Décomposition modulaire et quelques généralisations

Vincent Limouzy

LIAFA – Université Paris Diderot
Équipe Algorithmique et Combinatoire
Équipe-Projet GANG INRIA

23 Janvier 2008

Travail effectué en collaboration avec :

- Binh-Minh Bui-Xuan – LIRMM – Montpellier.
- Michel Habib – LIAFA – Université Paris Diderot.
- Fabien de Mongtolfier – LIAFA – Université Paris Diderot.

Motivations

Intérêts de la décomposition modulaire

- Sciences sociales (Rôles, groupes).
- Bio-informatique.
- ...

- Résoudre des problèmes difficiles en décomposant en graphes de taille moindre.
- Propriétés strucuturelles des graphes.

Graphes et décompositions

Module

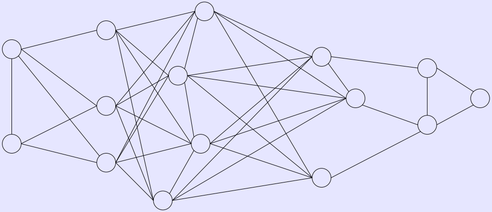
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un module M du graphe est un sous ensemble des sommets de V tel que les sommets à l'extérieur de M voient tous les sommets M de la même manière.

Graphes et décompositions

Module

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un module M du graphe est un sous ensemble des sommets de V tel que les sommets à l'extérieur de M voient tous les sommets M de la même manière.

Un exemple :

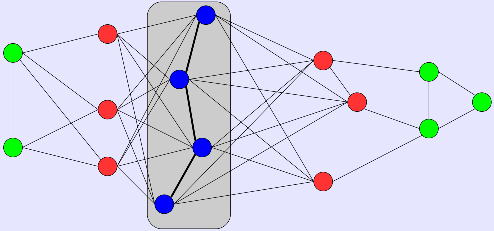


Graphes et décompositions

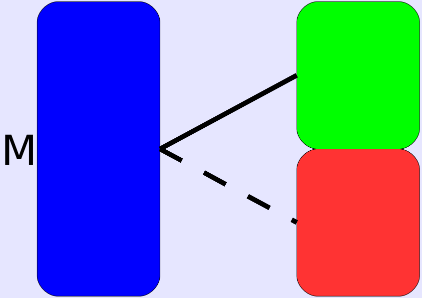
Module

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Un module M du graphe est un sous ensemble des sommets de V tel que les sommets à l'extérieur de M voient tous les sommets M de la même manière.

Un exemple :



Vision schématique



Modules triviaux

Un module M de G est **trivial** si :

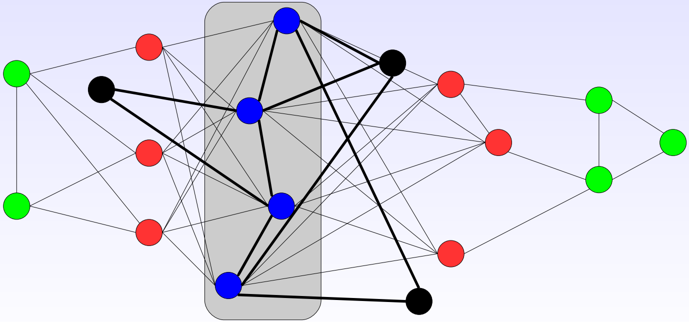
- $M = V$
- $M = \{v\}, \{v\} \in V$.

Casseur

$G = (V, E)$ un graphe X un sous ensemble de V. Un sommet v dans $V \setminus X$ est un **casseur** de X si il existe deux éléments x_1, x_2 de X tel que :
v est relié à x_1 mais n'est pas relié à x_2.

Casseur

$G = (V, E)$ un graphe X un sous ensemble de V. Un sommet v dans $V \setminus X$ est un **casseur** de X si il existe deux éléments x_1, x_2 de X tel que :
v est relié à x_1 mais n'est pas relié à x_2.



Casseur (suite)

Relation entre modules et casseurs

X est un module du graphe G ssi $V \setminus X$ ne contient pas de casseur.

