CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

PUBBLICAZIONI

DELL'ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO

N. 696

CORRADO BÖHM

Alcune proprietà delle forme β-η-normali nel λ-K-calcolo (*)

(*) Lavoro eseguito all'INAC, nell'ambito del raggruppamento di ricerca n. 43 del Comitato nazionale per le scienze matematiche del CNR.

ROMA

1968

Tipo-litografia MARVES
Via Mecenate, 35 - Roma - Tel. 730.061

Introduzione

Si presume che il lettore conosca la teoria del λ - k calcolo quale descritta in [1], [2], [3] od almeno i lavori [4], [5].

Nel seguito adopereremo "combinatore" come sinonimo di formula del λ-k-calcolo senza variabili libere.

E'noto che i combinatori formano un insieme $\mathscr{C}$ di enti che possono venire interpretati anche come funzioni da $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}$, oppure da $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ in $\mathscr{C}$, oppure da $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \mathscr{C}$ in $\mathscr{C}$ e cosi' via.

Una sottoclasse dei combinatori e' costituita dalle cosidette forme normali, di cui e' ardua una caratterizzazione algebrica.

E'noto che l'insieme $\mathscr{C}$ dei combinatori e' generato a partire da due forme normali distinte fra loro

$$S \equiv \lambda x \lambda y \lambda z (xz(yz))$$

$$K \equiv \lambda x \lambda y x$$

con ripetute "applicazioni". Ora un significato che puo' venire attribuito al corollario 1 di questo lavoro e' il seguente: non esistono forme normali privilegiate (quali potrebbero essere ritenute S e K ad es.) in quanto se si stabiliscono delle classi di congruenza di combinatori (rispetto all'applicazione) tali che esistano almeno due combinatori incongruenti fra loro, cio' basta per affermare che ogni classe non puo' contenere piu' di una forma normale.

Un secondo significato rende il corollario 1 abbastanza peculiare. Infatti, considerando le forme normali come funzioni di un numero finito di variabili, una parafrasi del risultato e': date due funzioni distinte e' sempre possibile trovare un'ennupla di argomenti tali che i valori delle due funzioni per quell'ennupla di argomenti coincidano con due valori prefissati arbitrari.

Il corollario 1 risolve, fra l'altro, un problema posto in [5] (pag. 194): Trovare un algoritmo per costruire, date due forme normali diverse fra loro F, G, un combinatore Δ tale che

$$\Delta F = K \quad , \quad \Delta G = 0. \qquad (0 \equiv \lambda x \lambda y y)$$

Tale algoritmo e' implicito nella dimostrazione del teorema 1 del presente lavoro.

E'facile mostrare che i combinatori formano un semigruppo

con zeri a sinistra e con identita' rispetto all'operazione di composizione $(\circ)$ con generatori C_*, C_*S, C_*K, dove

$$C_* \equiv \lambda x \lambda y (yx).$$

Il corollario 2 afferma che per le forme normali F, che non sono zeri del semigruppo (cioe' diversi da λyX, dove y non occorre in X) vale la proprieta'

$$\Delta \circ F \circ \nabla = I \qquad I \equiv \lambda xx, \text{ combinatore identita',}$$

per appropriati combinatori Δ e ∇ di cui si da' la struttura.

Infine il corollario 3 riguarda la cardinalita' del codominio dei combinatori considerati come funzioni unarie. Per gli zeri del semigruppo, cioe' i combinatori λyX, tale cardinalita' e' uno. Il corollario 3 dimostra che se due forme normali distinte cadono nel codominio, la cardinalita' deve essere almeno tre.

Tale corollario e' suscettibile di miglioramento. In un prossimo lavoro si intende sostituirlo col seguente: se n forme normali distinte cadono nel codominio di un combinatore, la cardinalita' del codominio e' almeno $n+1$.

Proponiamo la seguente congettura: la cardinalita' del codominio di un combinatore e' 1 oppure ∞.

