

Algorithmes holographiques

Yann Strozecki Sous la direction d'Arnaud Durand

Equipe de Logique Mathématique, Paris 7

21 octobre 2007

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe $\#P$. On étudie certains problèmes à la frontière des classes FP et $\#P$ grâce à une nouvelle technique de réduction.

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe $\#P$. On étudie certains problèmes à la frontière des classes FP et $\#P$ grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de $\#P$ est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe $\#P$. On étudie certains problèmes à la frontière des classes FP et $\#P$ grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de $\#P$ est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti
- Pourtant décider si un graphe biparti admet un couplage parfait est dans P

On va s'intéresser à la complexité de comptage en particulier la classe $\#P$. On étudie certains problèmes à la frontière des classes FP et $\#P$ grâce à une nouvelle technique de réduction.

- Le problème caractéristique complet de $\#P$ est le comptage des couplages parfaits dans un graphe biparti
- Pourtant décider si un graphe biparti admet un couplage parfait est dans P
- Grâce aux algorithmes holographiques de Valiant on peut montrer que PI-Rtw-Mon-3CNF est facile à calculer modulo 7 mais pas modulo 2.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

Définition (PerfMatch)

Soient G un graphe pondéré par $w_{i,j}$ poids de l'arête (i,j) et \mathcal{C} l'ensemble de ses couplages parfaits.

$$\text{PerfMatch}(G) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{C}} w_{i,j}$$

Ce polynôme généralise le comptage des couplages parfaits, chaque couplage contribuant pour un poids dépendant de ses arêtes.

Définition (MatchSum)

Soit G un graphe doublement pondéré, c'est à dire avec aussi des poids λ_i sur les sommets. Si A est un ensemble de sommet de G , $G[A]$ est le graphe induit par l'oubli des sommets de A . Le MatchSum est le polynôme en les λ_i suivant :

$$\text{MatchSum}(G) = \sum_A \left(\prod_{i \in A} \lambda_i \right) \text{PerfMatch}(G[A])$$

Ce polynôme généralise le comptage de tous les couplages d'un graphe.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - Pl-X-Matching
 - Pl-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

Théorème

Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes $\#P$ -complet.

Théorème

Le PerfMatch et le MatchSum avec des poids entiers positifs sur les arêtes sont des problèmes $\#P$ -complet.

Théorème

Les problèmes de calculer le PerfMatch et le MatchSum sur un corps \mathbb{K} sont dans $\mathbb{K} - \#P$.

Théorème

Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.

Théorème

Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP.

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

Théorème

Le problème de calculer le nombre de couplages parfaits dans un graphe planaire est dans FP .

Ce très beau résultat de Kasteleyn va être une clé de la méthode que je présente.

On peut aussi remarquer que calculer le PerfMatch modulo 2 revient à calculer un déterminant ce qui en fait un problème de FP .

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur le corps \mathbb{K} , noté $E_1 \otimes E_2$, est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme (x_1, x_2) avec $x_i \in E_i$, aussi notés $x_1 \otimes x_2$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur le corps \mathbb{K} , noté $E_1 \otimes E_2$, est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme (x_1, x_2) avec $x_i \in E_i$, aussi notés $x_1 \otimes x_2$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\textcircled{1} \quad x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur le corps \mathbb{K} , noté $E_1 \otimes E_2$, est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme (x_1, x_2) avec $x_i \in E_i$, aussi notés $x_1 \otimes x_2$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

$$\textcircled{1} \quad x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$$

$$\textcircled{2} \quad x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur le corps \mathbb{K} , noté $E_1 \otimes E_2$, est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme (x_1, x_2) avec $x_i \in E_i$, aussi notés $x_1 \otimes x_2$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

- 1 $x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$
- 2 $x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$
- 3 $a(x_1 \otimes x_2) = ax_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes ax_2$

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur le corps \mathbb{K} , noté $E_1 \otimes E_2$, est l'espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de la forme (x_1, x_2) avec $x_i \in E_i$, aussi notés $x_1 \otimes x_2$. Ils vérifient les propriétés suivantes :

- 1 $x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x'_2 = x_1 \otimes (x_2 + x'_2)$
- 2 $x_1 \otimes x_2 + x'_1 \otimes x_2 = (x_1 + x'_1) \otimes x_2$
- 3 $a(x_1 \otimes x_2) = ax_1 \otimes x_2 = x_1 \otimes ax_2$

Remarque

Si (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_m) sont respectivement des bases des espaces vectoriels A et B alors l'ensemble des $a_i \otimes b_j$, $(i, j) \in [1, \dots, n] \times [1, \dots, m]$ est une base de $A \otimes B$.