Familles partitives

Chevauchement

A chevauche B noté **A** $\between$ **B** si : $A \setminus B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ et $B \setminus A \neq \emptyset$

Familles partitives

Chevauchement

A chevauche B noté **$A \between B$** si : $A \setminus B \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ et $B \setminus A \neq \emptyset$

Famille partitive (Chein, Habib et Maurer 81)

Soit V un ensemble fini. Une famille $\mathscr{F} \subseteq 2^V$ de parties de V est **partitive** si

1. $V \in \mathscr{F}$, $\emptyset \notin \mathscr{F}$ et $\{v\} \in \mathscr{F}$.
2. Pout tout $A, B \subseteq V$ et $A \between B$
   - $A \cup B \in \mathscr{F}$
   - $A \cap B \in \mathscr{F}$
   - $A \setminus B \in \mathscr{F}$ et $B \setminus A \in \mathscr{F}$
   - $A \Delta B \in \mathscr{F}$

Module dans les graphes :

Les modules dans les graphes forment un familles partitives.

Codage des familles partitives (Chein, Habib et Maurer 81)

Les familles partitives peuvent être représentées sous la forme d'un **arbre unique**. Avec pour feuilles les éléments de l'ensemble support. Et admet deux types de noeuds internes.

1. Noeuds premiers.
2. Noeuds complets (ou dégénérés ou encore fragiles).

Module dans les graphes :

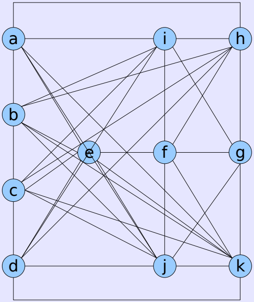
Noeuds complets dans les graphes

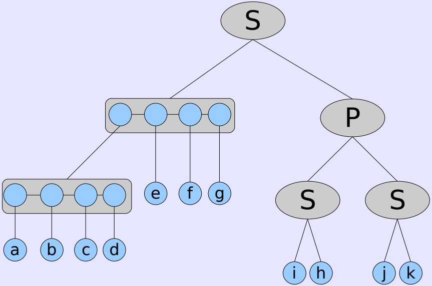
Il y a deux types de noeuds complets dans les graphes :

1. Noeuds séries (i.e. une clique).
2. Noeuds parallèles (i.e. un stable).

Arbre de décomposition

Exemple





Relations Homogènes

Définition

Relation Homogène

Soit X un ensemble fini. Une relation homogène H est définie pour tout a, b, c de X par $H(a|bc)$
On dit que a est homogène vis à vis de b et c
Ou que a ne distingue pas b de c.

Définition

Relation Homogène

Soit X un ensemble fini. Une relation homogène H est définie pour tout a, b, c de X par $H(a|bc)$
On dit que a est homogène vis à vis de b et c
Ou que a ne distingue pas b de c.

Propriétés

- Réflexive $H(x|aa)$.
- Symétrique $H(x|ab) = H(x|ba)$
- Transitive $H(x|ab) \wedge H(x|bc) \Rightarrow H(x|ac)$.

Représentation

En conséquences des propriétés précédentes : Il est possible de représenter en mémoire la relation homogène par une matrice de taille $O(n^2)$.

Représentation

En conséquences des propriétés précédentes : Il est possible de représenter en mémoire la relation homogène par une matrice de taille $O(n^2)$.

Exemple

a	b c	d
b	a | c	d
c	a b d	
d	c	a b

Modules relations homogènes

Soit X un ensemble fini, H une relation homogène sur X
$M \subseteq X$ est un module de la relation homogène H. ssi :

$$\forall x \in X \setminus M \text{ et } \forall a, b \in M \text{ on a } H(x|ab)$$

Relation standard des graphes

La relation homogène des graphes, dans le sens usuel, est obtenue en considérant le voisinage et le non-voisinage de chaque sommet.

Modules des relations homogènes quelconques

Propriétés

X un ensemble fini, et H une relation homogène. Pour tous modules A, B de H avec $A \mathbin{\bigcirc\!\!\!\!\bigcirc} B$. alors

- $A \cup B$ est un module de H.
- $A \cap B$ est un module de H

Modules des relations homogènes quelconques

Propriétés

X un ensemble fini, et H une relation homogène. Pour tous modules A, B de H avec $A \between B$. alors

- $A \cup B$ est un module de H.
- $A \cap B$ est un module de H

Famille des Modules

La famille des modules de H est une famille intersectante.

Modules des relations homogènes quelconques

Propriétés

X un ensemble fini, et H une relation homogène. Pour tous modules A, B de H avec $A \oplus B$. alors

- $A \cup B$ est un module de H.
- $A \cap B$ est un module de H

Famille des Modules

La famille des modules de H est une famille intersectante.

