Modules et ordres sandwich

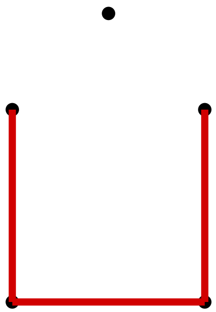
- Qu'est-ce qu'un graphe sandwich?
- Les modules sandwich
- L'énumération des modules sandwich
- Deux exemples d'ordres sandwich

Les graphes sandwich

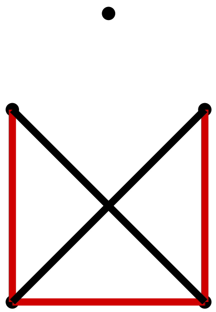
$G_s = (V, E_s)$ est un sandwich de $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$ si $E_1 \subseteq E_s \subseteq E_2$ (Golumbic, 1995).

Problème du Π-sandwich: trouver un sandwich satifaisant Π.
Problème de reconnaissance $\subset$ problème de sandwich.

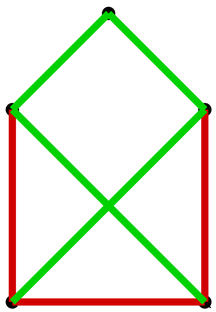
L'esprit des sandwich: Le graphe G ne vérifie pas Π $\rightarrow$ on cherche un graphe proche de G qui vérifie Π.



G_1



G_s



G_2

Exemples d'applications:

- Séquençage de l'ADN *(Reconnaissance de graphe d'intervalle avec des informations ambigües dues à l'expérimentation)*

- Synchronisation de processeurs parallèles *(Reconnaissance de graphe à seuil avec ajout éventuel de sémaphores)*

- Systèmes d'équations linéaires *(Reconnaissance de graphe triangulé avec choix de pivots)*

Orientation:

Et si l'on prolonge l'étude au cas orienté? On aboutit à des questions d'ordres sandwich.
Un graphe représente un ordre s'il est antisymétrique et orienté transitivement.

Module sandwich

Pb $\rightarrow$ Trouver un graphe sandwich contenant un module.
Module= ensemble de sommets ayant le même voisinage extérieur.

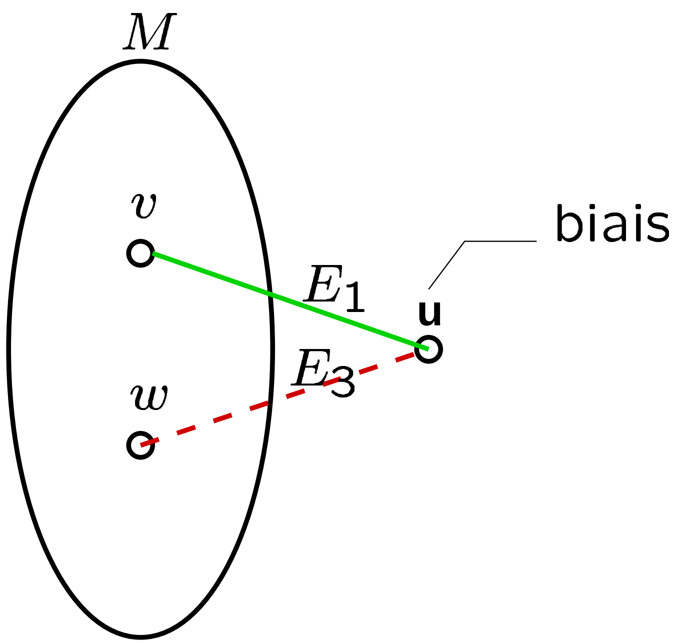
Résultats antérieurs: le problème de décision est dans P:

- Algorithme de Cerioli et al. (1998): $\mathcal{O}(n^4)$.
- Algorithme de Tang et al. (2001): $\mathcal{O}(\Delta n^2)$.