Supposons que les espaces vectoriels, sont de la forme $\mathcal{M}_{n,k}$. On a alors un isomorphisme naturel de $\mathcal{M}_{n,k} \otimes \mathcal{M}_{n',k'}$ vers $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$.

Supposons que les espaces vectoriels, sont de la forme $\mathcal{M}_{n,k}$. On a alors un isomorphisme naturel de $\mathcal{M}_{n,k} \otimes \mathcal{M}_{n',k'}$ vers $\mathcal{M}_{n.n',k.k'}$.

Lemme

Soient deux vecteurs $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ et $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ avec pour tout i des vecteurs u_i et v_i de même dimension. Alors

$$\langle u, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq k} \langle u_i, v_i \rangle.$$

Définition (Porte de couplage)

Une porte de couplage est un triplet (G, I, O) , où G est un graphe (V, E) et I, O sont des sous-ensembles disjoints de sommets de V représentant ses *entrées* et ses *sorties*.

On appelle *porte génératrice*, une porte qui n'a pas d'entrées, et *porte de reconnaissance* une porte qui n'a pas de sorties.

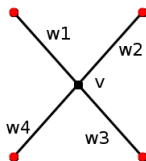


Fig.: Une porte de reconnaissance à 4 entrées

Soit f la bijection entre les nombres de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ et les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ définie par $x \in f(i)$ ssi le $x^{\text{ème}}$ bit de i en binaire est 1 .

Dans une porte de couplage, on suppose les entrées et sorties numérotées de 1 à n et 1 à p respectivement, qu'on met en bijection avec $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ et $\{0, \dots, 2^p - 1\}$ par f et f' grâce à la remarque précédente.

Soit f la bijection entre les nombres de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ et les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ définie par $x \in f(i)$ ssi le $x^{\text{ème}}$ bit de i en binaire est 1 .

Dans une porte de couplage, on suppose les entrées et sorties numérotées de 1 à n et 1 à p respectivement, qu'on met en bijection avec $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ et $\{0, \dots, 2^p - 1\}$ par f et f' grâce à la remarque précédente.

Définition (Matrice d'une porte de couplage)

Soit (G, I, O) une porte de couplage à n sorties et p entrées, on note $M = (m_{i,j})$ la matrice de couplage de cette porte. L'entrée $m_{i,j}$ de la matrice de couplage est le PerfMatch du sous-graphe induit par $V \setminus (f(i) \cup f'(j))$.

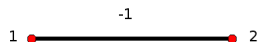


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est $u = (-1, 0, 0, 1)$.

Définition (Base)

Une *base* de taille n est un ensemble de vecteurs indépendants non nuls de dimension 2^n .

Les deux bases les plus fréquemment utilisées seront la base standard $\mathbf{b}_0 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ et la base $\mathbf{b}_1 = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ sur un corps \mathbb{K} quelconque qui contient alors toujours 0, 1 et -1 .

Soient \mathbf{b} une base et X l'ensemble des vecteurs obtenus par k produits tensoriels des vecteurs de la base $\mathbf{b} = \{n, p\}$,

$$X = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mid x_i \in \mathbf{b}, i \leq k\}.$$

- 1 On considère une porte génératrice A de signature standard u de taille 2^k , u s'écrit de manière unique comme une somme de vecteurs de X . On nomme $valG(A, x)$ pour $x \in X$ le coefficient devant x dans la décomposition de u par rapport à X .
- 2 On considère une porte de reconnaissance B de signature standard u de taille 2^k . On note $valR(B, x)$ pour $x \in X$ le produit scalaire de u et de x .

La signature d'une porte est un vecteur de taille 2^k contenant tous les $valG(A, x)$ (ou $valR(B, x)$) pour $x \in X$. On voit les $x \in X$ comme des mots de $\{n, p\}^k$ qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention $n < p$.

La signature d'une porte est un vecteur de taille 2^k contenant tous les $valG(A, x)$ (ou $valR(B, x)$) pour $x \in X$. On voit les $x \in X$ comme des mots de $\{n, p\}^k$ qu'on ordonne de manière lexicographique en posant par convention $n < p$.

Avec cet ordre la signature standard est égale à la signature dans la base standard, ce qui est satisfaisant, non ?

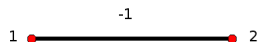


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est $u = (-1, 0, 0, 1)$.

