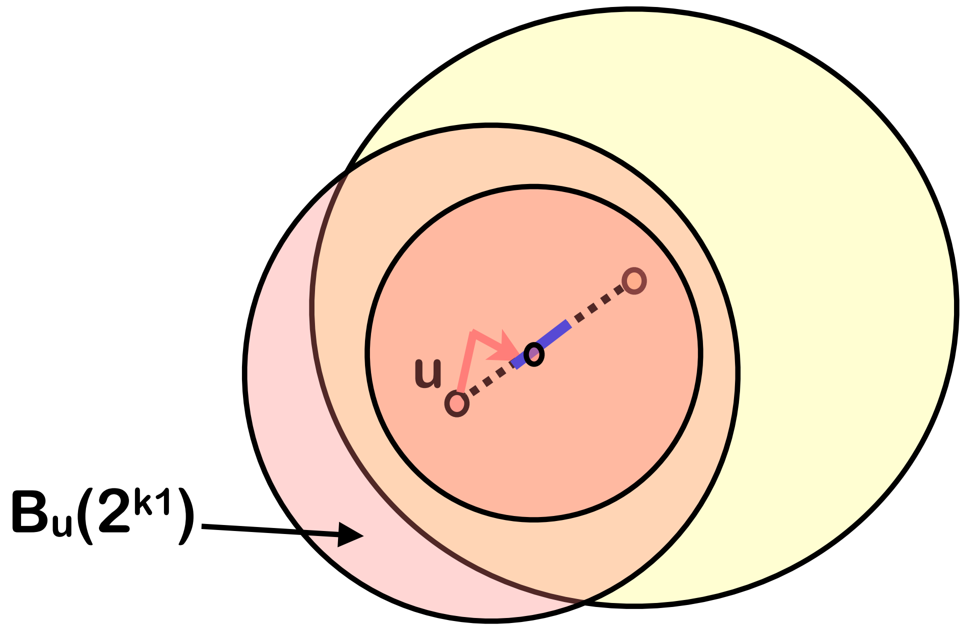
Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



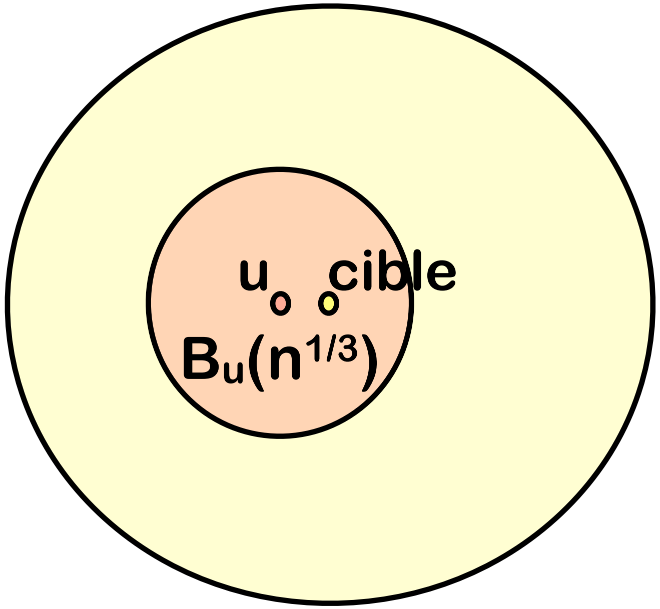
Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



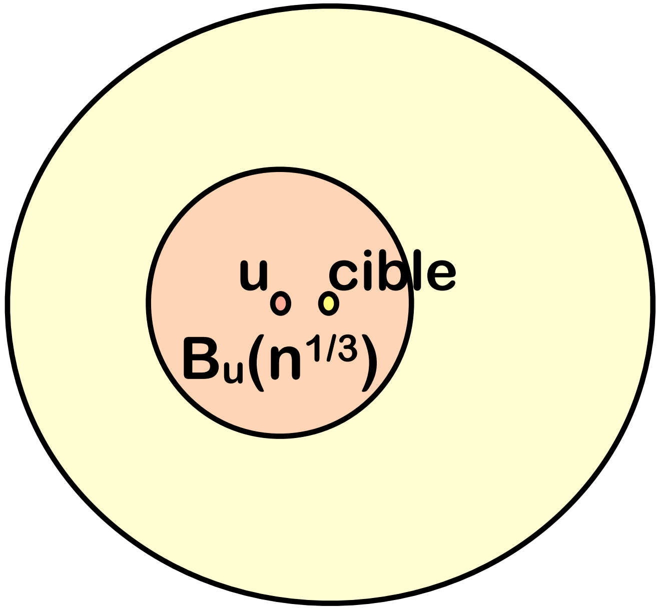
Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

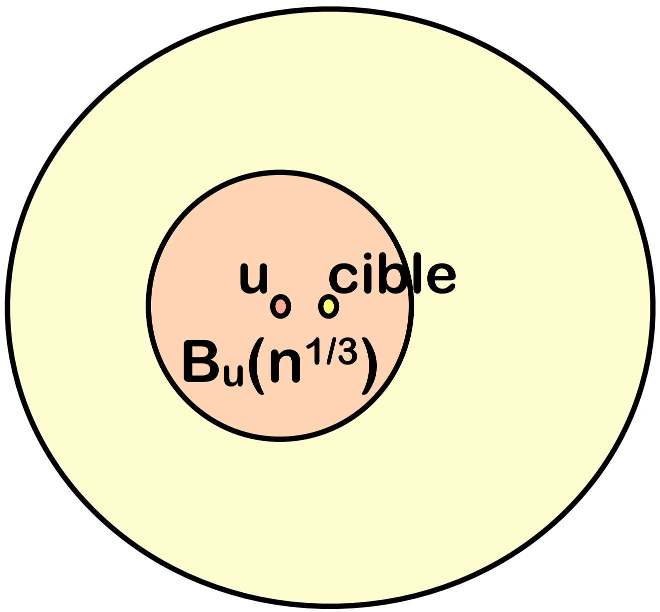
- **Principe de l'analyse:**



$\rightarrow \tilde{O}(n^{1/3})$ étapes pour contenir la cible dans un rayon $n^{1/3}$.

Diamètre glouton $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Principe de l'analyse:**



→$\tilde{O}(n^{1/3})$ étapes pour contenir la cible dans un rayon $n^{1/3}$.

→$\tilde{O}(n^{1/3})$ étapes pour atteindre la cible à l'intérieur de cette boule.

B) Matrices d’augmentation universelles

Matrices d'augmentation

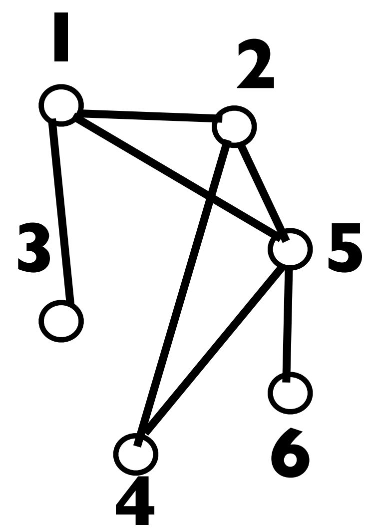
- **Une matrice d'augmentation:**

destinations des liens

noeuds

	1	2	3	4	5	6
1	0	1/2	1/4	1/4	0	0
2	1/3	1/3	1/3	0	0	0
3	1/5	0	1/5	1/5	1/5	1/5
4	1/2	0	0	0	0	1/2
5	0	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
6	1/6	1/3	1/6	1/6	0	1/6

$\rightarrow \Sigma \leq 1$



Matrices d’augmentation

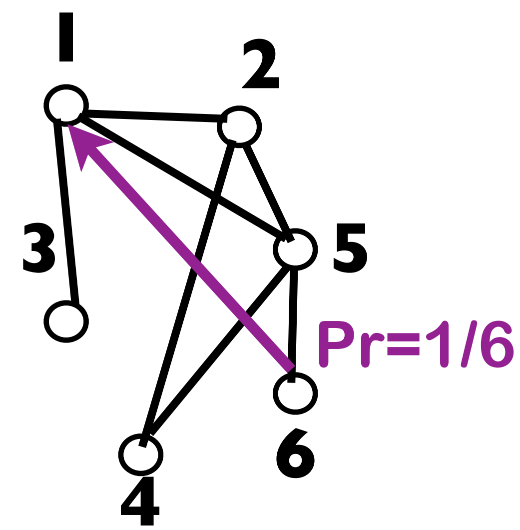
- **Une matrice d’augmentation:**

destinations des liens

noeuds

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1/2	1/4	1/4	0	0
2	1/3	1/3	1/3	0	0	0
3	1/5	0	1/5	1/5	1/5	1/5
4	1/2	0	0	0	0	1/2
5	0	1/8	1/8	1/8	1/8	1/2
6	1/6	1/3	1/6	1/6	0	1/6

$\rightarrow \Sigma \leq 1$



Matrices d'augmentation

- **Une matrice d'augmentation + un graphe étiqueté: une augmentation aléatoire.**

Matrices d'augmentation

- Une matrice d'augmentation + un graphe étiqueté: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - Donnons une matrice, l'adversaire étiquette le graphe de la pire façon possible.

