# *Automates Cellulaires 2D : Exemples de comportements asynchrones*

Nazim Fatès & Lucas Gerin
LORIA, Université Nancy 1

Séminaire MC2 - Mercredi 11 juin 2008

# *Motivations*

Étude de certains Automates Cellulaires 2D à 2 états.

Informaticiens

- Classification ?
- Robustesse

Probabilistes

- Processus aléatoires atypiques
- Métastabilité
- Combinatoire (pavages, points fixes,...)

# *Plan*

*Automates Cellulaires 2D*

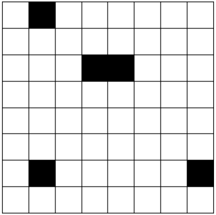
- Dynamique
- Convergence

*Convergence rapide*

*Convergence lente*

# *L'environnement*

Pour $L \in \mathbb{N}$, on note $\Lambda$ la grille $\{1, \ldots, L\} \times \{1, \ldots, L\}$.
On note $n = L^2$ le nombre de cellules.



Une **configuration** $\sigma$ est un élément de $\{0, 1\}^\Lambda$.
On l'écrit $\sigma = \{\sigma_c, c \in \Lambda\}$.

# *Automates Cellulaires 2D totalisants*

Dans cet exposé, un automate cellulaire, c'est

- Une *règle locale* $\Phi : \{0,1\}^5 \longrightarrow \{0,1\}$,
- Une *configuration initiale* $\sigma^0$ dans $\{0,1\}^\Lambda$.
- Une *séquence de mise à jour* $(U_t)_{t \geq 0}$, chaque $U_t \subset \Lambda$.

# *Automates Cellulaires 2D totalisants*

Dans cet exposé, un automate cellulaire, c'est

- Une *règle locale* $\Phi : \{0,1\}^5 \longrightarrow \{0,1\}$,
- Une *configuration initiale* $\sigma^0$ dans $\{0,1\}^\Lambda$.
- Une *séquence de mise à jour* $(U_t)_{t\geq 0}$, chaque $U_t \subset \Lambda$.

On suppose que $\Phi$ peut s'écrire

$$\Phi(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5) = f(q_1+q_2+q_3+q_4+q_5),$$

où $f : \{0,1,\dots,5\} \longrightarrow \{0,1\}$.

$2^{2^5}$ règles locales, mais seulement $2^6$ sont totalisantes.

# La dynamique : (a)synchronisme

À l'instant $t$, les cellules $U_t$ sont mises à jour, selon la règle $\Phi$ :

$$\sigma_c^{t+1} = \begin{cases} f(\sigma_c^t + \sigma_{c+\vec{n}}^t + \sigma_{c-\vec{n}}^t + \sigma_{c+\vec{e}}^t + \sigma_{c-\vec{e}}^t) & \text{pour } c \text{ dans } U_t \text{ ;} \\ \sigma_c^t & \text{sinon. .} \end{cases}$$

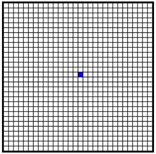
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & f(3) & 0 \\ & 0 & \end{array}$$

$U_t = \Lambda$ : dynamique synchrone
$U_t =$\{une cellule au hasard\} : dynamique totalement asynchrone

# *Un exemple : l'Épidémie*

Soit $f$ la règle :

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

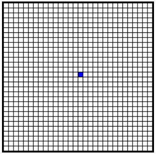


$t = 0$

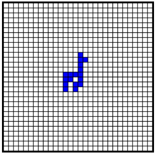
# *Un exemple : l'Épidémie*

Soit $f$ la règle :

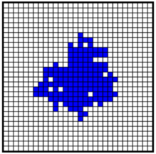
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



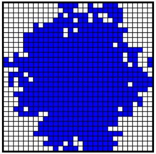
$t = 0$



$t = 1800$



$t = 4500$



$t = 8100$

# *Le problème*

Informaticiens

- Convergence/Non-convergence ?
- En combien de temps ?
- Vers quoi ?

Probabilistes

- Convergence/Non-convergence ?
- En combien de temps ?
- Vers quoi ?