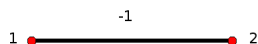


Fig.: Exemple de porte génératrice dont les deux sommets sont des sorties

La signature standard de la porte génératrice de la figure est $u = (-1, 0, 0, 1)$. Pour calculer la signature selon la base $\mathbf{b}_1 = \{n, p\}$ avec $n = (-1, 1)$ et $p = (1, 0)$, on doit calculer $\mathbf{b}_1^{\otimes 2}$:

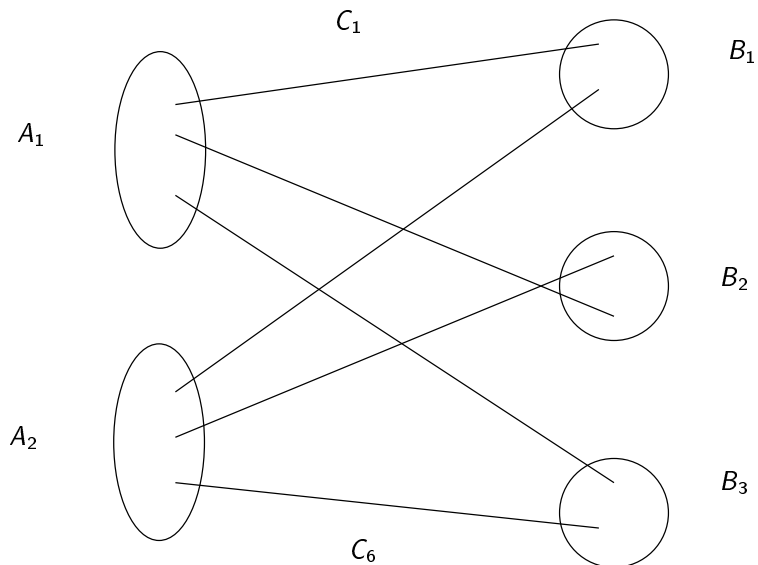
$$\begin{cases} n \otimes n = (1, -1, -1, 1) \\ n \otimes p = (-1, 0, 1, 0) \\ p \otimes n = (-1, 1, 0, 0) \\ p \otimes p = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Comme $u = n \otimes n + n \otimes p + p \otimes n$, la signature par rapport à \mathbf{b}_1 est $(1, 1, 1, 0)$.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices $\{A_1, \dots, A_g\}$, d'un ensemble de portes de reconnaissance $\{B_1, \dots, B_l\}$ et d'un ensemble d'arêtes $\{C_1, \dots, C_f\}$ qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.



Définition (Circuit de couplage)

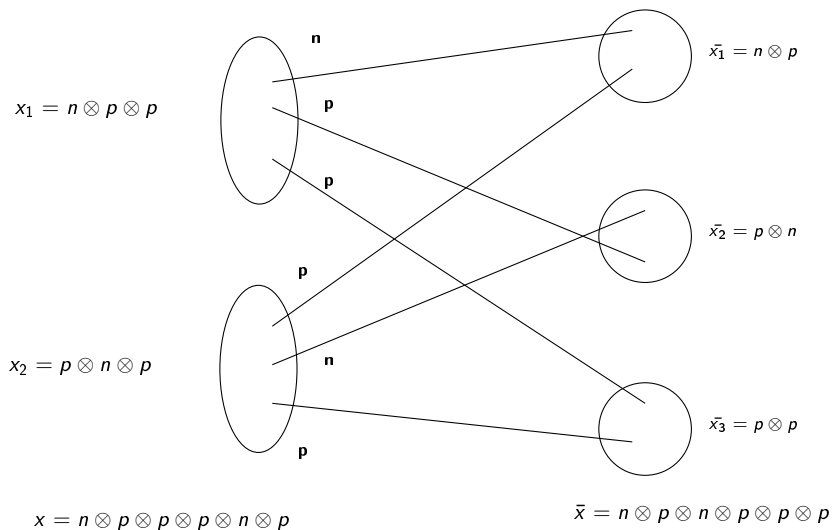
Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices $\{A_1, \dots, A_g\}$, d'un ensemble de portes de reconnaissance $\{B_1, \dots, B_l\}$ et d'un ensemble d'arêtes $\{C_1, \dots, C_f\}$ qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

Définition (Circuit de couplage)

Un circuit de couplage est constitué d'un ensemble de portes génératrices $\{A_1, \dots, A_g\}$, d'un ensemble de portes de reconnaissance $\{B_1, \dots, B_l\}$ et d'un ensemble d'arêtes $\{C_1, \dots, C_f\}$ qui joignent chacune exactement une sortie d'une porte génératrice et une entrée d'une porte de reconnaissance. Toutes les entrées et les sorties doivent être reliées, on a donc le même nombre d'entrées et de sorties.