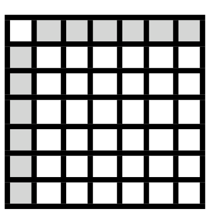
  ➡ Y a-t-il une matrice meilleure que l'uniforme?

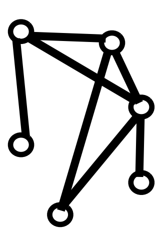
Matrices d'augmentation

- Une matrice d'augmentation + un graphe étiqueté: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - Donnons une matrice, l'adversaire étiquette le graphe de la pire façon possible.

  ➡ Y a-t-il une matrice meilleure que l'uniforme?





$\longrightarrow$

1,2,3,4,5,6

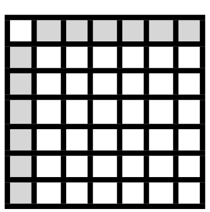
$\longrightarrow$ diamètre glouton < $\sqrt{n}$?

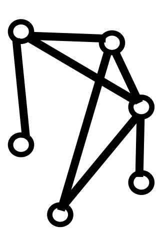
Matrices d’augmentation

- Une matrice d’augmentation + un graphe étiqueté: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - Donnons une matrice, l’adversaire étiquette le graphe de la pire façon possible.

  ➡ Y a-t-il une matrice meilleure que l’uniforme?





→

1,2,3,4,5,6

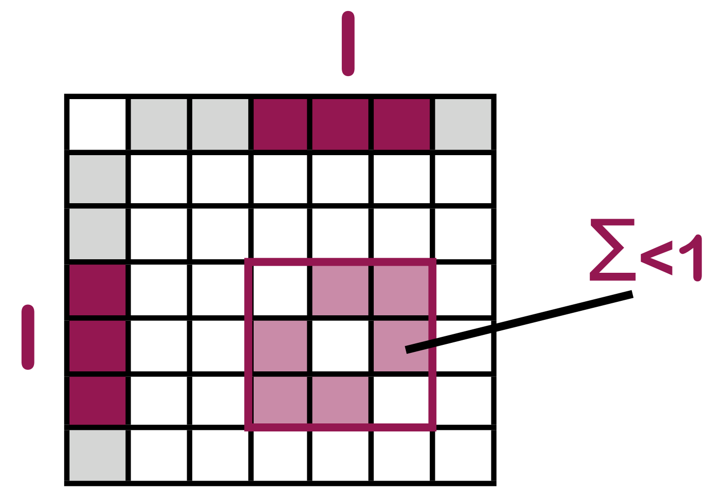
→ diamètre glouton $< \sqrt{n}$?

Réponse: non.

Augmentation anonyme

- **THM:** Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.

Lemme : pour toute matrice d'augmentation M, il existe un ensemble **I** de $\sqrt{n}$ indices tq $\Sigma p_{ij}<1$ pour i,j dans **I**.



Augmentation anonyme

- **THM: Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.**

Augmentation anonyme

- **THM: Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.**

Augmentation anonyme

- **<u>THM</u>: Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.**

Etiquettes de I

Augmentation anonyme

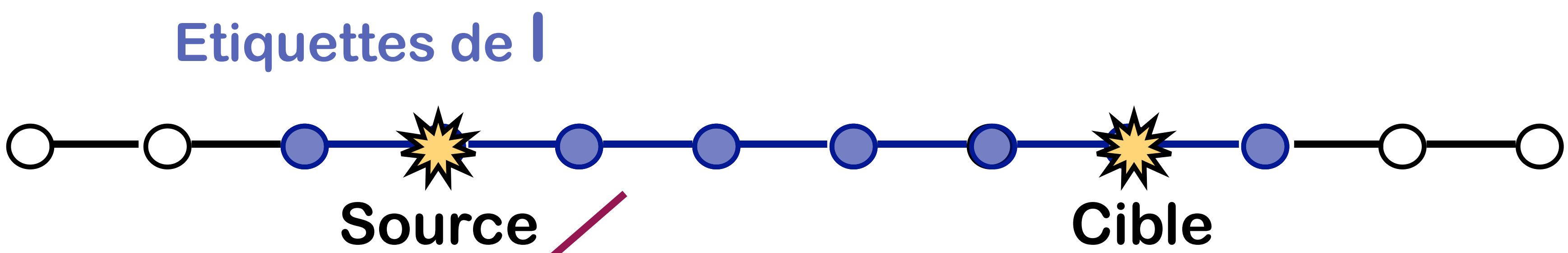
- **<u>THM</u>: Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.**

Etiquettes de I

E(# liens longs) = $\sum p_{ij} < 1$

Augmentation anonyme

- **THM: Pour toute matrice d'augmentation, il est possible d'étiqueter le chemin pour avoir un diamètre glouton $\Omega(\sqrt{n})$.**



E(# liens longs) = $\sum p_{ij} < 1$

Matrices d’augmentation

- Une matrice d’augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

Matrices d’augmentation

- Une matrice d’augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - En associant une matrice universelle à un procédé d’étiquetage universel, peut-on améliorer les performances? Algo(Matrice, Etiquetage)[G]

Matrices d’augmentation

- Une matrice d’augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - En associant une matrice universelle à un procédé d’étiquetage universel, peut-on améliorer les performances? Algo(Matrice, Etiquetage)[G]

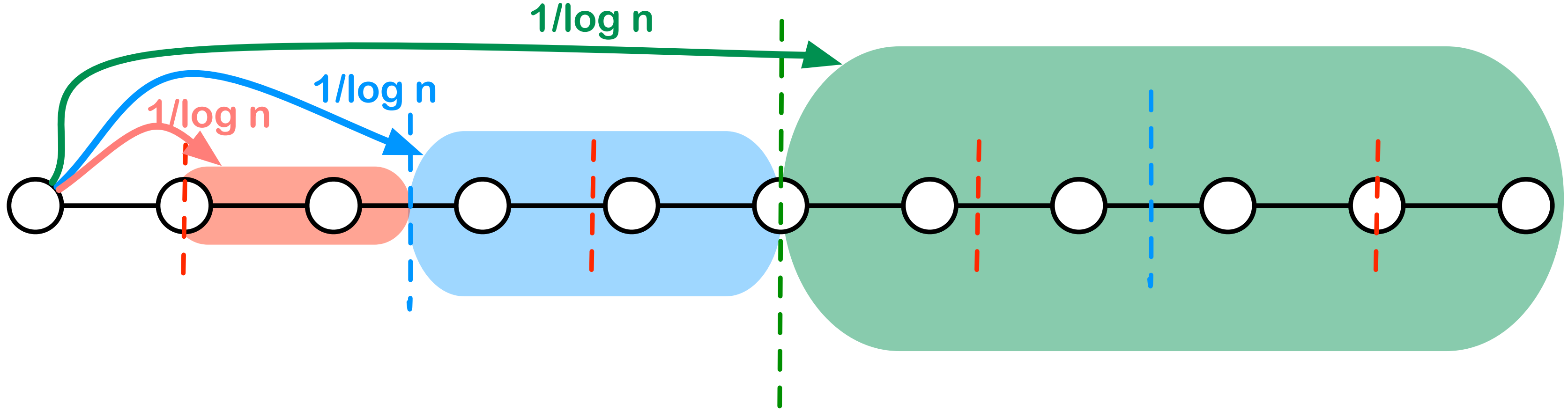
➡ Oui pour une grande classe de graphes.

Matrice + étiquetage idoine

- Matrice d’augmentation du chemin de Kleinberg:

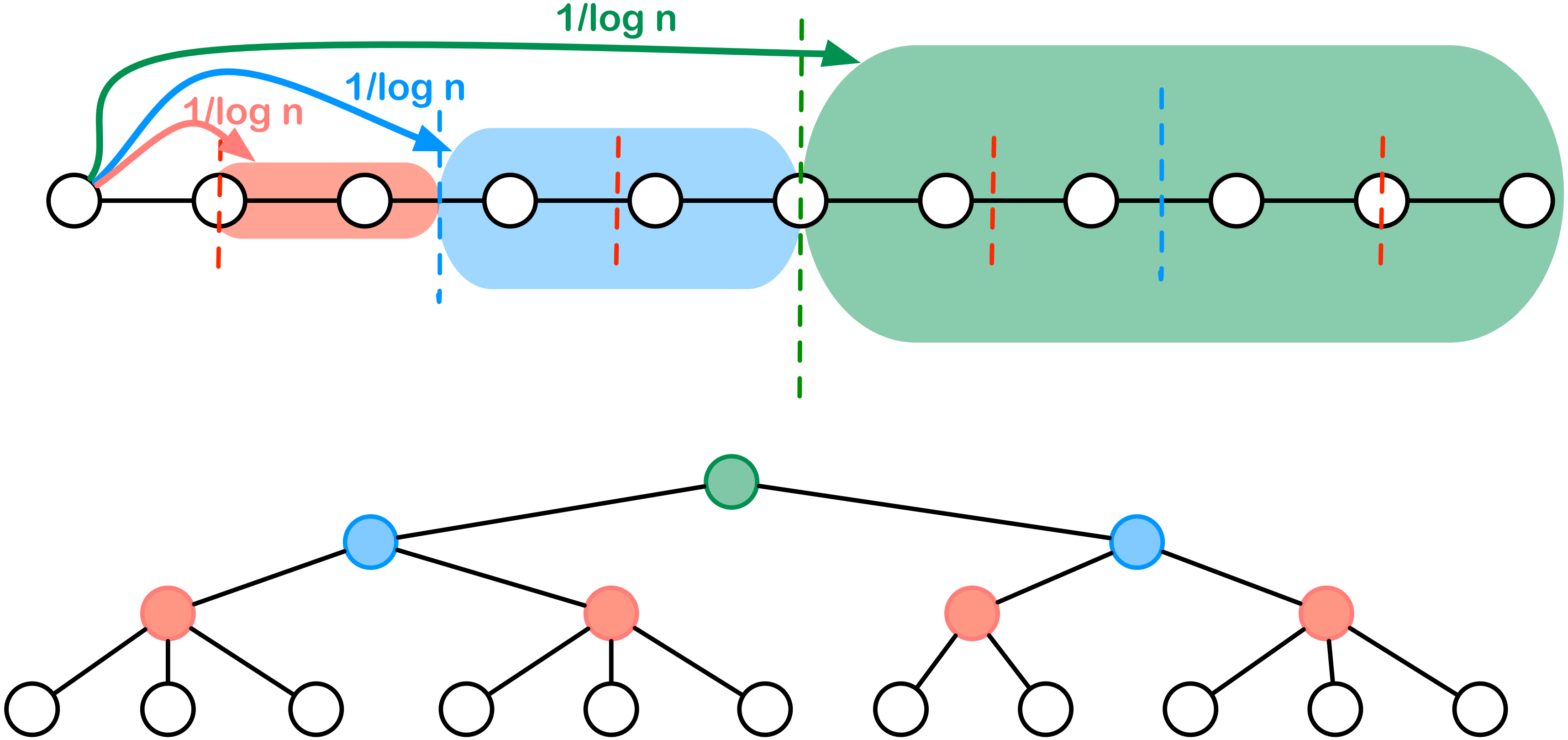
Matrice + étiquetage idoine

- **Matrice d'augmentation du chemin de Kleinberg**:



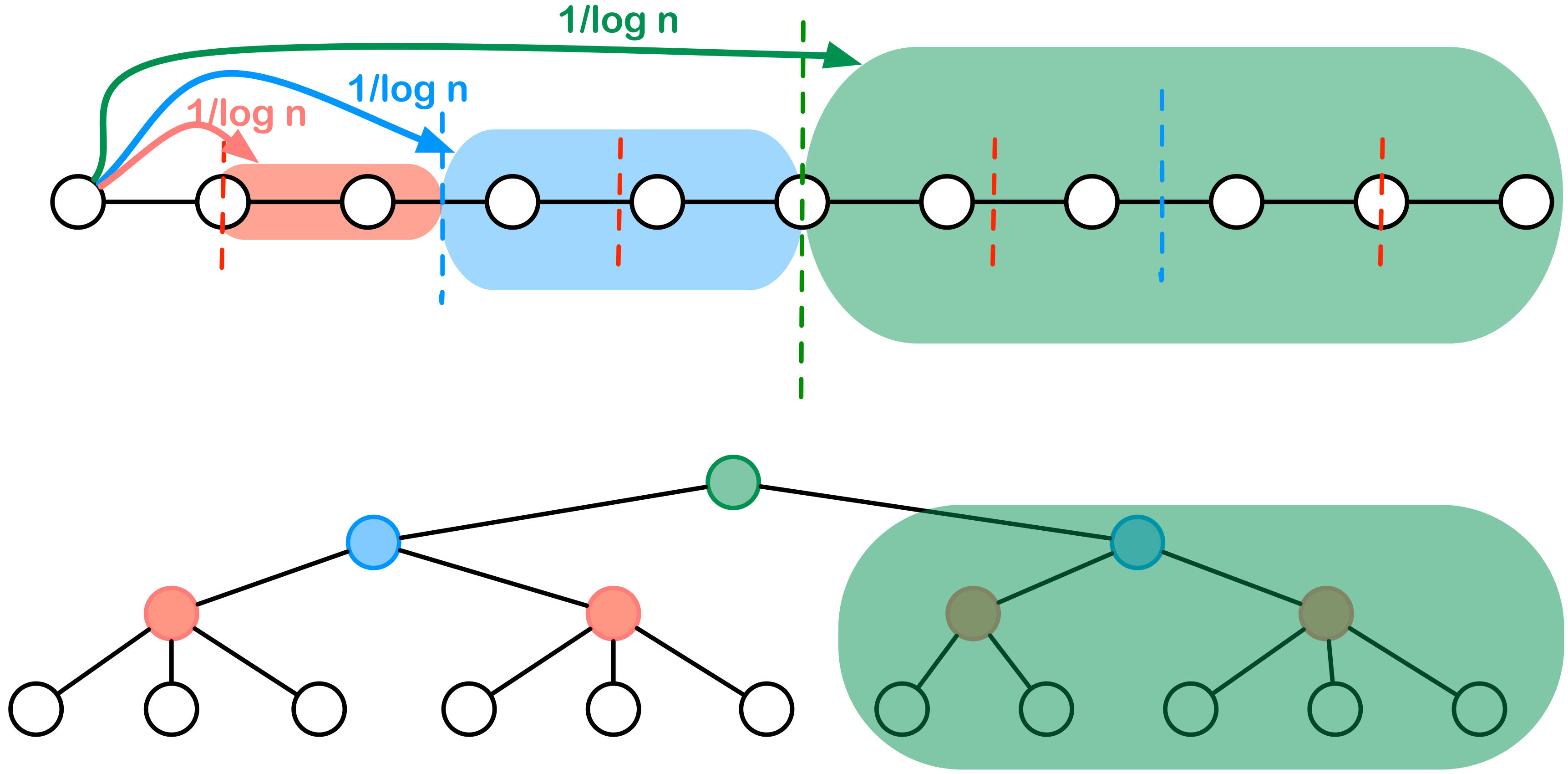
Matrice + étiquetage idoine

- **Matrice d'augmentation du chemin de Kleinberg**:



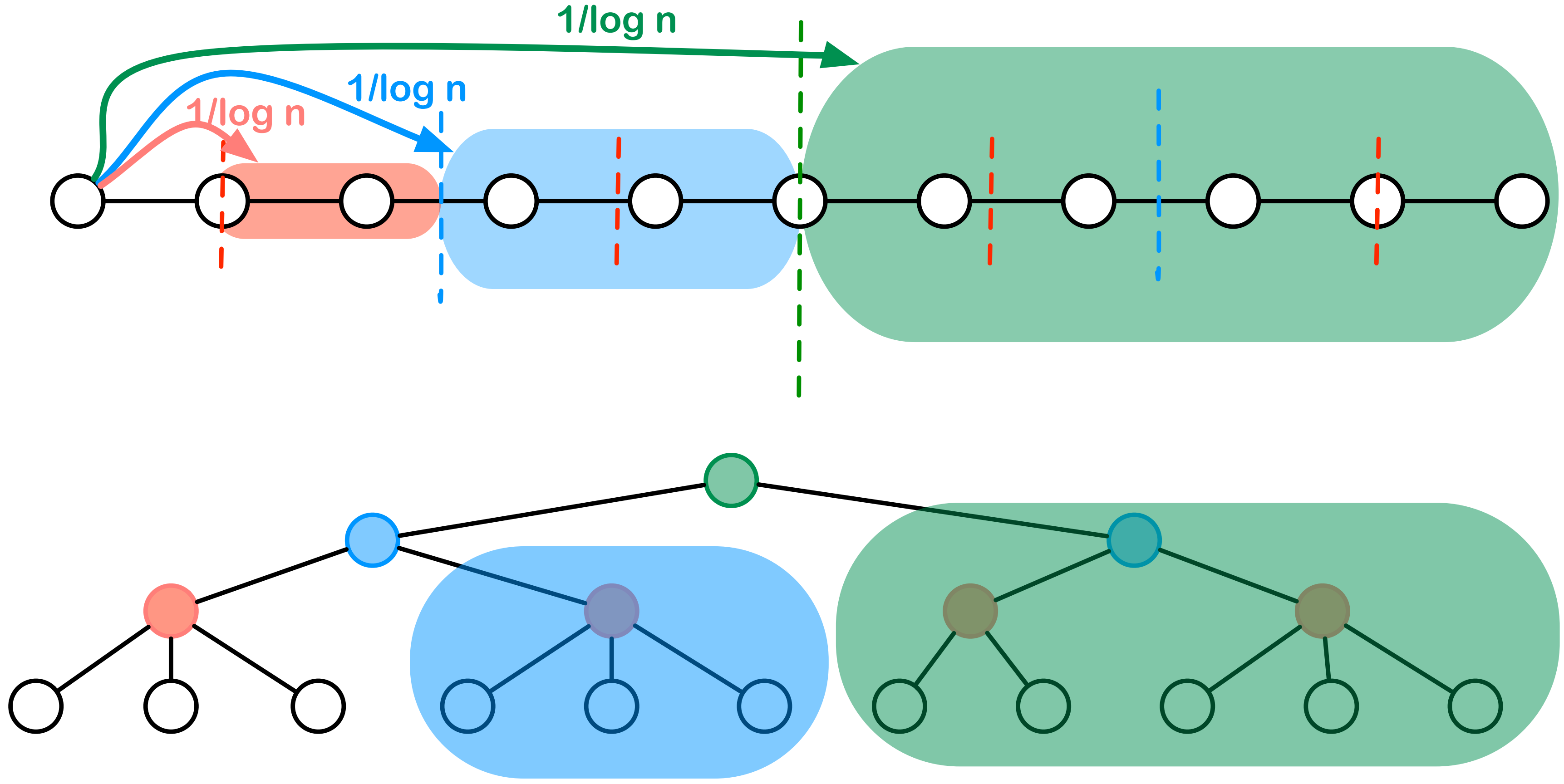
Matrice + étiquetage idoine

- **Matrice d’augmentation du chemin de Kleinberg**:



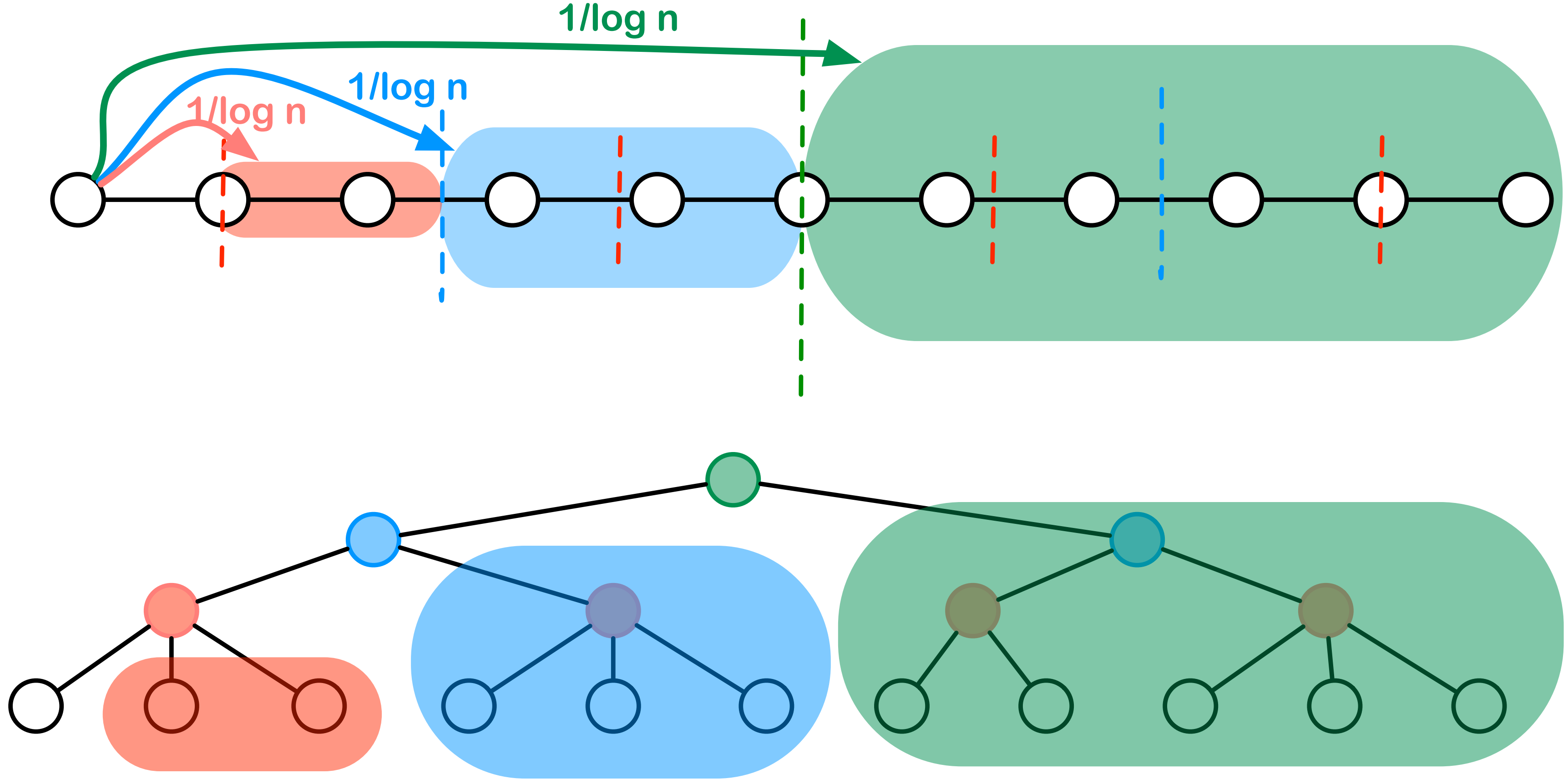
Matrice + étiquetage idoine

- **Matrice d'augmentation du chemin de Kleinberg**:

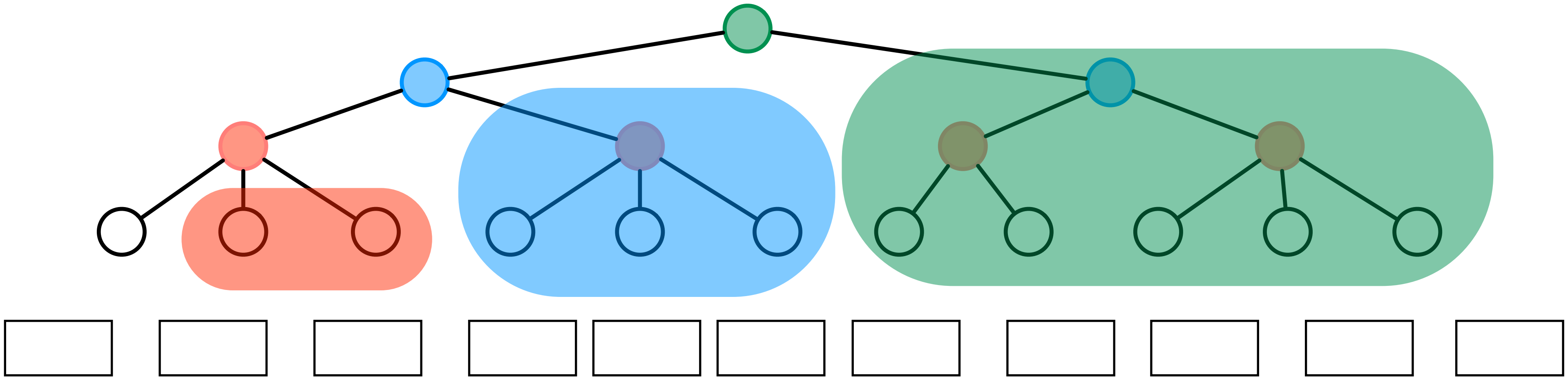


Matrice + étiquetage idoine

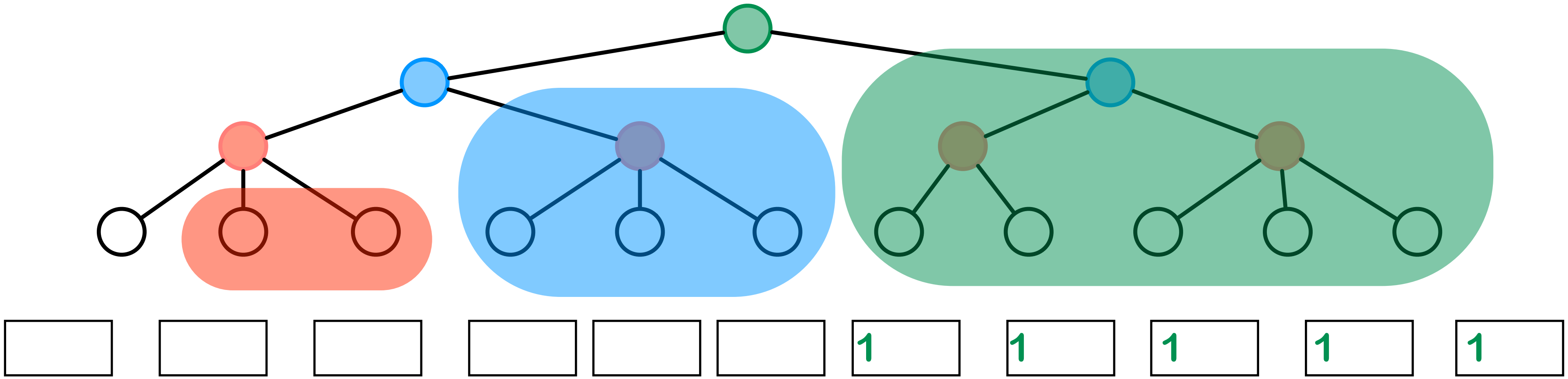
- **Matrice d'augmentation du chemin de Kleinberg:**



