

UNIVERSITE DE YAOUNDE I  
*UNIVERSITY OF YAOUNDE I*

FACULTE DES SCIENCES  
*FACULTY OF SCIENCES*

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE  
*DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCES*

# **Transitoire de longueur exponentielle généralisé par une équation neuronale récurrente**

René Ndoundam, Maurice Tchente

# PLAN

## 1. Introduction

(a) Réseaux d'automates

(b) Dynamique

(c) Transitoire et Cycle

(d) Problématique

(e) Réseaux de neurones de McCulloch  
et Pitts

(f) Equation neuronale de Caianiello et  
De Luca

## 2. Dynamique de l'équation neuronale récurrente

(a) Questions

(b) Etat de l'art

(c) Notre contribution

(d) Transitoire

3. Conclusion

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Réseaux d'automates

Un réseau d'automates est un modèle mathématique discret  $A = (G(V, E), Q, F)$  où :

- $G = (V, E)$  est un graphe appelé graphe de connexion. On se place dans le cas où  $G$  est fini.
- On note  $\Gamma_G^-(i) = \{j : j \in V \text{ et } (j, i) \in E\}$ , c-à-d l'ensemble des sommets originaires d'un arc se terminant en  $i$ .
- $Q$  est l'ensemble des états.
- $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : Q^n \longrightarrow Q^n$  est la fonction globale de transition.

### 1.1.2 Dynamique

La dynamique d'un tel réseau est définie par l'évolution dans une échelle temporelle discrète de l'état de chaque élément du réseau. Cette évolution peut s'effectuer :

- en *parallèle* (tous les automates changent d'état de manière *synchrone* en fonction de l'état du réseau à l'étape précédente)

$$x_i(t+1) = f_i\left(x_j(t) : j \in \Gamma_G^-(i)\right), \quad 1 \leq i \leq n$$

- avec *mémoire* (l'état à l'instant  $t + 1$  dépend des états aux instants  $t, t -$

$1, \dots, t - k + 1)$

$$x_i(t+1) = f_i\left(x_j(t), \dots, x_j(t-k+1) : j \in \Gamma_G^-(i)\right),$$

- en *série* (les automates changent d'état l'un après l'autre, selon une séquence prédéterminée). La fonction de transition locale est :

$$x_1(t+1) = f_1\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)$$

$$x_i(t+1) = f_i\left(x_1(t+1), x_2(t+1), \dots, x_n(t)\right), \quad 1 < i < n$$

- *bloc-séquentielle* correspond à une combinaison de l'itération séquentielle et de l'itération parallèle.

### 1.1.3 Transitoire et Cycle

A partir de  $X(0) \in Q^n$ , nous construisons la suite  $X(t) = F^t(X(0))$  pour l'itération parallèle (ou bien  $X(t) = G^t(X(0))$  pour l'itération série).

Puisque les configurations  $X(t)$  n'ont que  $|Q|^n$  valeurs possibles, la suite finit par devenir périodique. Plus précisément, il existe un entier  $T$ ,  $0 \leq T < |Q|^n$  appelé transitoire et un entier  $p$ ,  $1 \leq p \leq |Q|^n$  appelé période tels que :

- $\forall t, t' \in \{0, 1, \dots, p + T - 1\}, t \neq t'$  implique qu

$$(1.1)$$

- $X(T + p) = X(T)$

$$(1.2)$$

L'importance de l'étude des longueurs de transitoire et de cycle vient notamment du fait qu'ils peuvent être interprétés comme des indicateurs de complexité des automates sous-jacents.

**Exemple :**  $Q = \{0, 1\}, V = \{0, 1, 2\}$ .

Considérons la fonction globale de transi-



tion  $F = (f_2, f_1, f_0)$  où :

$$f_2(x) = \overline{x_0}x_1 + \overline{x_1}x_2$$

$$f_1(x) = \overline{x_0}x_1 + \overline{x_1} \overline{x_2} + x_0x_2$$

$$f_0(x) = \overline{x_0}x_2 + \overline{x_1}$$

Le calcul de la table de  $F$  :

$x$			$F(x)$		
$x_2$	$x_1$	$x_0$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f_0(x)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

TAB. 1.1 – Table de  $F$

permet de dessiner le graphe de l'itération  
parallèle.

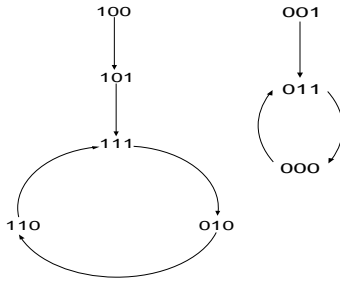


FIG. 1.1 – graphe d’itération de  $F$

#### 1.1.4 Problématique

Cet exposé est consacré à l’étude du comportement dynamique du point de vue de la longueur du transitoire et de la longueur de la période de l’équation neuronale récurrente à mémoire de Caianiello et De Luca.