Soit $\mathbf{b} = \{n, p\}$ une base, on pose $X = \mathbf{b}^{\otimes f}$.

Les arêtes entre les porte génératrices et les portes de reconnaissance réalise une bijection entre les f entrées et les f sorties. Cela induit une bijection de X vers X qui à x associe \bar{x} .



Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage $\Omega = (A, B, C)$ alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[\prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

Définition (Holant)

Soit un circuit de couplage $\Omega = (A, B, C)$ alors le Holant de ce circuit est :

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{x \in \mathbf{b}^{\otimes f}} \left[\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[\prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

Théorème

Pour tout circuit de couplage Ω correspondant à un graphe G , et toute base \mathbf{b} ,

$$\text{Holant}(\Omega) = \text{PerfMatch}(G).$$

Lemme

Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.

Lemme

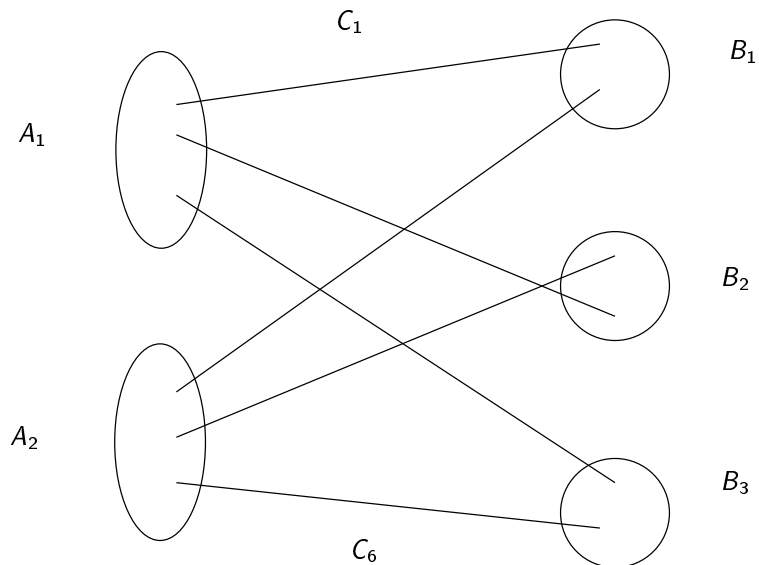
Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.

- Un élément $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_f$ de la base standard représente exactement un sous-ensemble des arêtes C_i .

Lemme

Le théorème du Holant est vrai pour la base standard.

- Un élément $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_f$ de la base standard représente exactement un sous-ensemble des arêtes C_i .
- $\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$ est exactement le nombre de couplages parfaits contenant les arêtes C_i sélectionnées par x .



- Si on a deux portes génératrices A_1 et A_2 de signatures respectives u_1 et u_2 , la signature de la porte de sortie $A_1 \cup A_2$ en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de A_1 soient avant celles de A_2 est $u_1 \otimes u_2$.

- Si on a deux portes génératrices A_1 et A_2 de signatures respectives u_1 et u_2 , la signature de la porte de sortie $A_1 \cup A_2$ en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de A_1 soient avant celles de A_2 est $u_1 \otimes u_2$.
- Donc $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ avec u_i signature standard de A_i .

- Si on a deux portes génératrices A_1 et A_2 de signatures respectives u_1 et u_2 , la signature de la porte de sortie $A_1 \cup A_2$ en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de A_1 soient avant celles de A_2 est $u_1 \otimes u_2$.
- Donc $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ avec u_i signature standard de A_i .
- Comme $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$, par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left(\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- Si on a deux portes génératrices A_1 et A_2 de signatures respectives u_1 et u_2 , la signature de la porte de sortie $A_1 \cup A_2$ en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de A_1 soient avant celles de A_2 est $u_1 \otimes u_2$.
- Donc $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ avec u_i signature standard de A_i .
- Comme $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$, par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left(\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- $\bar{x} = \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l$ et $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_l$. Par le Lemme 1 on a l'égalité $\langle \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l, v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \langle \bar{x}_i, v_i \rangle$.