Notazioni sintattiche

Come e' noto l'insieme $\mathcal{N}$ delle formule β-η-normali e' definito ricorsivamente come segue:

$$X_1, \ldots, X_m \in \mathcal{N} \rightarrow \xi X_1 \ldots X_m \in \mathcal{N}, \qquad m \geqslant 0, \qquad \xi \text{ variabile}$$

$$X \in \mathcal{N} \rightarrow \lambda t X \in \mathcal{N}, \qquad t \text{ variabile}$$

(eccettuato il caso $X \equiv X't$ dove t non occorre in X').

Da quanto precede si deduce che ogni formula $N \in \mathcal{N}$ ha la struttura seguente

$$N \equiv \lambda t_1 \ldots \lambda t_n (\xi X_1 \ldots X_m)$$

dove $n \geqslant 0$ e' l'*ordine* di N, $m \geqslant 0$ e' il *grado* di N, $X_k \in \mathcal{N}$ e ξ e' la *variabile principale* di N.

Si noti che il segno $\equiv$ rappresenta identita' di formule o

identita' definizionale, mentre il segno $=$ sta per la λ-k-convertibilita' di formule. Come e' d'uso se M e' una formula e se $y_1, y_2, \ldots$ sono variabili, la scrittura $M[y_1, y_2, \ldots]$ indica che nella formula M le variabili y_1, y_2 possono occorrere libere: la scrittura $M[G_1, G_2, \ldots]$ indica il risultato della sostituzione in M di ogni occorrenza libera di y_1 con G_1, y_2 con G_2, etc.

Possiamo ora enunciare il

TEOREMA 1

Siano $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$. Se $N_1 \neq N_2$ allora esistono

(i) due interi $t, s \geqslant 0$

(ii) Combinatori $\nabla_k \in \mathcal{N}, k = 1, \ldots, t$

(iii) Formule $H_k \in \mathcal{N}, k = 1, \ldots, s$

tali che

$$N_i [\nabla_1 y_1, \ldots, \nabla_t y_t] H_1 \ldots H_s = v_i \qquad i = 1, 2$$

dove le variabili v_i occorrono libere in alcune H_k.

Un caso particolare molto significativo e' il seguente

COROLLARIO 1

Siano $C_1, C_2 \in \mathcal{N}$ due combinatori in forma normale. Se $C_1 \neq C_2$ allora esistono

(i) un intero $s > 0$

(ii) Combinatori $G_1, \ldots, G_s$ aventi la struttura $K^a K^b$ oppure $K^a X_1$, $K^b X_2$, a, b interi $\geqslant 0$

tali che

$$C_i G_1 \ldots G_s = X_i \qquad i = 1, 2$$

dove X_1, X_2 sono due arbitrari combinatori.

Il corollario si ottiene dal teorema precisando la struttura delle formule di cui la dimostrazione fa uso e osservando che se in N_1, N_2 nessuna variabile occorre libera si ha $N_i [y_1, \ldots, y_t] \equiv N_i [\nabla_1 y_1, \ldots, \nabla_t y_t] \equiv C_i$ e che se $H_k \equiv H_k [v_1]$ oppure $H_k \equiv H_k [v_2]$ e' sufficiente definire

$$G_k \equiv H_k [X_i]$$

e che se $H_k \equiv H_k [x]$ e' sufficiente definire

$$G_k \equiv H_k [I].$$

Metodo di dimostrazione del teorema 1

Si introduce una relazione di equivalenza $\sim$ tale che se due formule sono disequivalenti la dimostrazione e' pressoche' immediata (Lemma 1). Se due formule distinte sono equivalenti, a tale coppia viene associata una catena finita di coppie di formule equivalenti, tranne l'ultima coppia che e' formata da formule disequivalenti. Si dimostra che se la variabile principale di ogni coppia (o le due dell'ultima) e' diversa da quella di ogni altra coppia, allora e' possibile passare dalla coppia iniziale alla coppia disequivalente con le operazioni ammesse dal teorema (Lemma 2). Infine si dimostra (Lemma 3) che esiste una sostituzione di variabili che essenzialmente trasforma la catena finita, relativa alla data coppia di formule distinte, in una catena della medesima lunghezza in cui tutte le variabili principali delle coppie sono diverse fra loro.