Le modèle de réseaux de neurones est utilisé dans des applications variées de l'informatique : résolution des problèmes de classification, reconnaissance de la parole et traitement d'images [6]. Le réseau de Hopfield est un exemple très connu d'une telle approche et beaucoup de travaux lui ont été consacré comme exemple de mémoire associative [10].

Les réseaux de neurones ont été étudiés dans plusieurs domaines de l'intelligence artificielle comme paradigme alternatif au modèle conventionnel de von Neumann.

### 1.1.5 Réseaux de neurones de McCulloch et Pitts

Dans la suite, on suppose que  $|Q| = 2$ , soit la fonction *sign* définie ainsi :

- dans le cas où  $Q = \{0, 1\}$ , *sign* est la fonction à seuil définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas la fonction *sign* est remplacée par la fonction de Heavyside **1**.

- dans le cas où  $Q = \{-1, 1\}$ , *sign* est la fonction à seuil définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas la fonction *sign* est remplacée par la fonction **H**.

McCulloch et Pitts [13] ont suggéré en 1943 de modéliser le cerveau humain par un réseau d'automates à seuil, où chaque automate représente un neurone formel.

Dans le mode d'itération parallèle, la fonction de transition locale du neurone numéro  $i$  à l'instant  $t$  est :

$$x_i(t) = \text{sign} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t-1) - b_i \right) , \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.3)$$

où :

- $x_i(t - 1)$  est l'état du neurone  $i$  au temps  $t - 1$ ,  $x_i(t - 1) \in Q$ .
- $b_i$  est le seuil d'excitation du neurone  $i$ .
- $a_{ij}$  est le poids de connexion qui représente l'influence de l'état du neurone  $j$  au temps  $t - 1$  sur l'état du neurone  $i$  au temps  $t$ .
- $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t-1)$  est le potentiel membranaire du neurone  $i$  à l'instant  $t - 1$ .

Une représentation simplifiée de ces opérations neuronales est schématisée dans la figure 1.2 ci-dessous :

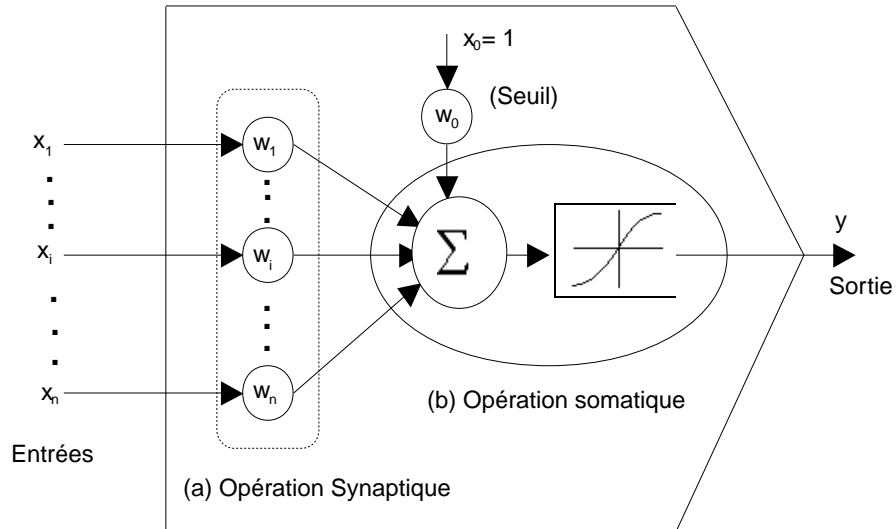


FIG. 1.2 – modèle simplifié de neurone formel.

#### 1.1.6 Equation neuronale de Caianiello et De Luca

Caianiello et De Luca [1] ont proposé l'étude de la dynamique de l'équation (1.3) dans le cas d'un neurone qui n'interagit avec aucun autre neurone par une équation neuronale de la forme :

$$x(n) = \text{sign} \left( \sum_{i=1}^k a_i x(n-i) - \theta \right) \quad (1.4)$$

où :

- $k$  est la longueur de la mémoire, c'est-à-dire que l'état du neurone au temps  $t = n$  ne dépend que de ses états aux  $k$  étapes précédentes.
- $a_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) est un nombre réel qui représente l'influence de l'état du neurone à l'instant  $n - i$  sur l'état du neurone à l'instant  $n$ . Cette influence est dite *excitatrice* si  $a_i > 0$ , *inhibitrice* si  $a_i < 0$  et *nulle* si  $a_i$  est égale à 0.