Corollary (Gabow'95)

On peut stocker la famille des modules de la relation H en espace $O(n^2)$.

Nouvelle relations sur les graphes

On peut définir, sur les graphes, d'autres relations homogènes que l'adjacence. Par exemple :

- Star-cutset.
- Distance-k.
- ...

Les relations homogènes permettent de s'abstraire complètement des graphes et de la notion d'adjacence pour ne retenir que la notion de distinction.

Umodules : un nouveau concept

Umodules : Définition

Soit X un ensemble fini, H une relation homogène sur X. $U \subset X$ est un umodule si :

$$\forall u, v \in U \text{ et } \forall a, b \in X \setminus U \text{ on a } H(u|ab) \Longleftrightarrow H(v|ab)$$

Umodules : Définition

Soit X un ensemble fini, H une relation homogène sur X. $U \subset X$ est un umodule si :

$$\forall u, v \in U \text{ et } \forall a, b \in X \setminus U \text{ on a } H(u|ab) \iff H(v|ab)$$

Intuitivement...

Chaque élément de l'umodule perçoit le monde extérieur de la même manière...

Pourquoi les umodules ?

Plan

- Généralisent la décomposition modulaire dans les graphes.
- Exactement les bi-joints dans les graphes.
- Décomposition différente dans les relations homogènes.
- Une nouvelle décomposition des tournois.

Fermé par union

La famille des umodules d'une relation homogène quelconque est fermé par union d'umodules se chevauchant.
Mauvaise nouvelle aucun espoir d'être codé de manière compacte.

Dans le cas général

On sait :

- Calculer un umodule maximal dans P en $O(|X|^3)$.
- Tester la primalité en $O(|X|^5)$.

Congruence locale

La congruence locale d'une relation homogène, est le nombre maximal de classes que peut avoir un élément.

Le cas $= 2$

Les relations homogènes de congruence locale 2 forment une famille "crossing"

Crossing

Une famille $\mathscr{F}$ d'ensemble sur X est dite crossing si :

$\forall A, B \in \mathscr{F}$ tel que $A \between B$ et $A \cup B \neq \emptyset$ (noté $A \,\dot{\between}\, B$) on a :

- $A \cup B \in \mathscr{F}$.
- $A \cap B \in \mathscr{F}$.

Crossing

Une famille $\mathscr{F}$ d'ensemble sur X est dite crossing si :

$\forall A, B \in \mathscr{F}$ tel que $A \between B$ et $A \cup B \neq \emptyset$ (noté $A \dot{\between} B$) on a :

- $A \cup B \in \mathscr{F}$.
- $A \cap B \in \mathscr{F}$.

Théorème : Codage compact Gabow 95

On peut stocker dans un arbre de taille $O(n^2)$ la famille des umodules d'une relation homogène de congruence locale 2.

Congruence locale 2 et auto complémentation

Autocomplémentation

On dit qu'une relation homogène H est auto complémentée ssi pour tout umodule U de H, $X \setminus U$ est un umodule

Congruence locale 2 et auto complémentation

Autocomplémentation

On dit qu'une relation homogène H est auto complémentée ssi pour tout umodule U de H, $X \setminus U$ est un umodule

La condition des 4 points

$\forall m, m', x, x' \in X$

- $H(m|xx') \wedge H(m'|xx') \wedge H(x|mm') \Rightarrow H(x'|mm')$.
- $\neg H(m|xx') \wedge \neg H(m'|xx') \wedge \neg H(x|mm') \Rightarrow \neg H(x'|mm')$.

Congruence locale 2 et auto complémentation

Propriété

Les relations homogènes des graphes et des tournois satisfont la propriétés des 4 points.
La propriété des 4 points implique que la relation homogène est auto-complémentée.

Théorème

Si la famille est auto-complémentée et de congruence locale 2, un arbre unique codant la famille des umodules peut être calculé en temps $O(X^2)$.

Seidel switch

Définition

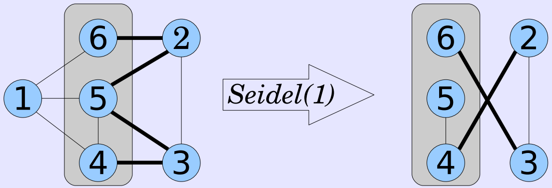
Soit H une relation homogène.
Le Seidel switch sur un élément x de X

- $H(s)^1_x = (H^x_1 \Delta H^s_j) \setminus \{s\}$
- $H(s)^2_x = (H^x_2 \Delta H^s_j) \setminus \{s\}$

Avec j tel que $x \notin H^j_s$.