Una relazione di equivalenza

Siano $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ e $N_1 \neq N_2$. Abbiamo visto che deve essere

$$N_i \equiv \lambda t_1 \ldots \lambda t_{n_i} \left(\xi_i X_1^{(i)} \ldots X_{m_i}^{(i)} \right) \qquad i = 1, 2$$

dove $n_i \geqslant 0$, $m_i \geqslant 0$, $X_j^i \in \mathcal{N}$ e le ξ_i sono variabili.

Sia $\bar{n} = \underset{i}{Max}\ n_i$. Dato un numero $f \geqslant \bar{n}$ e la coppia (N_1, N_2), e' univocamente determinata la coppia (M_1, M_2) definita da

$$(1) \qquad M_i = N_i x_1 x_2 \ldots x_f \qquad i = 1, 2$$

dove $x_1, \ldots, x_f$ non occorrono in N_i.

Naturalmente $M_i \in \mathcal{N}$ e da una nota proprieta' del λ-calcolo si ha

$$N_1 \neq N_2 \leftrightarrow M_1 \neq M_2 .$$

Inoltre deve essere

$$(1') \qquad M_i \equiv \xi_i' \underline{X}_1^{(i)} \ldots \underline{X}_{m_i}^{(i)} x_{n_i+1} \ldots x_f \qquad i = 1, 2$$

dove $\underline{X}_j^{(i)}$, ξ_i' stanno per il risultato delle sostituzioni t_k / x_k in $X_j^{(i)}$, ξ_i.

Definiamo la seguente relazione tra formule normali:

$$N_1 \sim N_2 \leftrightarrow \xi_1 = \xi_2 \quad , \quad n_1 - m_1 = n_2 - m_2$$

Evidentemente, si tratta di una relazione di equivalenza, perciò

$$N_1 \not\sim N_2 \rightarrow N_1 \neq N_2$$

$$N_1 \sim N_2 \rightarrow M_1 \sim M_2$$

Riscriviamo le (1) in maniera piu' uniforme

$$(2) \qquad M_i \equiv z_i Y_1^{(i)} \ldots Y_j^{(i)} \ldots Y_{g_i}^{(i)} \qquad i = 1, 2$$

dove naturalmente $z_i \equiv \xi_i'$, $\underline{X}_k^{(i)} \equiv Y_k^{(i)}$, $x_{n_i+h} \equiv Y_{m_i+h}$ ed e'

$$g_i = m_i + f - n_i \qquad f \geqslant \bar{n}$$

E'evidente che

$$M_1 \sim M_2 \leftrightarrow z_1 = z_2 \quad , \quad g_1 = g_2 .$$

Da quanto precede risulta ovvio il seguente enunciato:

Se $N_1 \neq N_2$ e se $N_1 \sim N_2$ allora, ponendo $g = m_i + \bar{n} - n_i$, ovvero $f = \bar{n}$, in (2) risulta $Y_j^{(1)} \neq Y_j^{(2)}$ per almeno un valore dell'indice j, $1 \leqslant j \leqslant g$.

LEMMA 1

Il teorema 1 e' valido nel caso $N_1 \not\sim N_2$.

Dimostrazione

E'sufficiente esaminare l'alternativa

(i) $\xi_1 \neq \xi_2$

(ii) $\xi_1 = \xi_2$, $n_1 - m_1 \neq n_2 - m_2$

Nel caso (i) consideriamo le formule $M_i v_1 v_2 [z_1, z_2]$ dove le M_i sono definite in (1), (1') e (2) ed e' stato scelto $f = \bar{n}$. E'facile verificare che

$$(3) \qquad M_i v_1 v_2 [K^{1+g_1} K z_1, K^{2+g_2} I z_2] = v_i \qquad i = 1, 2$$

Nel caso (ii) si scelga $f = 1+\bar{n}+p$ dove $p = |(n_1-m_1)-(n_2-m_2)|$ e sia $\bar{g} = \underset{i}{Max}(m_i+\bar{n}-n_i)$.