Le comportement dynamique de l'équation neuronale (1.4) est entièrement déterminé par la taille de la mémoire  $k$ , le seuil d'excitation  $\theta$ , les coefficients d'interaction  $(a_j)_{1 \leq j \leq k}$  et les états initiaux  $x(0), x(1), \dots, x(k - 1)$ .

Dans l'étude de la dynamique de l'équation neuronale (1.4) de Caianiello et De Luca, nous notons  $LP(k)$  la plus longue période que peut générer un automate de taille mémoire  $k$ .

## 1.2 Dynamique de l'équation neuronale récurrente

### 1.2.1 Questions

Dans l'étude de l'équation neuronale récurrente de Caianiello et De Luca de taille mémoire  $k$  :

$$x(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{i=1}^k a_i x(n-i) - \theta \right) \quad (1.5)$$

Cosnard, Moumida, Goles et T. de St.

Pierre [5] ont conjecturé :

**Conjecture 1** [5] :

**Si** les coefficients d'interaction

$a_1, a_2, \dots, a_k$  sont quelconques **Alors**

$$LP(k) \leq 2k.$$

**Conjecture 2** [5] :

**Si** les coefficients d'interaction

$a_1, a_2, \dots, a_k$  sont tous positifs **Alors**

$$LP(k) \leq k.$$

**Question Ouverte** [3] :

Cosnard a posé la question suivante :  
existe-t-il une équation neuronale récurrente  
à mémoire qui décrit un transitoire de lon-  
gueur exponentielle par rapport à la taille  
de la mémoire ?

### 1.2.2 Etat de l'art

La conjecture 1 a été infirmée par :

- Moumida [12] qui a exhibé une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $2k + 6$ .
- Cosnard, Tchuenté et Tindo [4] qui ont exhibé d'une part une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $O(k^2)$  et d'autre part une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $O(k^3)$ .
- Tchuenté et Tindo [19] par l'exhibition d'une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $O(e^{\sqrt{k}})$ .

La conjecture 2 a été infirmée par :

- Ndoundam et Matamala [14] par l'exhibition d'une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $O(k^3)$ .
- Ndoundam et Tchuenté [16] par l'exhibition d'une équation neuronale de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $\Omega(e \sqrt[3]{k(\ln k)^2})$ .

Cosnard, Tchuenté et Tindo [4] ont établi le lemme ci-dessous que nous appelons par la suite le *Lemme du Mélange Parfait*.

**Lemme 1** [4] S'il existe une équation neuronale récurrente de mémoire  $k$ :

$$x(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{i=1}^k a_i x(n-i) - \theta \right)$$

qui génère  $r$  cycles de longueur  $l_1, l_2, \dots, l_r$ , alors il existe une nouvelle équation neuronale récurrente de taille mémoire  $kr$  qui engendre un cycle de longueur  $r \times \text{ppcm}(l_1, l_2, \dots, l_r)$  où *ppcm* désigne le plus petit commun multiple.



Tchunte et Tindo [19] considèrent un entier  $k$  multiple de 6 (c'est-à-dire  $k =$

$6m$ ), un réel positif  $\bar{\theta} \geq 2m$  et  $k$  coefficients réels  $(\bar{a}_j)_{1 \leq j \leq k}$  définis ainsi :

$$\bar{a}_j = \begin{cases} (\bar{\theta}/2) - i & \text{si } j = 3m - i, \quad 1 \leq i \leq m \\ (\bar{\theta}/2) + i & \text{si } j = 2(3m - i), \quad 1 \leq i \leq m \\ -k(\bar{\theta} + m) & \text{autrement} \end{cases} \quad (1.6)$$

pour tout  $r$ ,  $1 \leq r \leq m - 1$ , les  $k$  premiers termes de la suite  $\{x^r(n) : n \geq 0\}$  sont définis ainsi :

$$x^r(0), x^r(1), \dots, x^r(k-1) = \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{2r} \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0}_{3m-r} \underbrace{1 \ 0 \ 0 \ \dots}_{3m-r} \quad (1.7)$$

Il a été montré que la suite  $\{x^r(n) : n \geq 0\}$  engendrée par l'équation neuronale de Caianiello et De Luca (1.4) admet pour période  $3m - r$ , son évolution est :

$$\underbrace{0\ 0\ \dots\ 0}_{2r}\ \underbrace{1\ 0\ \dots\ 0}_{3m-r}\ \underbrace{1\ 0\ \dots\ 0}_{3m-r}\ \dots\ \underbrace{1\ 0\ \dots\ 0}_{3m-r}\ \dots\ \underbrace{1\ 0\ \dots\ 0}_{3m-r}\ \dots\ \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Notre contribution

- une méthode de construction des transitoires à partir des cycles des équations neuronales récurrentes
- l'existence des équations neuronales récurrentes



à mémoire qui décrivent des transitoires et des cycles de longueur exponentielle par rapport à la taille de la mémoire.