Seidel switch

En action sur les graphes.



Theorem

Soit H une relation homogène sur X de congruence locale 2. Et la famille des umodules sur H est auto-complémentée.
Soit x un élément de X et U un sous-ensemble de X avec $x \in U$. Alors U est un umodule de H ssi $M = X \setminus U$ est un module de la relation homogène de $H(x)$ obtenu en faisant un Seidel switch en x.

Dans les graphes...

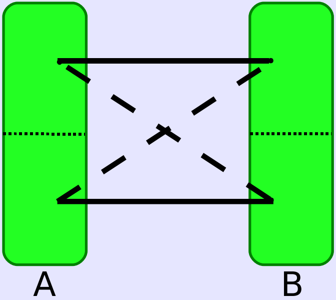
Décomposition en bi-joints (Mongtolfier-Rao 2005)

La décomposition umodulaire correspond aux bi-joints.

Dans les graphes...

Décomposition en bi-joints (Mongtolfier-Rao 2005)

La décomposition umodulaire correspond aux bi-joints.



Arbre de décomposition

Famille bipartitive (Cunningham-Edmonds 80)

Soit X un ensemble fini. Et $\mathscr{B} = \{\{P_1^1, P_1^2\}, \{P_2^1, P_2^2\}, \ldots, \{P_m^1, P_m^2\}\}$ un ensemble de bipartitions de X. La famille est dite bipartitive si :

- $\forall x \in X, \{\{x\}, X \setminus \{x\}\} \in \mathscr{B}$.
- $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant m$ et $\forall (k, l) \in \{0, 1\}^2$.
  - $P_i^k \cup P_j^l \ \in \mathscr{F}$
  - $P_i^k \cap P_j^l \ \in \mathscr{F}$

Bipartitions fortes

$\forall j \neq i$ on a .

- $P_i^1 \oplus P_j^1$ et $P_i^1 \oplus P_j^2$.
- $P_i^2 \oplus P_j^1$ et $P_i^2 \oplus P_j^1$.

Famille bipartitive (Cunningham-Edmonds 80)

Arbre de décomposition

Il existe un arbre non enraciné **unique** pour coder les bipartitions fortes.
Chaque arête de l'arbre code une bipartition forte.

Famille bipartitive

La famille des bi-joints dans les graphes est une famille bipartitive.
Conséquences : Les bi-joints forts du graphe peuvent être stockée dans un arbre.

Famille bipartitive

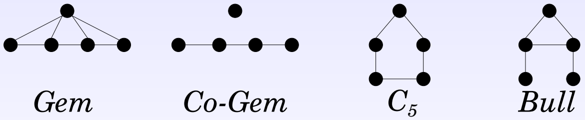
La famille des bi-joints dans les graphes est une famille bipartitive.
Conséquences : Les bi-joints forts du graphe peuvent être stockée dans un arbre.

Types de noeuds

1. Noeuds premiers.
2. Noeuds Complets
   - Bipartis Complets.
   - Cliques.

Les graphes totalement décomposables

Les graphes totalement décomposables par la décomposition en bi-joints sont les graphes sans (C_5, Bull,Gem, co-Gem) comme sous graphe induits.



Les graphes totalement décomposables

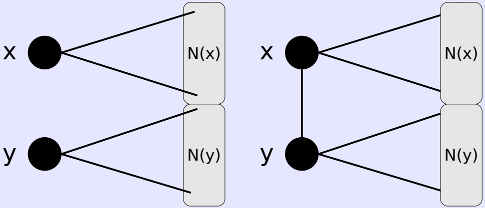
Schéma de construction

Les graphes totalement décomposable peuvent être construits à partir d'un seul sommet par une séquence d'ajouts

- d'un vrai anti-jumeaux.
- d'un faux anti-jumeaux.

Les graphes totalement décomposables

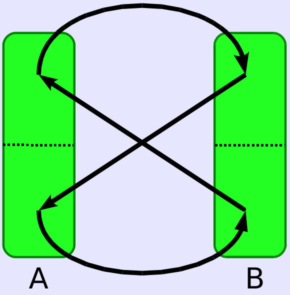
Anti-Jumeaux



Faux Anti-Jumeaux Vrais Anti-Jumeaux

Tournois

Les umodules dans les tournois sont une nouvelle façon de décomposer les tournois.