- Si on a deux portes génératrices A_1 et A_2 de signatures respectives u_1 et u_2 , la signature de la porte de sortie $A_1 \cup A_2$ en ordonnant les sorties de manière à ce que celles de A_1 soient avant celles de A_2 est $u_1 \otimes u_2$.
- Donc $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ avec u_i signature standard de A_i .
- Comme $u_i = \sum_{x_i \in X_i} \text{val}G(A_i, x_i)x_i$, par linéarité du produit tensoriel

$$u = \sum_{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left(\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \right)$$

- $\bar{x} = \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l$ et $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_l$. Par le Lemme 1 on a l'égalité $\langle \bar{x}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{x}_l, v_1 \otimes \cdots \otimes v_l \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \langle \bar{x}_i, v_i \rangle$.
- Puis par définition de la signature d'une porte de reconnaissance $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 < i < l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$.

- On en était à $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$

- On en était à $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$
- Par linéarité du produit scalaire

$$\langle \bar{u}, v \rangle = \sum_{x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left[\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[\prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

- On en était à $\langle \bar{x}, v \rangle = \prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i)$
- Par linéarité du produit scalaire

$$\langle \bar{u}, v \rangle = \sum_{x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}^f} \left[\prod_{1 \leq j \leq k} \text{val}G(A_j, x_j) \right] \left[\prod_{1 \leq i \leq l} \text{val}R(B_i, \bar{x}_i) \right]$$

- u est la signature standard de toutes les portes génératrices et v celle de toutes les portes de reconnaissance, $\langle \bar{u}, v \rangle$ est le PerfMatch du graphe.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

Pl-X-matching

Entrée : Un graphe pondéré biparti planaire $G = (V, E, W)$ en entrée, V étant partitionné en V_1 et V_2 , tel que tous les sommets de V_1 soient de degré au plus 2.

Sortie : La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de V_2 , $-(w_1 + \dots + w_k)$ somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

Pl-X-matching

Entrée : Un graphe pondéré biparti planaire $G = (V, E, W)$ en entrée, V étant partitionné en V_1 et V_2 , tel que tous les sommets de V_1 soient de degré au plus 2.

Sortie : La somme des poids des couplages de toutes tailles, où le poids d'un couplage est le produit des poids des arêtes du couplage et de, pour tout sommet non saturé de V_2 , $-(w_1 + \dots + w_k)$ somme des poids des arêtes arrivant en ce sommet.

Théorème

Pl-X-matching a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire $\text{Pl-X-matching} \in \text{FP}$.

On peut réaliser la signature $(1, 1, 1, 0)$ selon la base \mathbf{b}_1 .

On peut réaliser la signature $(1, 1, 1, 0)$ selon la base \mathbf{b}_1 .

Lemme

Pour tout k et tout ensemble de poids w_1, \dots, w_k il existe une porte de reconnaissance à k entrées B telle que sur l'entrée $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_k \in \mathbf{b}_1^{\otimes k}$, la valeur de $\text{val}R(B, x)$ est :

- 1 $-(w_1 + \dots + w_k)$ si $x_1 = \dots = x_k = n$
- 2 w_i si $x_i = p$ et pour tout $j \neq i$ $x_j = n$
- 3 0 pour le reste des cas

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

PI-Node-Bipartition

Entrée : Un graphe planaire de degré au plus 3.

Sortie : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

PI-Node-Bipartition

Entrée : Un graphe planaire de degré au plus 3.

Sortie : Le cardinal du plus petit ensemble de sommet tel que si on le retire, le graphe induit est biparti.

Théorème

PI-Node-Bipartition a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire PI-Node-Bipartition est dans FP.

Définition (Signature symétrique)

Si $\text{val}G(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$, $x_i \in \{n, p\}$ ne dépend que du nombre de n et p et pas de leur positions dans x , on dit que la signature de E selon la base $\{n, p\}$ est symétrique. On note ces signatures $[S_0, \dots, S_k]$.

Définition (Signature symétrique)

Si $valG(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$, $x_i \in \{n, p\}$ ne dépend que du nombre de n et p et pas de leur positions dans x , on dit que la signature de E selon la base $\{n, p\}$ est symétrique. On note ces signatures $[S_0, \dots, S_k]$.

On travaille ici dans la base $\mathbf{b}_3 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. On réalise la signature $[0, 1, 0]$ pour une porte génératrice et les signatures $[x, 1, x]$ et $[x, 1, 1, x]$ pour des portes de reconnaissances.