In conseguenza della scelta di f si ottiene in (2)

$$Y^{(1)}_{1+\bar{g}} = x_{1+\bar{n}} \quad , \quad Y^{(2)}_{1+\bar{g}} = x_{1+\bar{n}+p}$$

oppure

$$Y^{(1)}_{1+\bar{g}} = x_{1+\bar{n}+p} \quad , \quad Y^{(2)}_{1+\bar{g}} = x_{1+\bar{n}}$$

Consideriamo le formule $M_i[x_{1+\bar{n}}, x_{1+\bar{n}+p}, z]$ dove $z = z_1 = z_2$. E' facile verificare che

$$(4) \qquad M_i[K^p v_1, v_2, K^{1+\bar{g}} Iz] = v_i \quad \text{oppure} \quad v_{3-i} \qquad i = 1,2$$

Le formule (3) e (4) essenzialmente dimostrano il lemma 1. Infatti esse sintetizzano i quattro casi possibili per la (3): ξ_1, ξ_2 entrambe libere, ξ_1 libera e ξ_2 legata, ξ_1 legata e ξ_2 libera, ξ_1 e ξ_2 entrambe ~~libere~~ legate; e per la (4) i due casi possibili: ξ libera, ξ legata.

Caso 1. Sia $\xi_1 \equiv y_1$, $\xi_2 \equiv y_2$. Allora le (3) si riscrivono

$$N_i[\nabla_1 y_1, \nabla_2 y_2] x_1 \ldots x_{\bar{n}} v_1 v_2 = v_i \qquad i = 1,2$$

dove $\nabla_1 \equiv K^{g_1+1}K$, $\nabla_2 \equiv K^{g_2+2}I$.

Caso 2 (ed analogamente caso 3). Sia $\xi_1 \equiv y_1$, $\xi_2 \equiv t_k$. Allora le (3) si riscrivono

$$N_i[\nabla_1 y_1] x_1 \ldots x_{k-1} (\nabla_2 x\ \ ) x_{k+1} \ldots x_{\bar{n}} v_1 v_2 = v_i \qquad i = 1,2$$

Caso 4. Sia $\xi_1 \equiv t_k$, $\xi_2 \equiv t_l$, $l \neq k$. Allora si ha

$$N_i x_1 \ldots x_{k-1} (\nabla_1 x_k) x_{k+1} \ldots x_{l-1} (\nabla_2 x_l) x_{l+1} \ldots x_{\bar{n}} v_1 v_2 = v_i \qquad i = 1,2$$

Caso 5. Sia $\xi = y_1$ libera. Allora le (4) si riscrivono

$$N_i[\nabla_1 y_1] x_1 \ldots x_{\bar{n}} (K^p v_1) x_{\bar{n}+2} \ldots x_{\bar{n}+p} v_2 = v_i \quad \text{oppure} \quad v_{3-i} \qquad i = 1,2$$

dove $\nabla_1 \equiv K^{\bar{g}+1} I$.

Caso 6. Sia $\xi = t_k$ legata. Allora si ha

$$N_i x_1 \ldots x_{k-1} (\nabla_1 x_k) \ldots x_{\bar{n}} (K^p v_1) x_{\bar{n}+2} \ldots x_{\bar{n}+p} v_2 = v_i \quad \text{oppure} \quad v_{3-i} \qquad i = 1,2$$

Le precedenti relazioni rappresentano la tesi del teorema 1 (a meno di un eventuale scambio fra v_1 e v_2 nel caso (ii)), percio' dimostrano il lemma 1.