Tournois totalement décomposables

Tournois et décomposition modulaire

Les tournois totalement décomposable pour la décomposition modulaire sont les tournois transitifs (i.e. sans cycle de taille 3).

Tournois totalement décomposables

Tournois et décomposition modulaire

Les tournois totalement décomposable pour la décomposition modulaire sont les tournois transitifs (i.e. sans cycle de taille 3).

Tournois et décomposition umodulaires

A l'aide du Seidel switch et de la propriété précédente on obtient :
Pour tout x de T :

- $T[N^+(x)]$ et
- $T[N^-(x)]$

Sont des tournois transitifs.

Tournois totalement décomposables

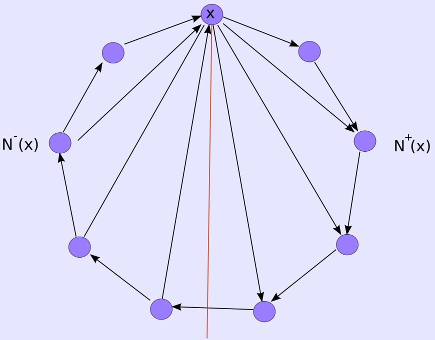
Propriété

Il existe un ordre circulaire des sommets de T tel que les sommets de $N^+(x)$ et $N^-(x)$ apparaissent consécutivement.

Tournois totalement décomposables

Propriété

Il existe un ordre circulaire des sommets de T tel que les sommets de $N^+(x)$ et $N^-(x)$ apparaissent consécutivement.



Tournois totalement décomposables

Sous graphes interdits

Les tournois totalement décomposables pour la décomposition umodulaire sont les tournois qui ne contiennent pas :

- Un 3-cycle dominé.
- Un 3-cycle anti-dominé.

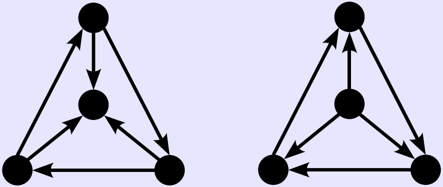
Tournois totalement décomposables

Sous graphes interdits

Les tournois totalement décomposables pour la décomposition umodulaire sont les tournois qui ne contiennent pas :

- Un 3-cycle dominé.
- Un 3-cycle anti-dominé.

Diamants



Tournois totalement décomposables

Reconnaissance

On peut reconnaître les tournois totalement décomposable en temps linéaire : $O(n^2)$. De plus l'algorithme est certifiant i.e. si le tournois n'est pas totalement décomposable il exhibe une des deux obstructions. Sinon il construit l'ordre décrit précédemment.

Tournois totalement décomposables

Reconnaissance

On peut reconnaître les tournois totalement décomposable en temps linéaire : $O(n^2)$. De plus l'algorithme est certifiant i.e. si le tournois n'est pas totalement décomposable il exhibe une des deux obstructions. Sinon il construit l'ordre décrit précédemment.

Isomorphisme

Il est également possible de tester en $O(n^2)$ si deux tournois totalement décomposables sont isomorphes. Alors que le problème de l'isomorphisme de tournois en général reste ouvert.

Feedback Vertex Set

Données : $T = (V, A)$ Un tournoi
Résultat : Le plus petit (en terme de cardinalité) $X \subset V$ tel que $T[V \setminus X]$ soit sans circuit.
NP-Complet dans les tournois en général.

Feedback Vertex Set

Données : $T = (V, A)$ Un tournoi
Résultat : Le plus petit (en terme de cardinalité) $X \subset V$ tel que $T[V \setminus X]$ soit sans circuit.
NP-Complet dans les tournois en général.

Polynomial pour les tournois sans diamant

Il existe un algorithme polynomial en $O(n^2)$.
Il consiste à trouver le sommet x de plus fort degré sortant. Il faut ensuite supprimer les sommets de $N^-(x)$.

Perspectives

- Le cas auto-complètementé d'arité k.
- Étendre la décomposition tout en conservant les propriétés d'unicité.
- Décomposition en coupes.
- Décomposition en 2-Joints.
- 2-Modules et bi-modules.