Problème d'énumération: La réponse polynomiale de Tang et al. est fausse.

Sommets biais

Sommet biais: u tel que $\{u, v\} \in E_1$ et $\{u, w\} \in E_3$.
Un ensemble est un module sandwich ssi son ensemble de sommets biais est vide.



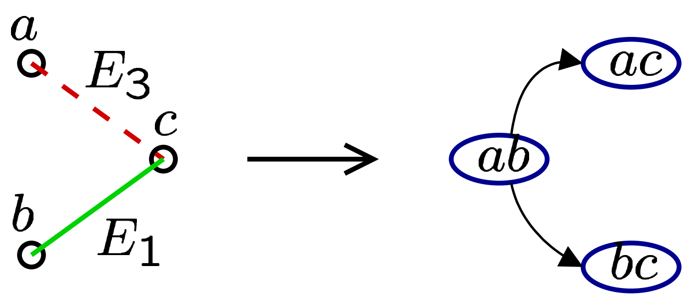
Algorithmes de décision

Algorithme de Cerioli et al.:

▶ Pour chaque couple $\{x, y\} \in V^2$ agrandir l'ensemble biais récursivement avec les sommets biais jusqu'à un $H_{x,y}$ sans sommet biais.

▶ Si $\exists x_0, y_0$ avec $H_{x_0,y_0} \neq V$, c'est un module sandwich.

Algorithme de Tang et al.:



▶ Construction du graphe biais G_b:

▶ Les composantes fortement connexes terminales sont des modules sandwich.

Énumération des modules sandwich

Algorithme de Tang et al. :
$\rightarrow$ Énumérer **tous** les modules? Cela sera presque toujours exponentiel en la taille du graphe.
$\rightarrow$ Leur théorème est basé sur l' affirmation fausse: *M est un module ssi c'est un r-union du graphe biais contracté*.
(*r-union* $=$ sous-arbre partant d'un noeud du graphe biais contracté)
Cela donnerait une énumération polynomiale $\rightarrow$ FAUX!

Énumération des modules sandwich

Modules forts:

$\rightarrow$ M module fort si pour tout module M' qui le rencontre, $M \subseteq M'$ ou $M \subseteq M'$.

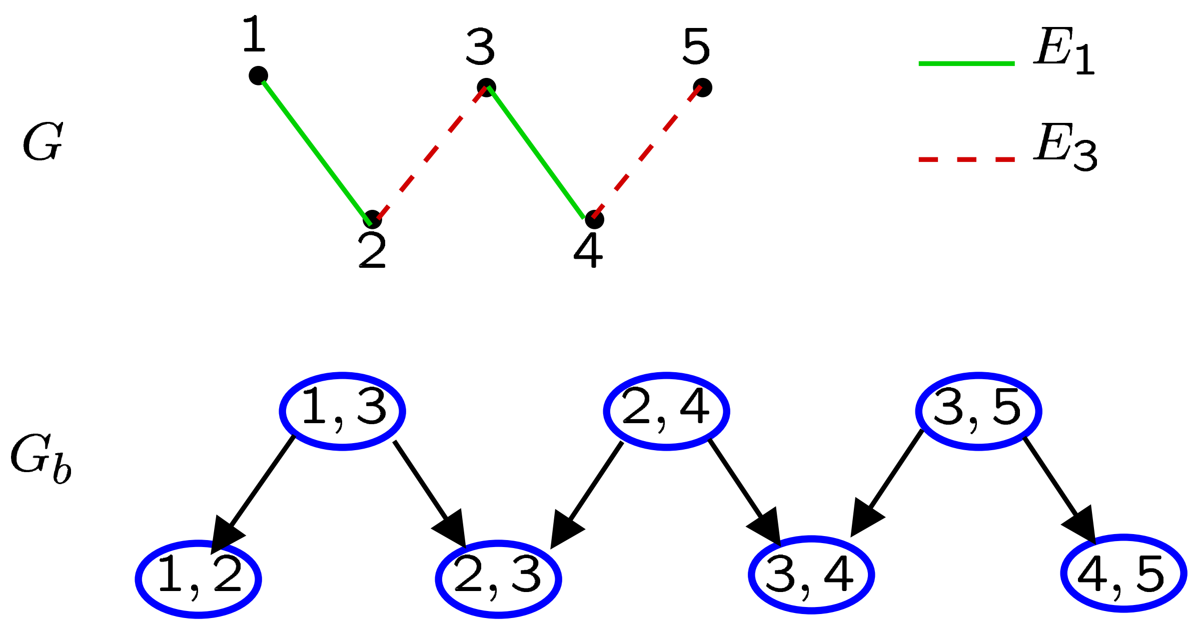
$\rightarrow$ Ceux qui apparaissent dans l'arbre de décomposition modulaire.