Vogliamo ora esaminare il caso $N_1 \neq N_2$, $N_1 \sim N_2$.

Dall'enunciato precedente il lemma 1 risulta che per $f = \bar{n}$ esiste una coppia $(N_1^{(1)}, N_2^{(1)})$ di sottoformule $N_1^{(1)} \neq N_2^{(1)}$ della coppia (M_1, M_2) univocamente associata a (N_1, N_2). Per $(N_1^{(1)}, N_2^{(1)})$ puo' valere $N_1^{(1)} \not\sim N_1^{(1)}$ oppure $N_1^{(1)} \sim N_2^{(1)}$. In quest'ultimo caso ripetendo il ragionamento fatto per (N_1, N_2) si puo' definire univocamente $(M_1^{(1)}, M_2^{(1)})$, considerare una coppia di sottoformule $N_1^{(2)} \neq N_2^{(2)}$ e cosi' di seguito. Vale percio' il seguente enunciato:

Alla coppia $(N_1^{(0)}, N_2^{(0)})$ con $N_1^{(0)} \neq N_2^{(0)}$ e' associato in modo naturale un intero $0 \leqslant \sigma < \infty$ ed una catena di formule $(M_1^{(l)}, M_2^{(l)})$ $l = 0, \ldots, \sigma$ tutte aventi la struttura (2) e tali che valgano le relazioni

$$M_1^{(l)} \sim M_1^{(l)} \qquad l = 0, \ldots, \sigma - 1, \qquad M_1^{(\sigma)} \not\sim M_2^{(\sigma)}$$

La finitezza di σ e' una conseguenza del fatto che nel passaggio da $(N_1^{(l)}, N_2^{(l)})$ a $(N_1^{(l+1)}, N_2^{(l+1)})$ in almeno una delle due formule costituenti la coppia il numero dei simboli decresce.

Esempio 1

Sia

$$N_1^{(0)} \equiv \lambda t_1 \lambda t_2 \lambda t_3 (t_1 \lambda u t_2 \lambda v (t_2 t_1 \lambda z \lambda s (zv)) t_3)$$

$$N_2^{(0)} \equiv \lambda u \lambda v\ ((u\ \lambda t v)(\lambda x\ (vu\ \lambda z z)))$$

Si ha

$$M_1^{(0)} = N_1^{(0)} x_1 x_2 x_3 = x_1 \lambda u x_2 \lambda v (x_2 x_1 \lambda z \lambda s (zv)) x_3$$

$$M_2^{(0)} = N_2^{(0)} x_1 x_2 x_3 = x_1 \lambda t x_2 \lambda x (x_2 x_1 \lambda x x) x_3$$

$$N_1^{(1)} \equiv \lambda v (x_2 x_1 \lambda z \lambda s (zv))$$

$$N_2^{(1)} \equiv \lambda x (x_2 x_1 \lambda z z)$$

$$M_1^{(1)} = N_1^{(1)} x_4 = x_2 x_1 \lambda z \lambda s (z x_4)$$

$$M_2^{(1)} = N_2^{(1)} x_4 = x_2 x_1 \lambda z z$$

$$N_1^{(2)} \equiv \lambda z \lambda s (z x_4)$$

$$N_2^{(2)} \equiv \lambda z z$$

$$M_1^{(2)} = N_1^{(2)} x_5 x_6 = x_5 x_4$$

$$M_2^{(2)} = N_2^{(2)} x_5 x_6 = x_5 x_6$$

$$N_1^{(3)} \equiv M_1^{(3)} \equiv x_4$$

$$N_2^{(3)} \equiv M_2^{(3)} \equiv x_6$$

Procediamo ora alla dimostrazione del seguente

LEMMA 2

Se $N_1^{(0)} \neq N_2^{(0)}$ e se tutte le variabili principali $z^{(0)}, \ldots, z^{(\sigma-1)}, z_i^{(\sigma)}$ di una catena $(M_1^{(l)}, M_2^{(l)})$ $l = 0, \ldots, \sigma$ associata a $(N_1^{(0)}, N_2^{(0)})$ sono diverse fra loro (potendo pero' essere $z_1^{(\sigma)} = z_2^{(\sigma)}$) allora il teorema 1 e' valido per $N_1^{(0)}, N_2^{(0)}$.