Nous répondons ainsi par l'affirmative à la question ouverte posée par Cosnard.

#### 1.2.4 Transitoire

Soit l'équation neuronale récurrente à mémoire suivante :

$$y(n) = \mathbf{1}\left(\sum_{f=1}^h b_f y(n-f) - \theta_3\right) \quad (1.9)$$

qui décrit un cycle de longueur  $L_1$  à partir des termes initiaux

$$y(0), y(1), \dots, y(h-1)$$

La figure 1.3 illustre le comportement dynamique de la suite  $y$ .

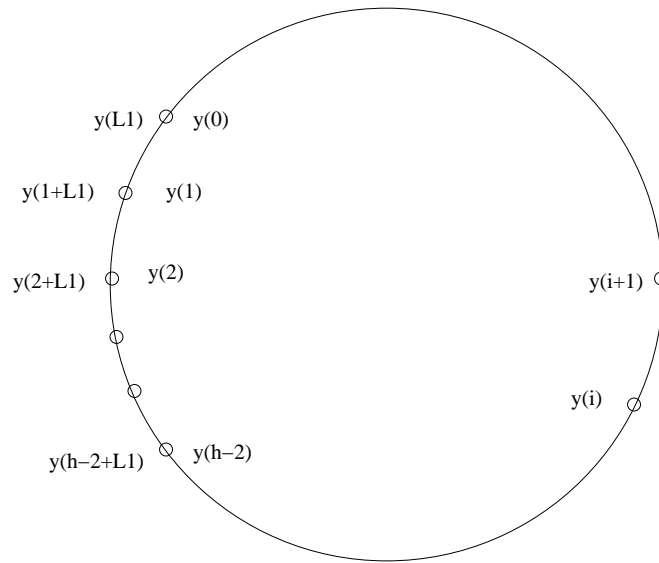


FIG. 1.3 – Comportement cyclique de la suite  $y$

Nous présentons une méthode qui à partir des termes de la suite  $\{y(n) : n \geq 0\}$

permet de construire une équation neuro-  
nale récurrente qui décrit un transitoire de  
longueur supérieure à  $L_1$  dans certains cas.

Notons

$$\xi = \min \left\{ -\theta_3 + \sum_{j=1}^h b_j y(t-j) : t \geq h \text{ et } \sum_{j=1}^h b_j y(t-j) \right.$$

$$\eta = \max \left\{ -\theta_3 + \sum_{j=1}^h b_j y(t-j) : t \geq h \text{ et } \sum_{j=1}^h b_j y(t-j) \right.$$

$\tau$  est un réel quelconque appartenant  
à l'intervalle  $[\eta, 0[$

$$\lambda = -\xi + \tau = -(\xi - \tau) \quad (1.10)$$

$$p = \max \left\{ \sum_{j=1}^h y(t-j) : t \geq h \right\} \quad (1.11)$$

$p$  représente le nombre maximum de termes égaux à 1 dans un bloc de  $h$  termes consécutifs de la suite  $y$ .

Graphiquement, les valeurs de l'équation neuronale récurrente (1.9) sont réparties ainsi :

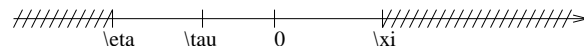


FIG. 1.4 – Repartition des valeurs de l'équation neuronale récurrente

Nous définissons

$$\beta = \frac{\lambda}{-1+p} \quad , \quad \mu = \lambda - \frac{\beta}{8} \quad (1.12)$$

Soit  $A$  l'ensemble des entiers  $f$ ,  $1 \leq f \leq h$  vérifiant  $y(h-1-f+L_1) = 1$ .

Sans nuire à la généralité, on suppose que :

- $\text{card } A = -1 + p \quad (1.13)$

- $\sum_{j \in A} y(t-j) \leq -2 + p \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq h-2+L_1 \quad (1.14)$

- $\sum_{f=1}^h b_f y(h-1-f+L_1) = \theta_3 + \xi \quad (1.15)$

L'idée de base est de construire la suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  dont les termes sont

généérés par l'équation neuronale récurrente suivante :

$$z(n) = \mathbf{1}\left(\sum_{f=1}^h c_f z(n-f) - \theta_4\right) \quad (1.16)$$

et dont les termes initiaux sont initialisés ainsi :

$$z(f) = y(f) \quad 0 \leq f \leq h-1 \quad (1.17)$$

Les paramètres  $c_f$  et  $\theta_4$  sont définis ainsi :

$$c_f = \begin{cases} b_f, & 1 \leq f \leq h \text{ et } f \notin A \\ b_f + \beta, & 1 \leq f \leq h \text{ et } f \in A \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\theta_4 = \theta_3 + \mu + \xi$$