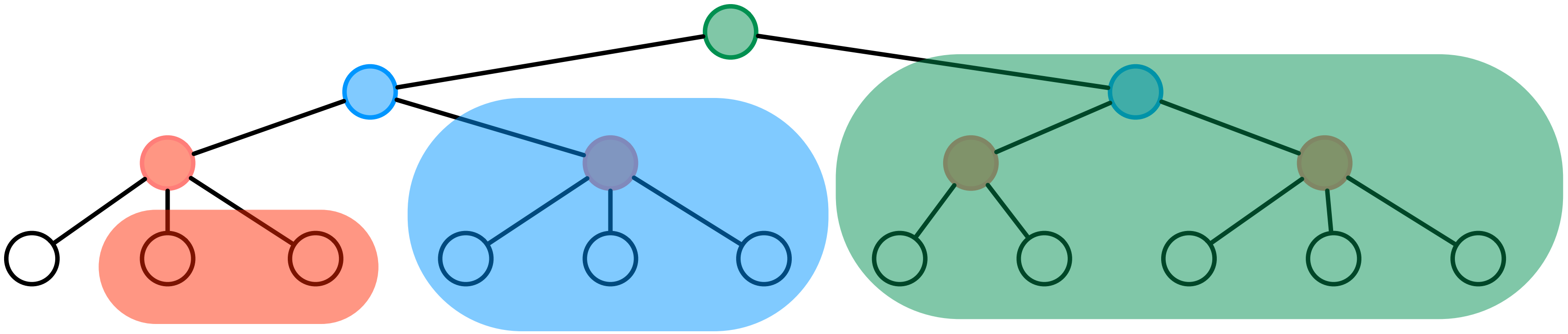
Matrice + étiquetage idoine



Matrice + étiquetage idoine

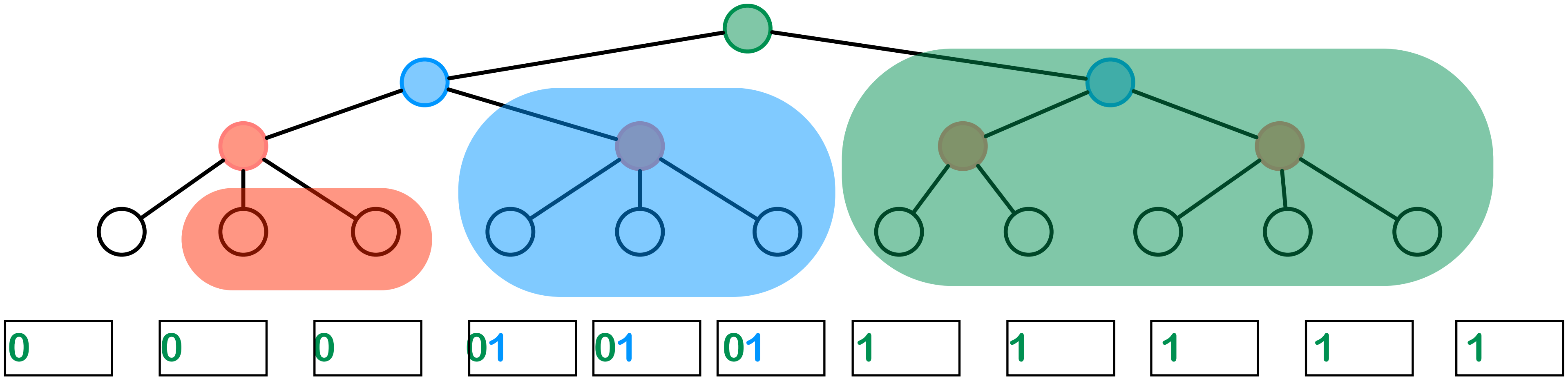


Matrice + étiquetage idoine

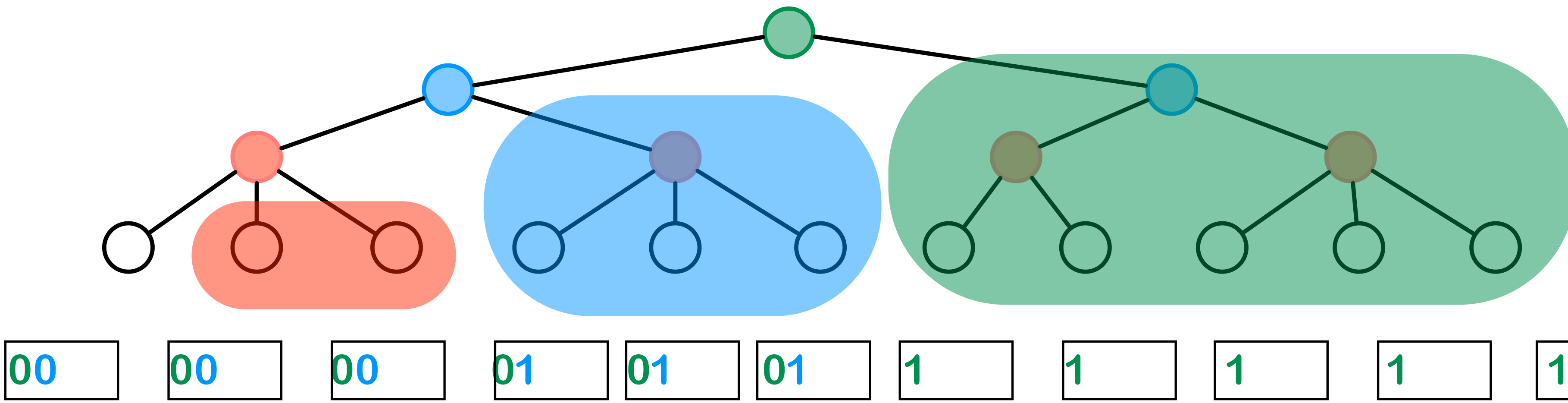


0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

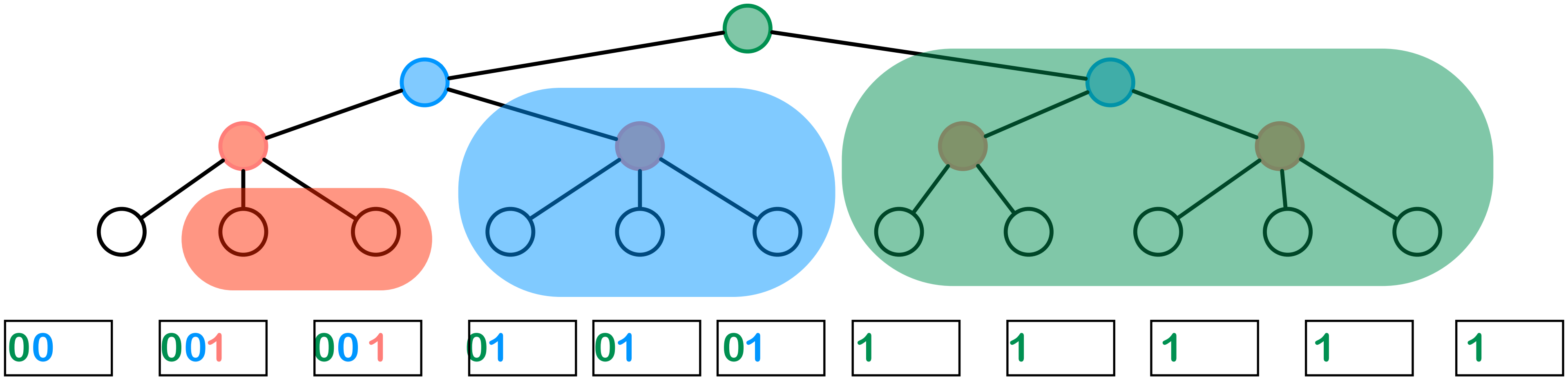
Matrice + étiquetage idoine



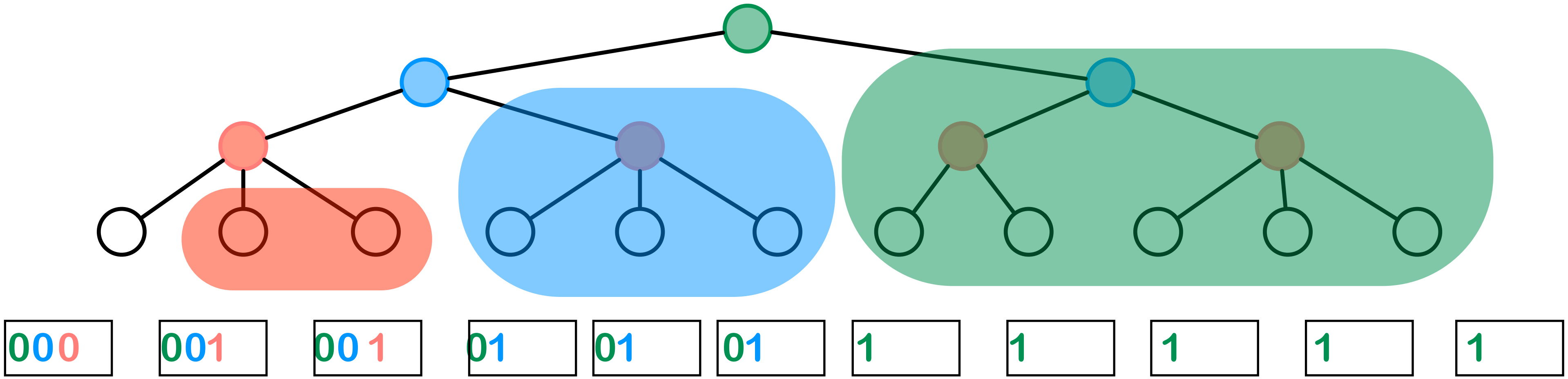
Matrice + étiquetage idoine



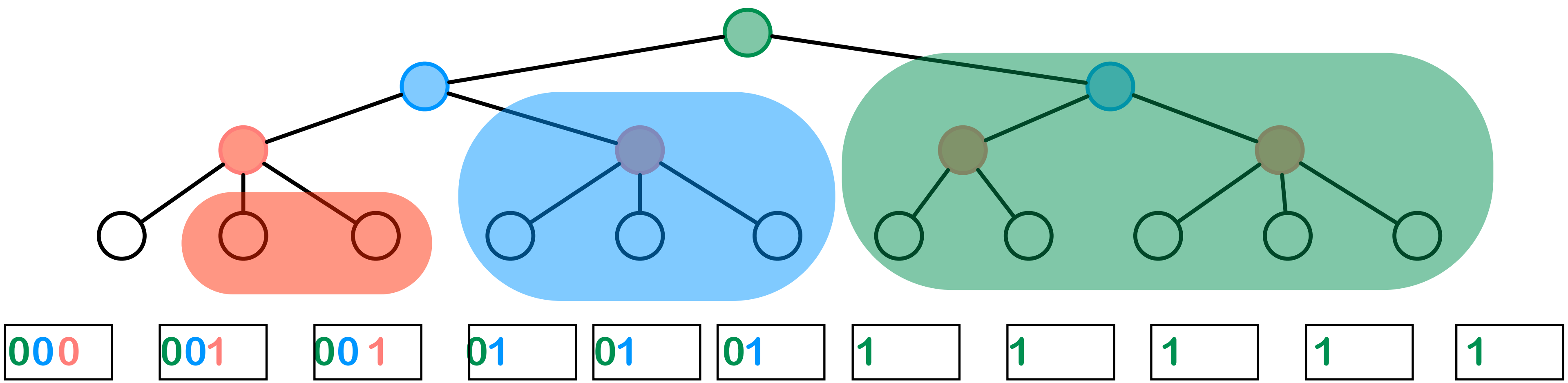
Matrice + étiquetage idoine



Matrice + étiquetage idoine



Matrice + étiquetage idoine



	000	001	001	01	01	01	1	...
000	0	p	0	p	0	0	p	
001	p	0	0	p	0	0	p	
001	p	0	0	p	0	0	p	
01				0			p	
01					0			
01						0		
0							0	

p = 1/log n

Matrice + étiquetage idoine

- **L'idée:**

Matrice + étiquetage idoine

- **L'idée:**
  - **1- Chercher les séparateur du graphe.**

Matrice + étiquetage idoine

- **L'idée:**

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

Matrice + étiquetage idoine

- L'idée:

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

  3- Appliquer l'augmentation de la matrice M.

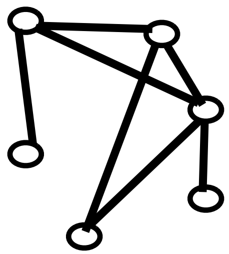
Matrice + étiquetage idoine

- L'idée:

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