Problème d'énumération:

Trouver toutes les paires $\{M, G_s(V, E_s)\}$ avec M module fort pour le sandwich G_s, et E_s minimal pour l'inclusion.

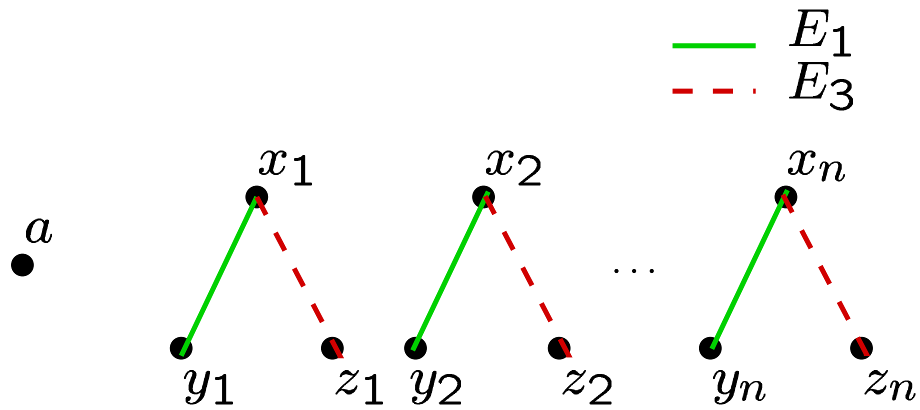
$\rightarrow$ Il peut y en avoir un **nombre exponentiel en la taille du graphe**!

Un contre-exemple

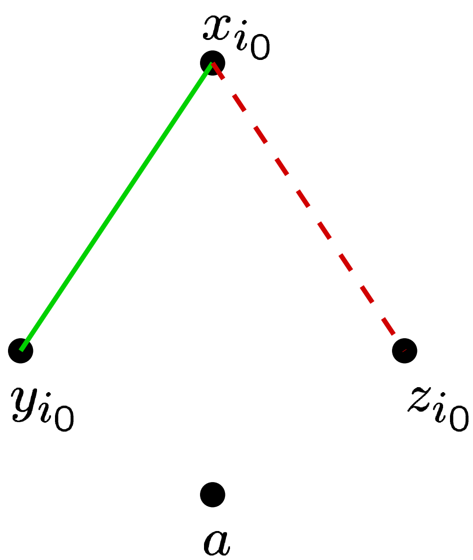


Les modules de taille 4 n'apparaissent pas dans le graphe biais contracté ($= G_c$)

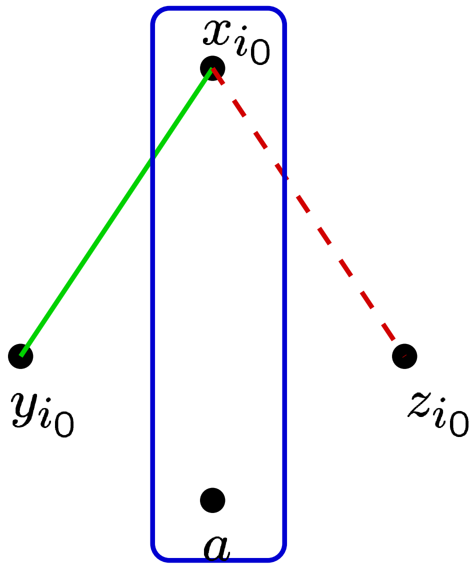
Nombre exponentiel de modules sandwich forts