Notons

$$Q(t) = -\mu + \beta \sum_{f \in A} z(t - f) \quad \text{pour tout } t \geq h$$

(1.19)

$$S2(n) = \sum_{f=1}^h b_f y(n - f) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq h$$

(1.20)

**Proposition 1** Si :

$$z(n-f) = y(n-f) \quad \forall f \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq f \leq h$$

Alors :

$$z(n) = \mathbf{1} \left( S2(n) - \theta_3 + Q(n) \right)$$

Nous voulons utiliser le fait que :

- $\sum_{f \in A} z(n - f) = -1 + p$  implique que  $Q(n) = \frac{\beta}{8} < 0$

$$(1.21)$$

- $\sum_{f \in A} z(n - f) \leq -2 + p$  entraîne que  $\frac{-7\beta}{8} \leq Q(n) \leq -$

$$(1.22)$$

- $\sum_{f=1}^h b_f y(h - 1 - f + L_1) = \xi + \theta_3.$

$$(1.23)$$

pour démontrer que la suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  décrit dans certains cas un transitoire de longueur supérieure à  $L_1$ .

L'évolution de la suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$



se déroule en quatre phases.

## **Phase 1.**

La phase 1 est caractérisée par le Lemme ci-dessous.

**Lemme 2** *Dans l'évolution de l'équation neuronale  $\{z(n) : n \geq 0\}$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq t \leq h-2+L_1$ , nous avons :*

$$z(t) = y(t)$$



## **Phase 2.**

Le lemme ci-dessous caractérise la phase 2.

**Lemme 3**  $z(h - 1 + L_1) = 0$  alors que  $y(h - 1 + L_1) = 1$



Après la phase 2, le comportement de la suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  commence à être différent du comportement de la suite  $\{y(n) : n \geq 0\}$ . Après la deuxième phase, deux cas de figures sont possibles.

**premier cas de figure** : transitoire de longueur supérieure à  $L_1$ .

La figure 1.3 illustre la trajectoire de l'équation neuronale récurrente  $y$ , alors que la figure 1.5 illustre la trajectoire l'équation neuronale récurrente  $z$ .

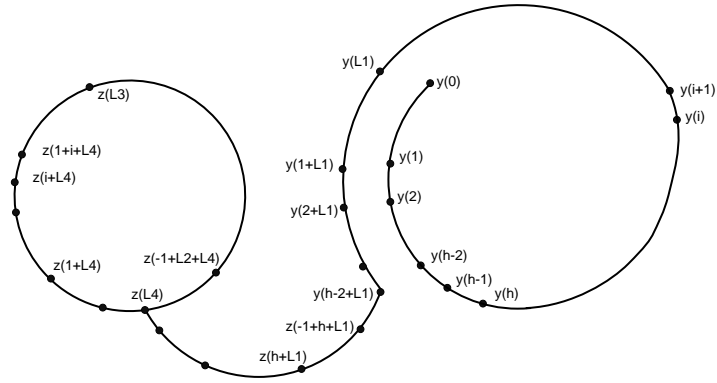


FIG. 1.5 – Comportement de la suite  $z$

### Phase 3.

Cette phase commence au temps  $h + L_1$  et s'achève au temps  $-1 + L_3$ .

On pose  $L_4 = -h + L_3$ .

### Phase 4.

Cette phase commence au temps  $L_4$  et décrit un cycle de longueur  $L_2$ .

En résumé dans le premier cas de figure, l'équation neuronale  $z$  décrit un transitoire de longueur  $L_4$  et un cycle de longueur  $L_2$ .

### **deuxième cas de figure :**

La figure 1.3 illustre la trajectoire de l'équation neuronale récurrente  $y$ , alors que la figure 1.6 illustre la trajectoire l'équation neuronale récurrente  $z$ .

### **Phase 3.**

Cette phase commence au temps  $h + L_1$  et s'achève au temps  $-1 + L_1 + L_6$ .

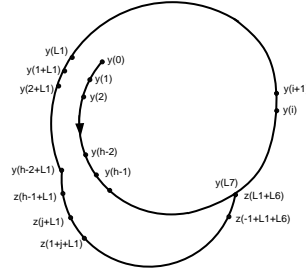


FIG. 1.6 – Comportement de la suite  $z$

## Phase 4.

Cette phase commence au temps  $L_1 + L_6$  et décrit un cycle de longueur  $L_1 + L_6 - L_7$ .

En résumé dans le second cas de figure, l'équation neuronale  $z$  décrit un transitoire de longueur  $-h + 1 + L_7$  et un cycle de longueur  $L_1 + L_6 - L_7$ .