  3- Appliquer l'augmentation de la matrice M.



Graphe G

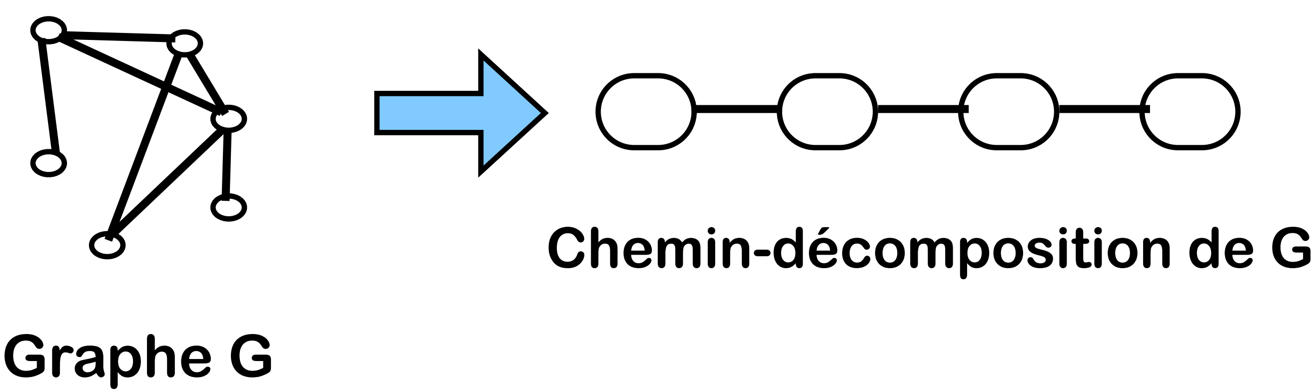
Matrice + étiquetage idoine

- L'idée:

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

  3- Appliquer l'augmentation de la matrice M.



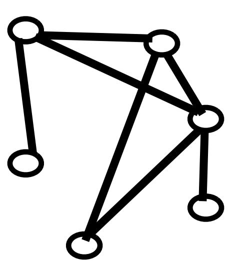
Matrice + étiquetage idoine

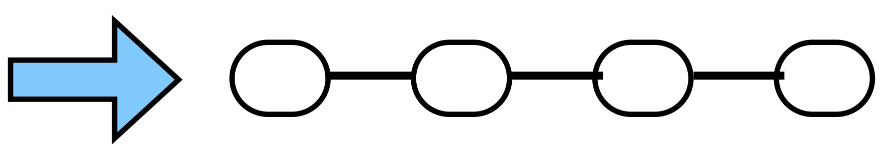
- L'idée:

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

  3- Appliquer l'augmentation de la matrice M.





Chemin-décomposition de G

Graphe G

étiquetage

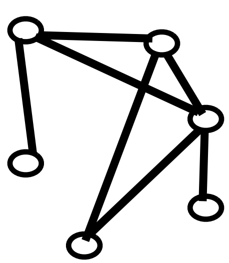
Matrice + étiquetage idoine

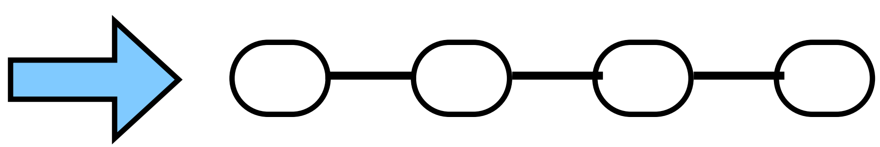
- L'idée:

  1- Chercher les séparateur du graphe.

  2- Leur associer les étiquettes des séparateurs dans la matrice M de l'arbre binaire.

  3- Appliquer l'augmentation de la matrice M.





+

Chemin-décomposition de G

Graphe G

étiquetage

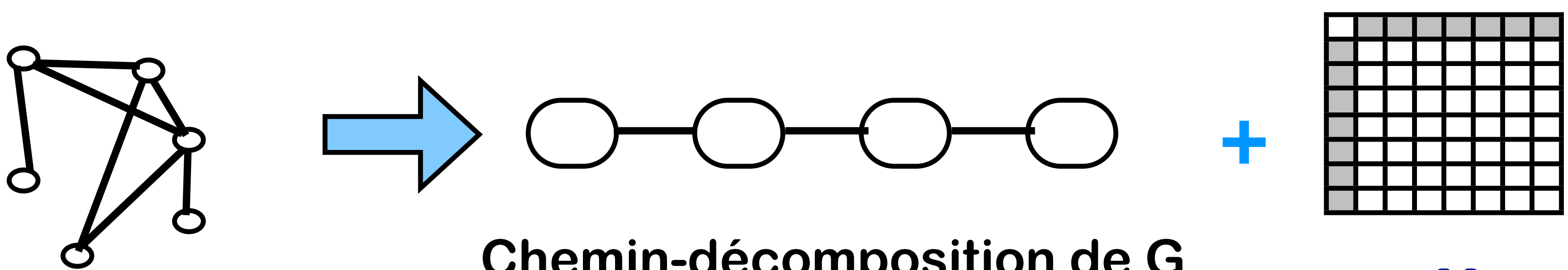
Matrice + étiquetage idoine

- **L'idée:**

  1- Chercher les **séparateur** du graphe.

  2- Leur associer les **étiquettes des séparateurs** dans la matrice **M** de l'arbre binaire.

  3- **Appliquer l'augmentation** de la matrice **M**.