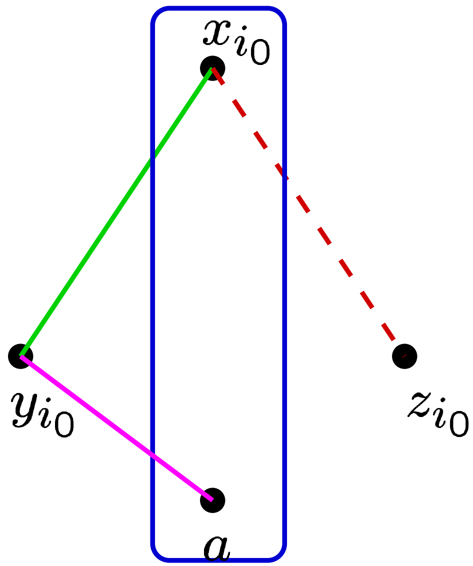
Modules forts contenant le sommet a



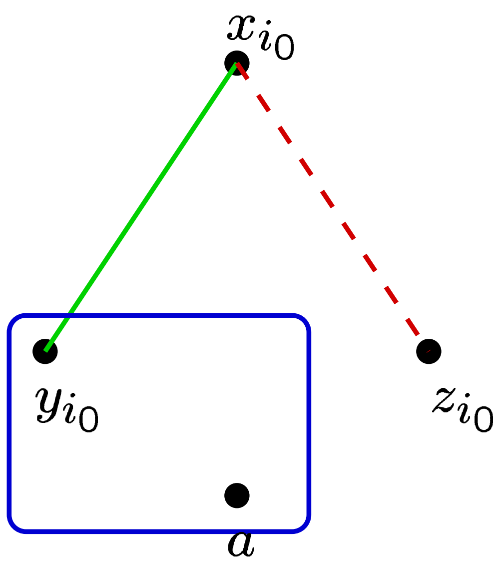
Modules forts contenant le sommet a



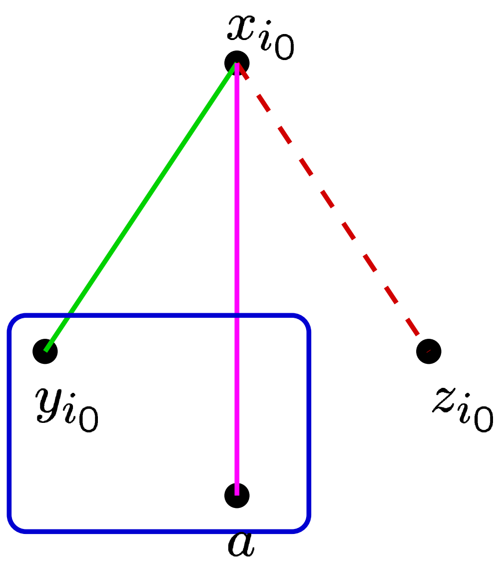
Modules forts contenant le sommet a



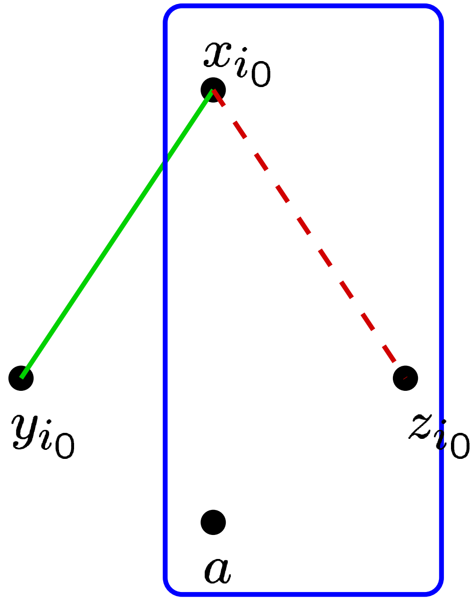
Modules forts contenant le sommet a