Dans le second cas de figure, on peut aussi

parler de deux phases. La première qui commence au temps 0 et s'achève au temps  $-1 + L_7$ . La seconde qui commence au temps  $L_7$  et s'achève au temps  $L_1 + L_6$ .

**Illustration** : (*1er cas de figure*)

Soit l'équation neuronale récurrente  $\{v(n) : n \geq 0\}$  dont les  $k$  premiers termes sont définis ainsi :

$$\begin{aligned}
 v(0), v(1), \dots, v(k-1) &= \underbrace{1\ 0}_2 \underbrace{1\ 0\ 0 \dots 0}_{3m-1} \underbrace{1\ 0\ 0 \dots 0}_{3m-1} \\
 &\quad (1.24) \\
 &= \overline{x^1(0)} x^1(1) \cdots x^1(k-1)
 \end{aligned}$$

et dont les autres termes sont générés  
par :

$$v(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{j=1}^k \bar{a}_j v(n-j) - \bar{\theta} \right), \quad n \geq k \quad (1.25)$$

Le Lemme 4 caractérise la dynamique  
de l'équation neuronale récurrente  $\{v(n) : n \geq 0\}$ .

**Lemme 4** Dans l'évolution de la suite  $\{v(n) : n \geq 0\}$ , nous avons :

$$(a) \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad t \geq k \quad v(t) = 0.$$

$$(b) \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad t \geq k \quad \sum_{j=1}^k \bar{a}_j v(t-j) \leq \frac{\bar{\theta}}{2} + m.$$



$$(c) \forall t \in \mathbb{N}^*, \quad v(t) \leq x^1(t).$$



L'instabilité de la suite  $\{x^1(n) : n \geq 0\}$  apparaît comme le résultat de la convergence de la suite  $\{v(n) : n \geq 0\}$  vers la suite  $00 \dots 00$ .

### **Notation 1 .**

- $s = \rho(m)$ .
- $\alpha_i = 3m - p_i, \quad 0 \leq i \leq s - 1$ .
- $\alpha_s = 1$ .
- $h = (s + 1)k$  est la taille mémoire d'une équation neuronale récurrente.

- $L_1 = (s+1) \times \text{ppcm}(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}, 3m-1)$  et  $L_2 = (s+1) \times \text{ppcm}(p_0, p_1, \dots, p_{s-1})$  représentent les périodes des équations neuronales récurrentes.

Soit  $\{y(n) : n \geq 0\}$  la suite dont les  $h$  premiers termes sont définis ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq k-1 \quad y((s+1)j+i) = x^{\alpha_i}(1+j), \quad 0 \leq i < h \quad (1.26)$$

et dont les autres termes sont générés par l'équation neuronale récurrente :

$$y(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{f=1}^h b_f y(n-f) - \theta_3 \right) \quad (1.27)$$

où

$$b_f = \begin{cases} \bar{a}_j, & \text{si } f = (s+1)j, \quad 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\theta_3 = \bar{\theta}. \quad (1.29)$$

En réalité, la suite  $y$  est obtenue en appliquant le Lemme du mélange Parfait aux suites  $\{x^{\alpha_i}(n) : n \geq 0\}$  dont les  $k$  premiers termes sont :

$$\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{2\alpha_i} \quad \underbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{p_i} \quad \underbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{p_i} \quad (1.30)$$

Notons par  $\{w(n) : n \geq 0\}$  la suite dont les  $h$  premiers termes sont définis par :

$$\forall j, 0 \leq j \leq k - 1$$

$$w((s + 1)j + i) = \begin{cases} x^{\alpha_i}(3m + 2 + j), & 0 \leq i \leq s - 1 \\ 0, & i = s. \end{cases}$$

Les  $h$  premiers termes de la suite  $\{w(n) : n \geq 0\}$  sont obtenus par le mélange parfait des  $k$  termes de chacune des sous-suites :

$$\underbrace{x^{\alpha_i}(3m + 2) \ x^{\alpha_i}(3m + 3) \ x^{\alpha_i}(3m + 4) \ \dots \ x^{\alpha_i}(9m + 1)}_{6m} \quad 0 \quad (1.31)$$

$$\underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0}_{6m} \quad (1.32)$$

et dont les autres termes de la suite  $\{w(n) :$

$n \geq 0$  sont générés par l'équation neuro-nale récurrente suivante :

$$w(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{f=1}^h b_f w(n-f) - \theta_3 \right). \quad (1.33)$$

Par application du Lemme du mélange parfait, on démontre aisément les résultats suivants :