Esempio 1 (continuazione e fine)

In questo caso $\sigma = 3$ ed inoltre $z^{(0)} \equiv x_1$, $z^{(1)} \equiv x_2$, $z^{(2)} \equiv x_5$, $z_1^{(3)} \equiv x_4$, $z_2^{(3)} \equiv x_6$. Le premesse del lemma 2 sono verificate. Inoltre

$$N_i^{(1)} \text{ e' } Y_2^{(i)} \text{ di } M_i^{(0)}[z^{(0)}, \ldots, z_1^{(3)}, z_2^{(3)}], \quad g = 3$$

$$N_i^{(2)} \text{ e' } Y_2^{(i)} \text{ di } M_i^{(1)}[z^{(0)}, \ldots, z_1^{(3)}, z_2^{(3)}], \quad g = 2$$

$$N_i^{(3)} \text{ e' } Y_1^{(i)} \text{ di } M_i^{(2)}[z^{(0)}, \ldots, z_1^{(3)}, z_2^{(3)}], \quad g = 1$$

E' facile verificare, tenendo anche conto del lemma 1 per $z_1^{(3)}, z_2^{(3)}$, che

$$M_i^{(0)}[K^2Kz^{(0)}, K^2Iz^{(1)}, KIz^{(2)}, KKz_1^{(3)}, K^2Iz_2^{(3)}] = N_i^{(1)}[K^2Kz^{(0)}, \ldots, K^2Iz_2^{(3)}]$$

$$M_i^{(1)}[K^2Kz^{(0)}, K^2Iz^{(1)}, KIz^{(2)}, KKz_1^{(3)}, K^2Iz_2^{(3)}] = N_i^{(2)}[K^2Kz^{(0)}, \ldots, K^2Iz_2^{(3)}]$$

$$M_i^{(2)}[K^2Kz^{(0)}, K^2Iz^{(1)}, KIz^{(2)}, KKz_1^{(3)}, K^2Iz_2^{(3)}] = N_i^{(3)}[K^2Kz^{(0)}, \ldots, K^2Iz_2^{(3)}]$$

da cui infine si ricava

$$N_i^{(0)}(K^2Kx_1)(K^2Ix_2)x_3(KKx_4)(KIx_5)(K^2Ix_6)v_1v_2 = v_i,$$

od anche

$$N_i^{(0)}(KK)(KI)IKI(KI)v_1v_2 = v_i.$$

Dimostrazione. Per ipotesi $l \neq k \rightarrow z^{(l)} \neq z^{(k)}$, $z_i^{(\sigma)} \neq z^{(k)}$ $(l, k = 0, \ldots\ldots, \sigma,\ i = 1, 2)$, dove le $z^{(l)}$ sono libere in $M_i^{(l)} \equiv M_i^{(l)}[z^{(0)}, \ldots, z^{(\sigma-1)}, z_1^{(\sigma)}, z_2^{(\sigma)}]$ $l = 0, \ldots, \sigma$. Sia ora j_l il valore dell'indice j in $M_i^{(l)}$ identificante le $N_i^{(l+1)}$, $l = 0, \ldots, \sigma-1$.