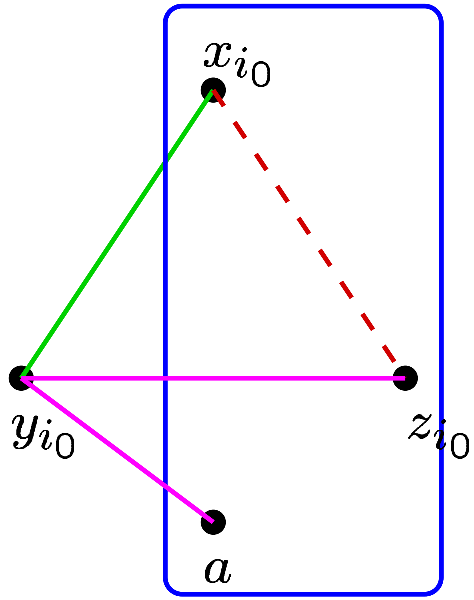
Modules forts contenant le sommet a



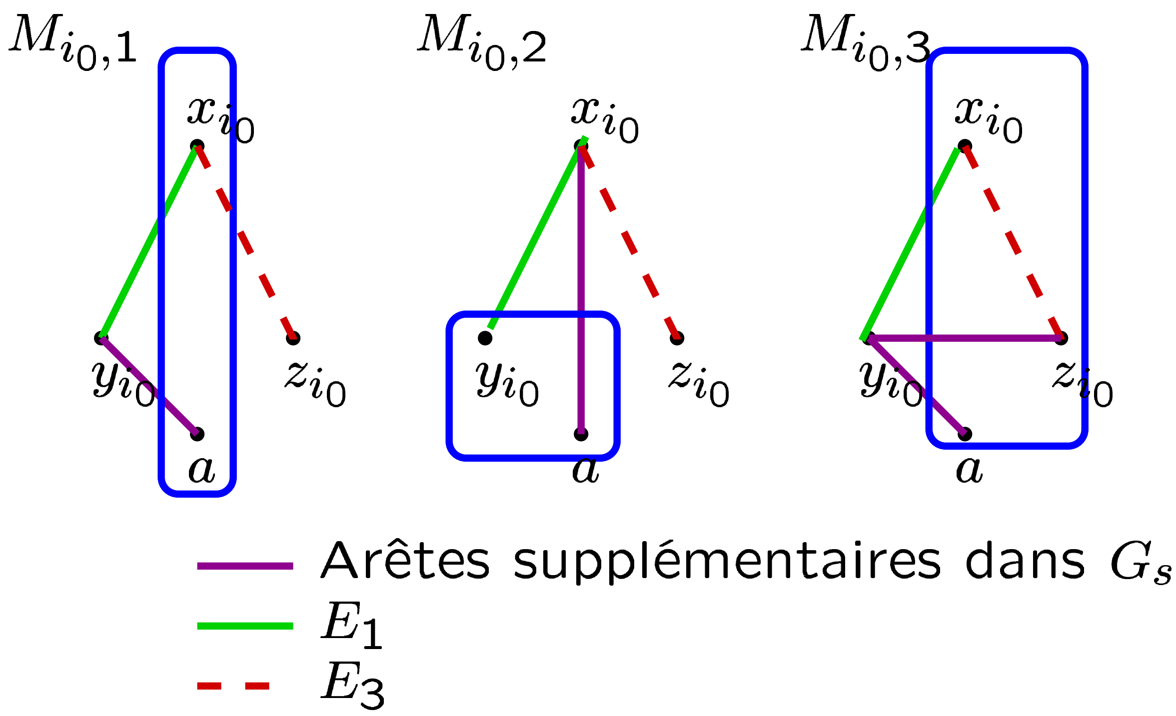
Modules forts contenant le sommet a



Modules forts contenant le sommet a



Modules forts contenant le sommet a



4^n modules forts contenant le sommet a

Propriété:

$M_{i,1}, M_{i,2}, M_{i,3}$ les 3 modules sandwich forts associés au triplet i ($M_{i,0} = \emptyset$)

$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_{i,k_i}$ avec $k_i \in \{0, 1, 2, 3\} \forall i \leq n$

M est un module fort pour le sandwich $G_s(V, E_s)$

où $E_s = E_1 \cup \{\{u, v\}/u \in M, v \notin M, \exists w \in M \{w, v\} \in E_1\}$

E_s est l'ensemble minimal d'arêtes à ajouter pour que M soit module.

$\rightarrow$ On peut les unir aléatoirement $\rightarrow 4^n$

Caractérisation correcte des modules sandwich

r-union de $G_c \Rightarrow$ module sandwich.
MAIS module sandwich $\not\Rightarrow$ *r-union* de G_c !

Définition: $\sigma(S) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a,b \in S}$ r-union$(N_{a,b})$
$N_{a,b}$ *noeud dans* G_b*-contracté associé à* $\{a, b\}$ *dans* G_b.

Caractérisation des modules sandwich: M **est un module pour un graphe sandwich ssi** $M \neq V$ **et** $M = \sigma(M)$.

À propos du caractère exponentiel

Algorithme de Cerioli: calcule les $r - union(N_{a,b})$ à partir d'un couple $\{a, b\}$

$\rightarrow$ décide de l'existence.

$\rightarrow$ polynomial.

Nouvelle caractérisation: on part d'un ensemble quelconque S

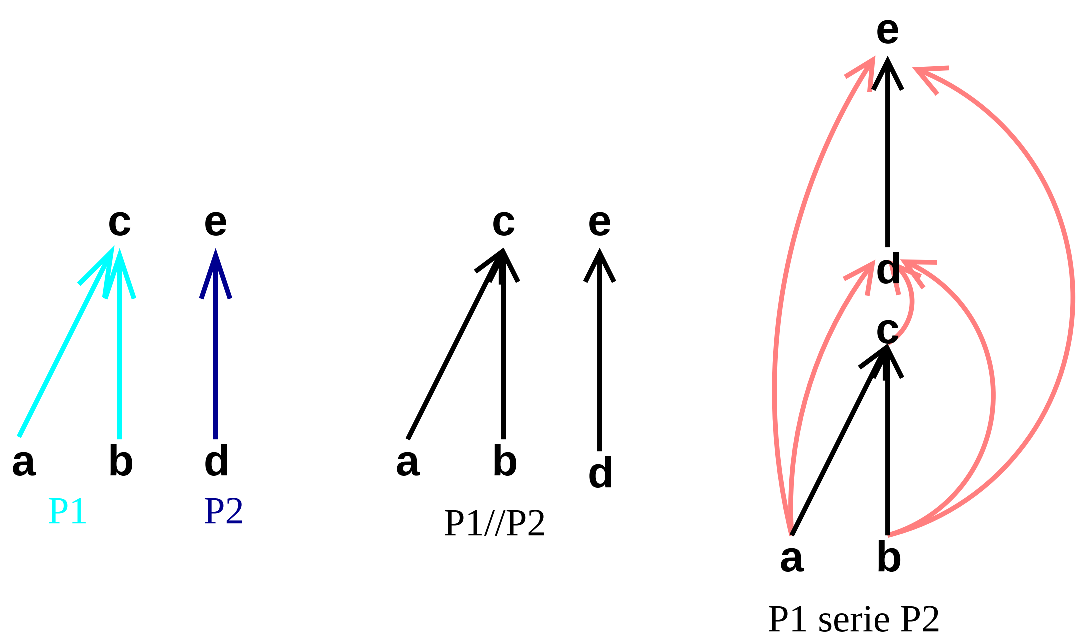
$\rightarrow$ énumère.