Définition (Signature symétrique)

Si $\text{val}G(A, x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$, $x_i \in \{n, p\}$ ne dépend que du nombre de n et p et pas de leur positions dans x , on dit que la signature de E selon la base $\{n, p\}$ est symétrique. On note ces signatures $[S_0, \dots, S_k]$.

On travaille ici dans la base $\mathbf{b}_3 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. On réalise la signature $[0, 1, 0]$ pour une porte génératrice et les signatures $[x, 1, x]$ et $[x, 1, 1, x]$ pour des portes de reconnaissances.

Le calcul du Holant donne un polynôme en x dont le degré est la valeur recherchée. Il ne reste plus qu'à calculer ce polynôme par interpolation.

Mais qu'est-ce qu'un algorithme holographique, une réduction holographique ?

Mais qu'est-ce qu'un algorithme holographique, une réduction holographique ?

C'est ce qu'on vient de voir !

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

PI-Rtw-Mon-3CNF

Entrée : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

Sortie : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

PI-Rtw-Mon-3CNF

Entrée : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

Sortie : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

Théorème

\oplus PI-Rtw-Mon-3CNF est $\oplus P$ -complet.

PI-Rtw-Mon-3CNF

Entrée : Une formule dans une forme très particulière : elle est planaire (**PI**), sous forme normale conjonctive, avec 3 littéraux par clause au plus, sans négation (**Monotone**) et chaque variable apparaît au plus 2 fois (**Read twice**).

Sortie : Le nombre de valuation satisfaisant la formule.

Théorème

\oplus PI-Rtw-Mon-3CNF est $\oplus P$ -complet.

Théorème

#₇PI-Rtw-Mon-3CNF a une réduction holographique à PerfMatch, c'est à dire #₇PI-Rtw-Mon-3CNF \in FP.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - PI-X-Matching
 - PI-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - **Deux beaux résultats de Cai**
 - Quelques idées pour la suite

Théorème

Soient G_1, \dots, G_s des signatures de générateurs et R_1, \dots, R_t des signatures de reconnaisseurs simultanément réalisables dans la même base \mathbf{b} de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base $\hat{\mathbf{b}}$ de taille 1 facilement calculable à partir de \mathbf{b} dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.

Théorème

Soient G_1, \dots, G_s des signatures de générateurs et R_1, \dots, R_t des signatures de reconnaisseurs simultanément réalisables dans la même base \mathbf{b} de taille quelconque. Si toutes les signatures des générateurs ne sont pas dégénérées alors il existe une base $\hat{\mathbf{b}}$ de taille 1 facilement calculable à partir de \mathbf{b} dans laquelle toutes ces signatures sont simultanément réalisables.

Théorème

On peut décider en temps polynômial si un nombre quelconque de signatures symétriques sont simultanément réalisables.

- 1 Deux polynômes de graphe
 - Présentation
 - Complexité
- 2 Théorie des algorithmes holographiques
 - Définitions
 - Exemple
 - Le théorème du Holant
- 3 Exemples d'applications
 - Pl-X-Matching
 - Pl-Node-Bipartition
- 4 Quelques résultats et idées
 - Un autre algorithme holographique
 - Deux beaux résultats de Cai
 - Quelques idées pour la suite

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.
- 5 Trouver un problème de parité qu'on peut résoudre en temps polynômial grâce à une réduction vers le PerfMatch d'un graphe biparti.

- 1 Généraliser la caractérisation des signatures symétriques réalisables à toutes les signatures.
- 2 Trouver de nouveaux exemples de réduction holographique.
- 3 Utiliser le théorème du Holant pour montrer la dureté du problème cible plutôt que la facilité du problème qu'on réduit. Un bon candidat est le MatchSum d'un graphe planaire.
- 4 Trouver une contrainte qui rend l'évaluation de MatchSum facile pour s'en servir comme cible d'une réduction holographique.
- 5 Trouver un problème de parité qu'on peut résoudre en temps polynômial grâce à une réduction vers le PerfMatch d'un graphe biparti.
- 6 Trouver une manière de décrire les "bons" problèmes cibles.



Leslie G. Valiant.

Quantum computers that can be simulated classically in polynomial time.

In *STOC*, pages 114–123, 2001.



Leslie G. Valiant.

Holographic algorithms.

Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), (099), 2005.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Bases collapse in holographic algorithms.

In *IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 292–304, 2007.



Jin yi Cai and Pinyan Lu.

Holographic algorithms : from art to science.

In *STOC*, pages 401–410, 2007.