Chemin-décomposition de G

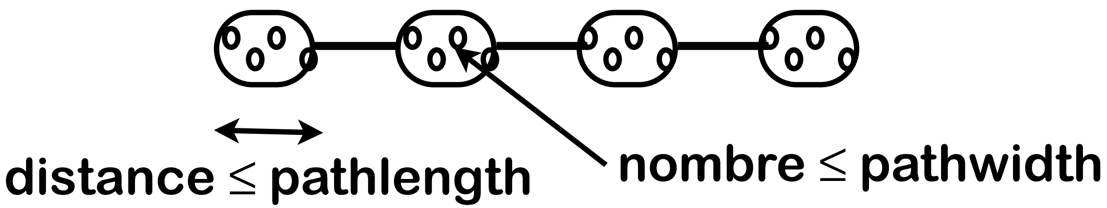
M

Graphe G

étiquetage

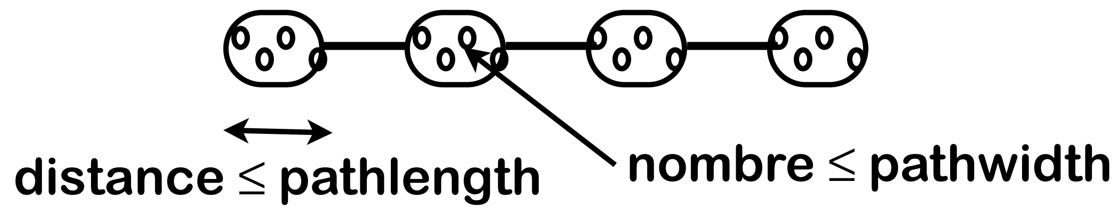
Matrice + étiquetage idoine

- Pathshape = min(pathwidth, pathlength). [def°]



Matrice + étiquetage idoine

- Pathshape = min(pathwidth, pathlength). [def°]

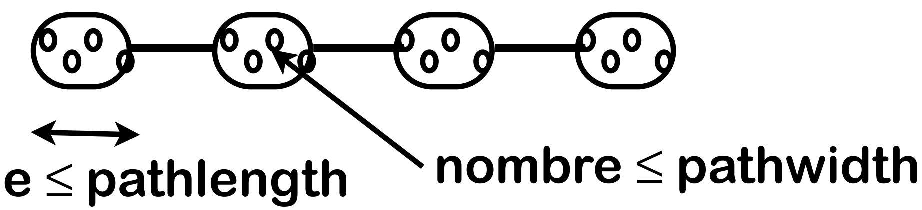


- THM : il existe une matrice **M** et un étiquetage $\mathcal{E}$ t.q. tout G étiqueté par $\mathcal{E}$ et augmenté par **M** a un diamètre glouton:

$$O(\min(\text{pathshape}(G).\log^2 n, \sqrt{n}))$$

Matrice + étiquetage idoine

- Pathshape = min(pathwidth, pathlength). [def°]



- THM : il existe une matrice M et un étiquetage $\mathcal{E}$ t.q. tout G étiqueté par $\mathcal{E}$ et augmenté par M a un diamètre glouton:

$$O(\min(\mathrm{pathshape}(G).\log^2 n, \sqrt{n}))$$

➡ Les arbres sont $O(\log^3 n)$-navigables. (pathwidth=logn)

➡ Les graphes AT-free sont $O(\log^2 n)$-navigables. (pathlength=cte)

Réduire la matrice?

- Une matrice d’augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

Réduire la matrice?

- Une matrice d'augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - Si l'on donne des étiquettes de taille < ε log n, peut-on préserver une augmentation polylog(n)-navigable?

➡ Peut-on réduire la taille de la matrice (ex : $\sqrt{n}$)?

Réduire la matrice?

- Une matrice d'augmentation + un étiquetage particulier associé: une augmentation aléatoire.

- Question:
  - Si l'on donne des étiquettes de taille $< \varepsilon \log n$, peut-on préserver une augmentation polylog(n)-navigable?

➡ Peut-on réduire la taille de la matrice (ex : $\sqrt{n}$)?

Réponse: non.

Réduire la matrice?

- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

Réduire la matrice?

- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

- Soit $b < (1-\varepsilon)/3$ et $a > 2b$.

- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^a noeuds.

Réduire la matrice?

- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

- Soit $b < (1-\varepsilon)/3$ et $a > 2b$.
- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^a noeuds.
- Nombre d'étiquettes : n^{ε}.

Réduire la matrice?

- THM: tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

- Soit $b < (1-\varepsilon)/3$ et $a > 2b$.
- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^a noeuds.
- Nombre d'étiquettes : n^ε.
- Nombre d'étiquettes non populaires : au plus n^ε.

Réduire la matrice?

- **THM**: tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

- Nombre d'étiquettes non populaires : au plus n^{ε}.
- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^{a} noeuds.

Réduire la matrice?

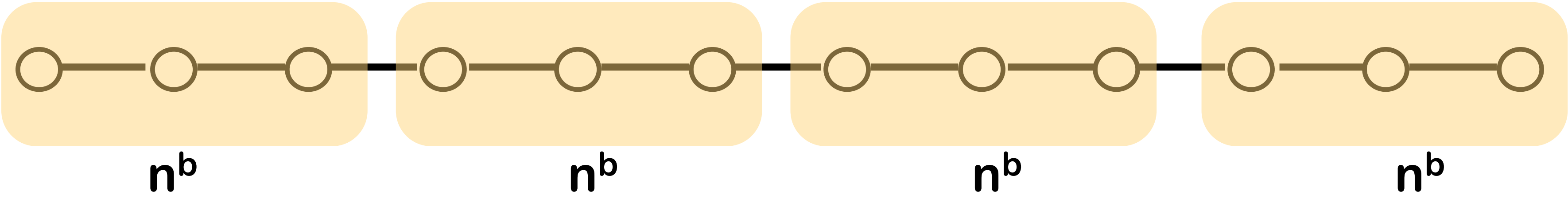
- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

- Nombre d'étiquettes non populaires : au plus n^{ε}.
- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^{a} noeuds.

Réduire la matrice?

- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des étiquettes de taille $\varepsilon \log n$, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

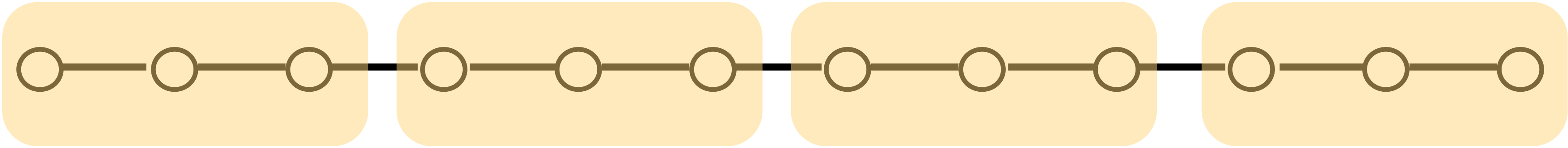
- Nombre d'étiquettes non populaires : au plus n^{ε}.
- Etiquette "populaire": possédée par au moins n^{a} noeuds.



Réduire la matrice?

- **THM:** tout schéma d'augmentation (matrice, étiquetage) utilisant des **étiquettes de taille $\varepsilon \log n$**, pour $\varepsilon < 1$ sur le chemin produit un **diamètre glouton $\Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$**.

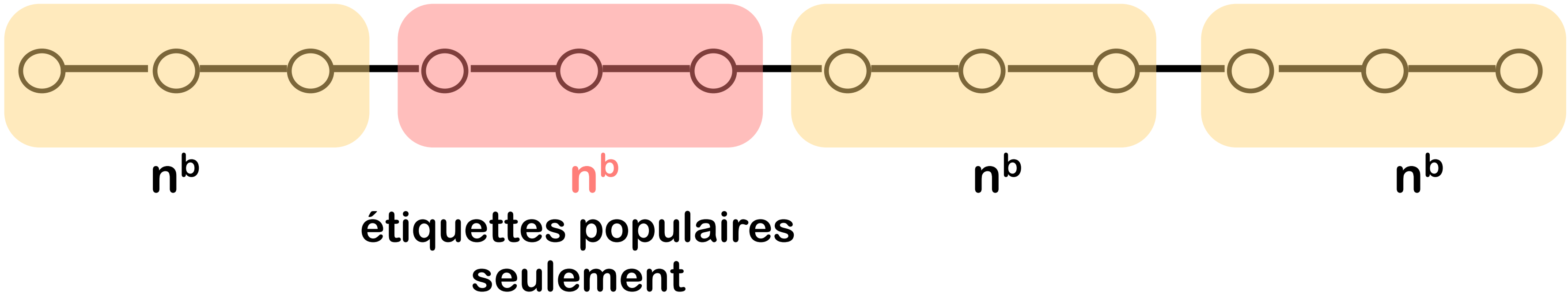
- **Nombre d'étiquettes non populaires :** au plus n^ε.
- **Etiquette "populaire"**: possédée par **au moins n^a noeuds**.



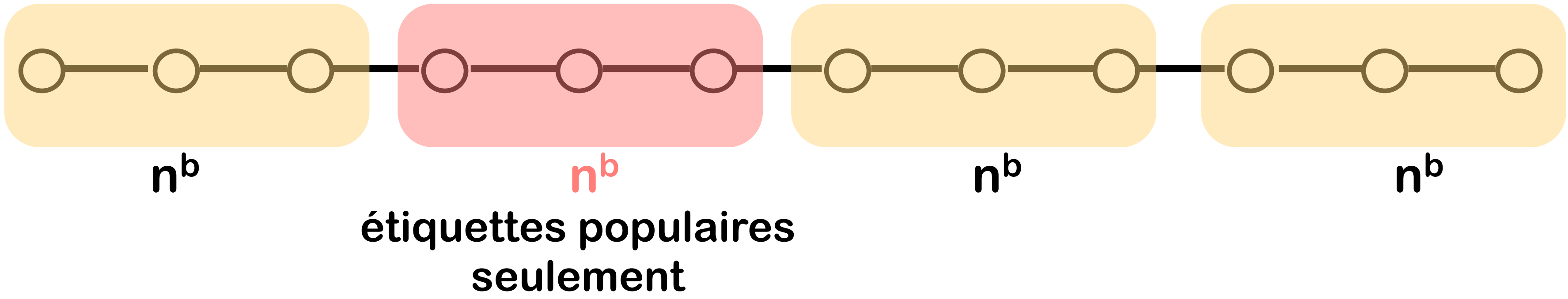
n^b n^b n^b n^b

Lemme : au moins un intervalle ne contient que des étiquettes populaires.