**Lemme 5** La suite  $\{y(n) : n \geq 0\}$  décrit un cycle de longueur  $L_1$ .



**Lemme 6** La suite  $\{w(n) : n \geq 0\}$  décrit un cycle de longueur  $L_2$ .



En appliquant la méthode de construction des transitoires à l'équation neuronale  $y$  précédente, nous obtenons :

$$A = B \cup C, \quad \text{où}$$

$$B = \cup_{i=1}^s \{ i, (p_{s-i} \cdot (s+1)) + i, (2p_{s-i} \cdot (s+1)) + i \} \quad \text{et}$$

$$C = \{(3m-1)(s+1), (6m-2)(s+1)\}.$$

l'équation neuronale récurrente suivante :

$$z(n) = \mathbf{1} \left( \sum_{f=1}^h c_f z(n-f) - \theta_4 \right), \quad (1.34)$$

et dont les  $h$  premiers termes sont initialisés ainsi :

$$z(f) = y(f) \quad 0 \leq f \leq h - 1, \quad (1.35)$$

qui exploite l'instabilité de la suite  $\{x^1(n) : n \geq 0\}$  afin de générer un transitoire de longueur exponentielle.

Nous définissons les paramètres  $c_f$  et  $\theta_4$  ainsi :

$$c_f = \begin{cases} b_f & 1 \leq f \leq h \text{ et } f \notin A, \\ b_f + \beta & 1 \leq f \leq h \text{ et } f \in A \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\theta_4 = \theta_3 + \mu + \xi, \quad (1.37)$$

où

$$\lambda \in [-1, 0[ , \quad \beta = \frac{\lambda}{3s + 2} , \quad \mu = \lambda - \frac{\beta}{8}$$

(1.38)

La dynamique de l'équation neuronale  $z$  se décompose en quatre phases :

**Phase 1.** La suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  est construite de telle manière que sa dynamique vérifie la relation suivante :

$$z(t) = y(t) \quad 0 \leq t \leq h - 2 + L_1$$

**Phase 1 :**

La phase 1 commence au temps 0 et s'achève au temps  $h - 2 + L_1$ .



**Lemme 7** Dans l'évolution de l'équation neuronale récurrente  $\{z(n) : n \geq 0\}$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq t \leq h - 2 + L_1$ , nous avons :

$$z(t) = y(t).$$



## **Phase 2 :**

Cette phase se déroule au temps  $-1 + h + L_1$ . Elle est caractérisée par le fait qu'à cet instant, l'état de la suite  $y$  est différent de l'état de la suite  $z$ .

**Lemme 8**  $z(h - 1 + L_1) = 0$  alors  
 que  $y(h - 1 + L_1) = 1$ .

■

Soit la suite  $\{tim(i, l, q) : l, q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq i \leq s\}$  définie ainsi :

$$tim(i, l, q) = l(s+1) + i + q : l, q \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq i \leq s.$$

$$\text{Notons } L_3 = (9m + 1)(s + 1) + L_1$$

$$L_4 = L_3 - h$$

**Remarque 1** *A l'issue de la Phase 2, les termes de la suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  vérifient les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
& z(\text{tim}(i, 0, L_1))z(\text{tim}(i, 1, L_1)) \dots z(\text{tim}(i, k-1, L_1)) = \\
& x^{\alpha_i}(1) \dots x^{\alpha_i}(6m) \quad 0 \leq i \leq s-1, \\
& \hspace{20em} (1.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z(\text{tim}(s, 0, L_1))z(\text{tim}(s, 1, L_1)) \dots z(\text{tim}(s, k-1, L_1)) = \\
& \quad \underbrace{0 \ 100 \dots 00}_{3m-1} \underbrace{100 \dots 00}_{3m-1} 0 \\
& \quad = v(1) \dots v(6m). \quad (1.40)
\end{aligned}$$

### Phase 3.

Cette phase commence au temps  $h + L_1$  et s'achève au temps  $-1 + (9m + 1)(s + 1) + L_1$ . Elle est caractérisée par le Lemme suivant :

**Lemme 9** Dans l'évolution de l'équation neuronale récurrente  $\{z(n) : n \geq 0\}$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq t < (3m + 1)(s + 1)$  nous avons :

$$z(t+h+L_1) = \begin{cases} y(t+h+L_1), & \text{si } t \not\equiv s \pmod{s+1} \\ v(1+k+q), & \text{si } t = q(s+1) + s, 0 \leq q < 3m+1 \end{cases}$$

■

#### **Phase 4.**

Cette phase commence au temps  $L_4$  et décrit un cycle de longueur  $L_2$ .

#### **Lemme 10**

$$z(t + L_4) = w(t) \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$



Des Lemmes 7 , 8, 9 et 10, nous déduisons le résultat suivant :

**Corollaire 1** La suite  $\{z(n) : n \geq 0\}$  décrit un transitoire de longueur  $L_4$  et un cycle de longueur  $L_2$ .