# *Pire Temps Moyen de Convergence*

Soit

$$T_f(\sigma^0) = \min\{t \geq 0; \sigma^t \text{ est un point fixe } \} \in \overline{\mathbb{N}}$$

Définition

*Le Pire Temps Moyen de Convergence est le réel*

$$PTMC_f = \max_{\sigma^0} \mathbb{E}[T_f(\sigma^0)]$$

# *Les résultats*

Théorème

*Parmi les 64 règles, il y a au moins 4 types de comportement :*

| **Règle** | **PTMC** |
|---|---|
| *Collectionneur de Coupons* | $\approx n \log n$ |
| *Épidémie* | $\approx n^{3/2}$ |
| *Majorité* | $\approx n^2$ |
| | |
| *Compteur de Parité* | $+\infty$ |

# *Les résultats*

**Théorème**

*Parmi les 64 règles, il y a au moins 4 types de comportement :*

| **Règle** | **PTMC** |
|---|---|
| *Collectionneur de Coupons* | $\approx n \log n$ |
| *Épidémie* | $\approx n^{3/2}$ |
| *Majorité* | $\approx n^2$ |
| *Erratique* | $\approx 2^n$ ? |
| *Minorité* | ? ? |
| *Compteur de Parité* | $+\infty$ |

# Plan

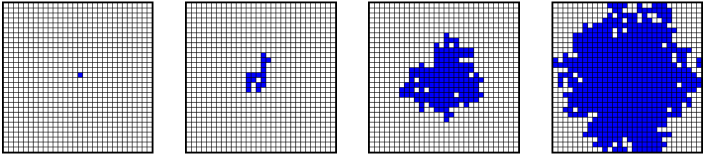
*Automates Cellulaires 2D*

- Dynamique
- Convergence

*Convergence rapide*

*Convergence lente*

# *Retour sur la règle Épidémie*



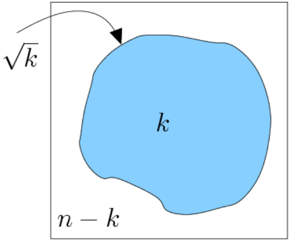
$t = 0$ $t = 1800$ $t = 4500$ $t = 8100$

Théorème

*Il existe deux constantes $C_-, C_+$ telles que*

$$\frac{C_-}{\log n} n^{3/2} \leq \mathbb{E}[\,T_f(\sigma^0)] \leq C_+ \log n . n^{3/2}.$$

# *Épidémie : pourquoi $n^{3/2}$ ?*




Lorsque $k$ cellules ont déjà été coloriées, il y a $\Theta(\sqrt{k})$ cellules susceptibles d'être mises à jour.

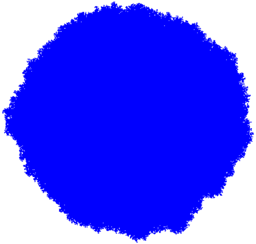
Il faut donc attendre de l'ordre de $\frac{n}{\sqrt{k}}$ étapes avant de colorier une nouvelle case.

Et donc

$$\mathbb{E}[T_f(\sigma^0)] \approx \sum_{k \leq n} \frac{n}{\sqrt{k}} \approx n^{3/2}.$$

# *Épidémie : une remarque*

L'automate épidémie sur $\mathbb{Z}^2$ tout entier est un modèle connu des probabilistes.
**[Richardson 60's],[Kesten 80's]**

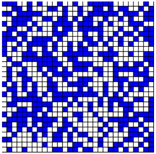


Métathéorème (Kesten 86)
*La forme asymptotique n'est pas un disque. C'est sûrement un crystal de Wulff.*

# *Convergence rapide : la Majorité*

Soit $f$ la règle :

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

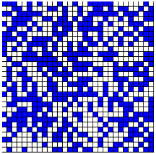


$t = 0$

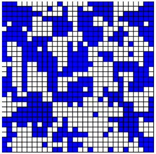
# *Convergence rapide : la Majorité*

Soit $f$ la règle :

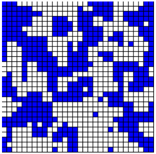
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |



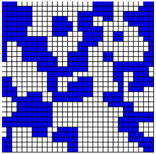
$t = 0$



$t = 900$



$t = 1800$



$t = 12000$

# *Majorité : pourquoi $n^2$ ?*

Pour une configuration $\sigma$, on pose

$$\mathcal{I}(\sigma) = \mathrm{card}\{(c, c') \in \Lambda \mid c \sim c' \text{ et } \sigma_c = \sigma_{c'}\} \in \{0, \ldots, 2n\},$$

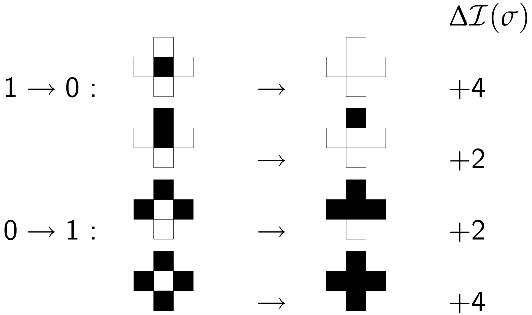
où $c \sim c'$ signifie que les cellules $c, c'$ sont voisines.

# *Majorité : pourquoi $n^2$ ?*

Pour une configuration $\sigma$, on pose

$$\mathcal{I}(\sigma) = \mathrm{card}\{(c,c') \in \Lambda \mid c \sim c' \text{ et } \sigma_c = \sigma_{c'}\} \in \{0,\dots,2n\},$$

où $c \sim c'$ signifie que les cellules $c, c'$ sont voisines.



## *Majorité : pourquoi $n^2$ ?*

Le processus $(\mathcal{I}(\sigma^t))_t$ est croissant. Mieux :

$$\mathbb{E}[\Delta\mathcal{I}(\sigma^t) \mid \sigma^t \text{ n'est pas un point fixe }] \geq \frac{2}{n}.$$

# *Majorité : pourquoi $n^2$ ?*

Le processus $(\mathcal{I}(\sigma^t))_t$ est croissant. Mieux :

$$\mathbb{E}[\Delta\mathcal{I}(\sigma^t) \mid \sigma^t \text{ n'est pas un point fixe }] \geq \frac{2}{n}.$$

Finalement,

Théorème

*Pour tout choix de $\sigma^0$,*

$$\mathbb{E}[T_f(\sigma^0)] = \mathcal{O}(n^2).$$

# *Plan*

*Automates Cellulaires 2D*

- Dynamique
- Convergence

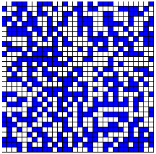
*Convergence rapide*

*Convergence lente*

# *La règle erratique*

Soit $f$ la règle :

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

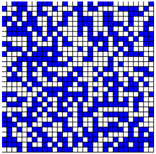


$t = 0$

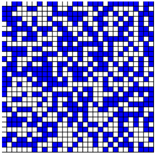
# *La règle erratique*

Soit $f$ la règle :

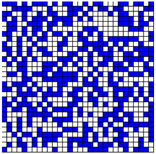
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |



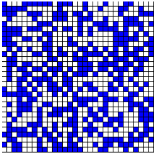
$t = 0$



$t = 10^3$



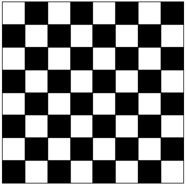
$t = 10^5$

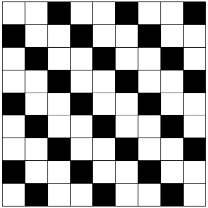


$t = 10^8$

# *Et pourtant...*

Il existe des points fixes, par exemple





| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# *La règle erratique : métastabilité ?*

## Conjecture

*Pour la règle erratique,*

$$PTMC_f = \Theta(2^n).$$

En s'inspirant de situations semblables, on peut imaginer que

$$\frac{T_f}{2^n} \xrightarrow{\text{loi}} \text{Exp}.$$

(voir **[Aldous-Fill 99]**.)

# *Ce qu'il reste à faire*

- Classification des 64 règles
- Règle Minorité **[Regnault-Schabanel-Thierry]**
- Comportement en moyenne
- Comprendre la métastabilité
- ...