Réduire la matrice?

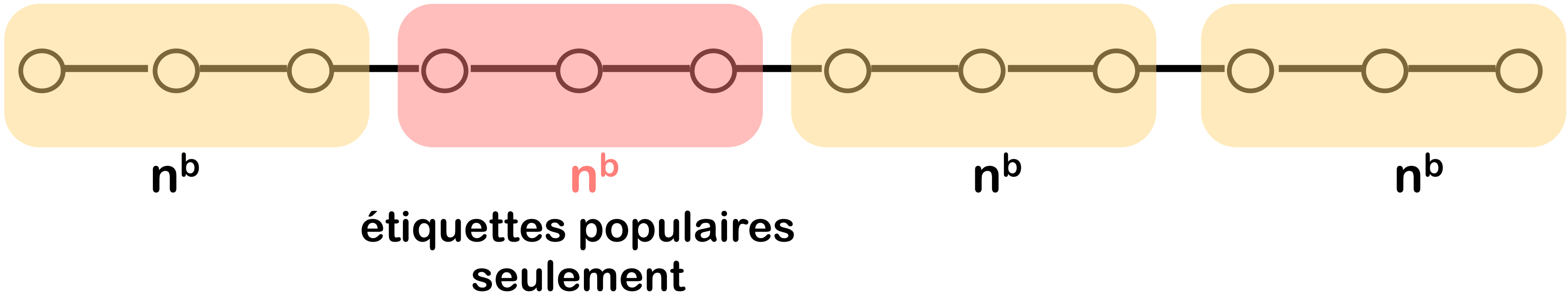


Réduire la matrice?



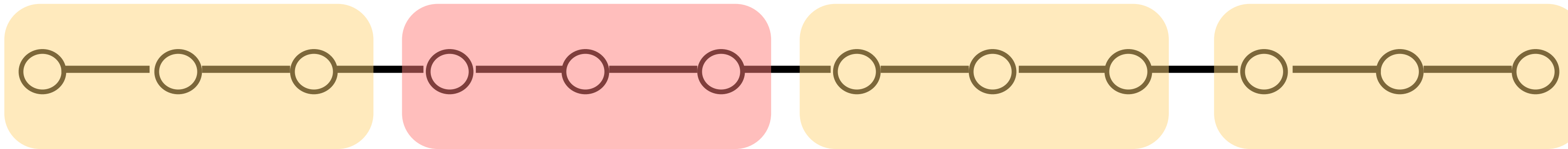
- Pour une étiquette qui apparaît X fois, la probabilité dans la matrice est divisée par X.

Réduire la matrice?



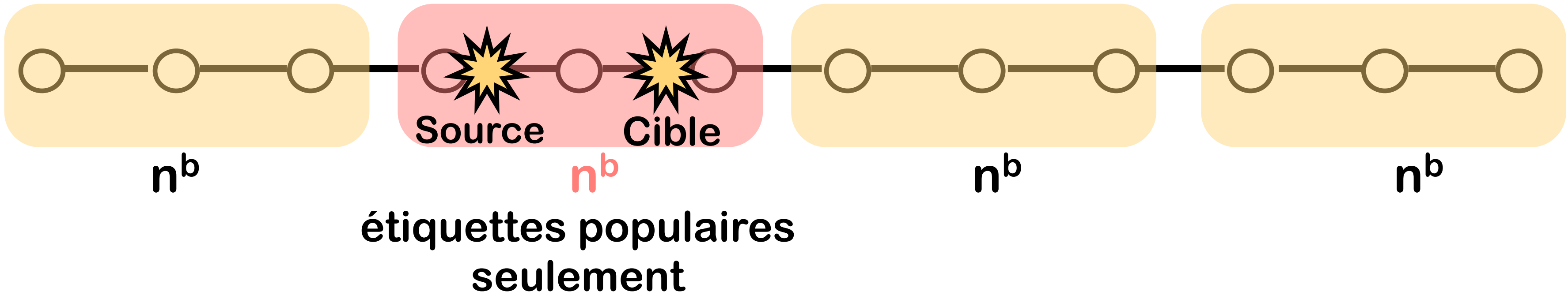
- Pour une étiquette qui apparaît X fois, la probabilité dans la matrice est divisée par X.
- Soit u dans l'intervalle.
- Pr(u a un lien dans l'intervalle) $\leq n^b / n^a$.

Réduire la matrice?



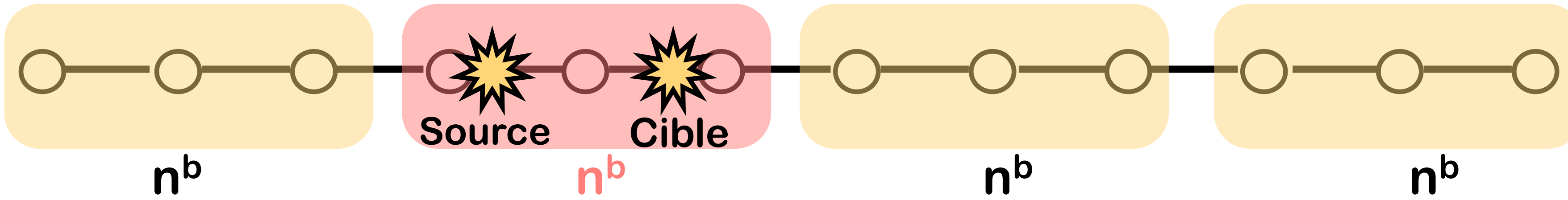
- Pour une étiquette qui apparaît X fois, la probabilité dans la matrice est divisée par X.
- Soit u dans l'intervalle.
- Pr(u a un lien dans l'intervalle) $\leq n^b / n^a$.
- E(nombre de longs liens dans l'intervalle) $\leq n^{2b-a} < 1$.

Réduire la matrice?



- Pour une étiquette qui apparaît X fois, la probabilité dans la matrice est divisée par X.
- Soit u dans l'intervalle.
- Pr(u a un lien dans l'intervalle) $\leq n^b / n^a$.
- E(nombre de longs liens dans l'intervalle) $\leq n^{2b-a} < 1$.

Réduire la matrice?



- Pour une étiquette qui apparaît X fois, la probabilité dans la matrice est divisée par X.
- Soit u dans l'intervalle.
- Pr(u a un lien dans l'intervalle) $\leq n^b / n^a$.
- E(nombre de longs liens dans l'intervalle) $\leq n^{2b-a} < 1$.

E(étapes de  à ) $= \Omega(n^{(1-\varepsilon)/3})$.

Conclusion

- **Augmentation universelle à postériori:**
  - ➡ **Borne inf :** $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ **- GAP - Borne sup :** $\tilde{O}(n^{1/3})$

Conclusion

- **Augmentation universelle à postériori:**
  ➡ **Borne inf :** $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ **- GAP - Borne sup :** $\tilde{O}(n^{1/3})$

- **Augmentation universelle par matrice:**
  ➡ **Matrices seules : pas d'espoir d'amélioration.**

Conclusion

- **Augmentation universelle à postériori:**

➡ **Borne inf : $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - GAP - Borne sup : $\tilde{O}(n^{1/3})$**

- **Augmentation universelle par matrice:**

➡ **Matrices seules : pas d'espoir d'amélioration.**

➡ **Matrices + étiquetage associé: amélioration.**

Conclusion

- Augmentation universelle à postériori:
  ➡ Borne inf : $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - GAP - Borne sup : $\tilde{O}(n^{1/3})$

- Augmentation universelle par matrice:
  ➡ Matrices seules : pas d'espoir d'amélioration.

  ➡ Matrices + étiquetage associé: amélioration.

  ➡ Somme de matrices : combinaisons d'augmentations.

Conclusion

- Augmentation universelle à postériori:

➡ Borne inf : $\Omega(n^{1/\sqrt{(\log n)}})$ - GAP - Borne sup : $\tilde{O}(n^{1/3})$

- Augmentation universelle par matrice:

➡ Matrices seules : pas d'espoir d'amélioration.

➡ Matrices + étiquetage associé: amélioration.

➡ Somme de matrices : combinaisons d'augmentations.

➡ Peut-on faire mieux que $O(\sqrt{n})$ pour les augmentations par matrices?

Merci

- **Référence:**

  Universal Augmentation Scheme for Network Navigability: Overcoming the $\sqrt{n}$-Barrier, *P. Fraigniaud, C. Gavoille, A. Kosowski, Z. Lotker, E. Lebhar, SPAA 2007.*

- **www.liafa.jussieu.fr/~elebhar/SPAA07a.pdf**