$\rightarrow$ exponentiel.

Sandwich série-parallèle

Ordre série-parallèle:

Obtenu par compositions série et parallèle.



Sandwich série parallèle

Théorème 1 (Valdes 1978) *P ordre SP (**S**érie-**P**arallèle)*
$\Leftrightarrow$ le graphe de comparabilité de P ne contient pas de P_4 comme sous-graphe induit.
$\Leftrightarrow$ le graphe de comparabilité de P est un cographe.

$\rightarrow$ On va s'inspirer de la procédure *Cographe-Sandwich* de Golumbic pour le sandwich SP .

Hypothèses:
On se restreint au cas G_2 transitif: ordre sandwich SP.
On peut supposer G_1 transitif (contenu dans tout sandwich).

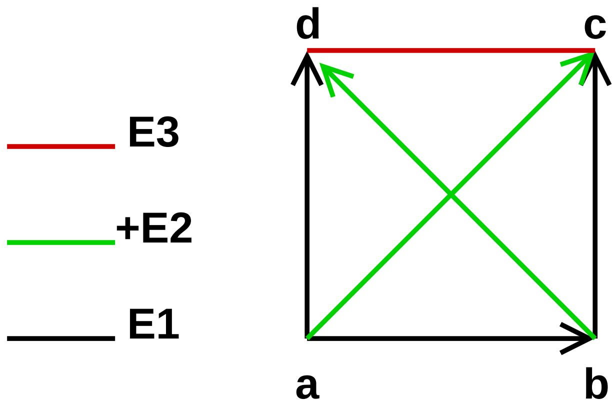
Algorithme polynomial pour le sandwich d'ordre

→ On décompose G_1 et G_3 en composantes connexes.

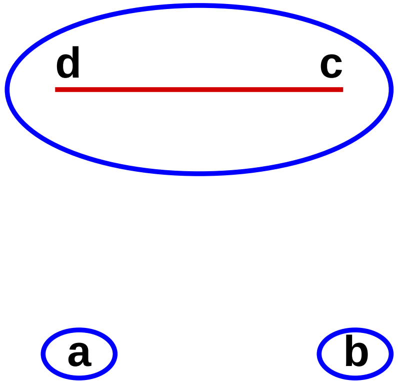
En effet:

▶ Si G_1 connexe et G_3 non connexe: série des sandwich sur les composantes connexes (cc.) de G_3.

▶ Dans le cas inverse: composition parallèle des sandwich sur les cc. de G_1.



Instance



cc. de G3

Ordre sandwich de permutation

Un graphe de permutation est un graphe d'intersection d'un diagramme de permutation.
Un ordre est de permutation ssi il est de dimension 2.

Question:
Étant donné deux ordres partiels P_1 et P_2, existe-t-il un ordre P de dimension 2 tel que $P_1 \subseteq P \subseteq P_2$?
On conjecture le problème $\mathcal{NP}$-**complet** au vu du problème non orienté.

La difficulté est la non-monotonie de la dimension (sinon, ce serait polynomial).

Conclusion

▶ **Module sandwich**:

• Problème de décision $\in$ P... mais pas le problème d'énumération!

• Énumération exponentielle $\rightarrow$ difficultés pour le problème du *module sandwich pondéré* et pour le *module sandwich arête-minimal*.

• Question ouverte: le problème d'énumération est-il #P-complet?

▶L'étude des **sandwich orientés** a soulevé d'intéressantes questions d'ordres, comme le problème de trouver un ordre de dimension 2 entre deux ordres partiels.