En utilisant les approximations de Rosser et Schoenfeld, nous établissons le résultat

**Théorème 1** Il existe une équation neuronale récurrente de taille mémoire  $h$  qui décrit un transitoire de longueur  $\Omega(e^{\sqrt{h \ln h}})$

et un cycle de longueur  $\Omega(e^{\sqrt{hlnh}})$ .



### 1.3 Conclusion

L'étude a porté sur l'équation neuronale récurrente à mémoire de Caianiello et De Luca.

Nous avons proposé une méthode de construction des transitoires des équations neuronales récurrentes à partir des cycles des équations neuronales récurrentes. Cette méthode nous a permis d'apporter une réponse positive à l'existence d'une équation neuronale de Caianiello et De Luca qui décrit un transitoire de longueur exponentielle par

rapport à la taille de la mémoire [15].

Ces résultats ont été obtenus grâce à des constructions structurelles. Les constructions structurelles sont des outils généraux et puissants qui sont utilisés dans l'étude des équations neuronales récurrentes [4, 7, 18, 19, 11].



## Bibliographie

- [1] E.R. Caianiello and A. De Luca, “Decision Equation for Binary Systems : Applications to Neuronal Behavior,” *Kybernetic*, **3**(1966) 33-40.
  
- [2] E. R. Caianiello, “Decision Equations and Reverberations,” *Kybernetik*,**3(2)**, 1966.
  
- [3] M. Cosnard, “Dynamic Properties of An Automaton with Memory,” in *Cel-*

*lular Automata : A Parallel Model*,  
edited by M. Delorme and J. Mazoyer  
(Kluwer Academic Publishers, 1999).

- [4] M. Cosnard, M. Tchuente and G. Tindo, “Sequences Generated by Neuronal Automata with Memory,” *Complex Systems*, **6**, 1992, p 13-20.
- [5] M. Cosnard, D. Moumida, E. Goles and T.de.St. Pierre, “Dynamical Behavior of a Neural Automaton with Memory,” *Complex Systems*, **2**, (1988), 161-176.
- [6] F. Fogelman Soulie et al., “Automata Networks and Artificial Intelligence”, in *Automata Networks in Computers*

*Science : Theory and Applications*,  
edited by F. Fogelman, Y. Robert, and  
M. Tchuente (Manchester University  
Press, Manchester, 1987).

[7] E. Goles, “Comportement oscillatoire  
d’une famille d’automates cellulaires  
non uniformes”, *Doctoral Disserta-  
tion, University of Grenoble*, 1980.

[8] E. Goles and S. Martínez, “Exponential  
Transient Classes of Symmetric Neu-  
ral Networks for Synchronous and Se-  
quential Updating”, *Complex Systems*  
**3(1989)** 589-597.

[9] E. Goles and M. Matamala, “Sym-

metric discrete universal neural networks”, *Theoretical Computer Science*, **168**(1996) pages 405-416.

[10] S. Haykin , “Neural Networks : A Comprehensive Foundations” (Upper Saddle River, New Jersey : Prentice-Hall, 1999)

[11] M. Matamala, “Recursive Construction of Periodic Steady State for Neural Networks”, *Theoretical Computer Science*, **143(2)** (1995) 251-267.

[12] D. Moumida, “Contribution à l’étude de la Dynamique d’un Automate à

Mémoire,” *Thèse de Doctorat, Université de Grenoble*, 1989.

[13] W. S. Mc Culloch and W. Pitts, “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5** (1943) 115-133.

[14] R. Ndoundam and M. Matamala, “Cyclic Evolution of Neuronal Automata with Memory when all the weighting coefficients are strictly positive”, *Complex Systems*, 12(2000), 379-390.

[15] R. Ndoundam and M. Tchuenta, “Exponential transient length generated by

a neuronal recurrence equation”, *Theoretical Computer Science*, **306** (2003) 513-533.

[16] R. Ndoundam and M. Tchunte, “Exponential Period of Neuronal Recurrence Automata with Excitatory Memory”, *Complex Systems*, **15(2004)**, 79-88.

[17] J.B. Rosser and L. Schoenfeld, “Approximate Formulas for some Functions of Prime Numbers,” *Illinois Journal of Mathematics*, **6** (1962), p. 64-94.

[18] M. Tchunte “Sequential Simu-

lation of Parallel Iterations and Applications”, *Theoretical Computer Science*, **vol. 48**, 1986, p. 135-144.

- [19] M. Tchuenté, G. Tindo, “Suites générées par une équation neuronale à mémoire,” *CRAS t.317* Série I, p. 625-630, 1993.

.

**Merci de votre attention**