Si hanno le relazioni seguenti:

$$N_i^{(l)} x_{r_l+1} \ldots x_{r_l+\bar{n}_l} = M_i^{(l)}[z^{(0)}, \ldots, z^{(\sigma-1)}, z_1^{(\sigma)}, z_2^{(\sigma)}] \tag{5}$$

dove
$$r_l = \sum_0^{l-1} \bar{n}_k \quad , \quad \bar{n}_l = \operatorname*{Max}_i\ n_i^{(l)}$$

$$M_i^{(l)}[\nabla^{(0)} z^{(0)}, \ldots, \nabla^{(\sigma-1)} z^{(\sigma-1)}, \nabla_1^{(\sigma)} z_1^{(\sigma)}, \nabla_2^{(\sigma)} z_2^{(\sigma)}] = \tag{6}$$
$$= N_i^{(l+1)}[\nabla^{(0)} z^{(0)}, \ldots, \nabla^{(\sigma-1)} z^{(\sigma-1)}, \nabla_1^{(\sigma)} z_1^{(\sigma)}, \nabla_2^{(\sigma)} z_2^{(\sigma)}]$$

dove $\nabla^{(l)} = K^{j_l} K^{g_l - j_l}$, $g_l = m_i^{(l)} + \bar{n}_l - n_i^{(l)}$ $l = 0, \ldots, \sigma-1$.

e dove $\nabla_1^{(\sigma)}, \nabla_2^{(\sigma)}$ si ricavano dalle formule (3) oppure (4) del lemma 1.

Il lemma e' vero per $\sigma = 0$, perche' in questo caso $N_1^{(0)} \not\sim N_2^{(0)}$ e la tesi e' quella del lemma 1. Sia ora $\sigma > 0$. Si ha

$$M_1^{(\sigma)}[\ldots, \nabla^{(l)} z^{(l)}, \ldots] \not\sim M_2^{(\sigma)}[\ldots, \nabla^{(l)} z^{(l)}, \ldots] \tag{7}$$

in quanto tutte le sostituzioni $z^{(l)} / \nabla^{(l)} z^{(l)}$ con $l \neq \sigma$, essendo $z^{(l)} \neq z_i^{(\sigma)}$, non possono alterare ne' il numero ne' la posizione delle componenti di $M_i^{(\sigma)}$, le quali rimangono normali. Anche se sottoformule di $M_i^{(\sigma)}$ in posizioni corrispondenti diventano ugua-

li la relazione $\not\sim$ si conserva in quanto essa e' definita indipendentemente da cio'.
Si deduce dalla (7) che $N_1^{(\sigma)}[\ldots,\nabla^{(l)}z^{(l)},\ldots] \not\sim N_2^{(\sigma)}[\ldots,\nabla^{(l)}z^{(l)},\ldots]$, e dalla (6) che $M_1^{(\sigma-1)}[\ldots,\nabla^{(l)}z^{(l)},\ldots] \neq M_2^{(\sigma-1)}[\ldots,\nabla^{(l)}z^{(l)},\ldots]$.

Si osservi che il passaggio effettuato da $M_i^{(\sigma)}$ a $M_i^{(\sigma-1)}$ si puo' ripetere per passare da $M^{(\sigma-1)}$ a $M^{(\sigma-2)}$ conservando le relazioni $\neq$ e $\sim$ fra le componenti. Cio' corrisponde ad una dimostrazione per induzione su σ della proprieta' che $(M_1^{(l)}[\ldots,\nabla^{(f)}z^{(f)},\ldots]$, $M_2^{(l)}[\ldots,\nabla^{(f)}z^{(f)},\ldots])$ continua ad essere una catena associata a $(M_1^{(0)}[\ldots,\nabla^{(f)}z^{(f)},\ldots]$, $M_2^{(0)}[\ldots,\nabla^{(f)}z^{(f)},\ldots])$. Poiche' il passaggio da $(N_1^{(0)},N_2^{(0)})$ alla precedente coppia avviene con operazioni ammesse dal teorema 1 il lemma 2 e' dimostrato.

Il seguente esempio mostra la necessita' della disuguaglianza fra variabili principali di una catena associata a due formule date affinche' il lemma 2 sia valido.

Esempio 2

Sia

$$N_1^{(0)} \equiv M_1^{(0)}[y_1] \equiv y_1 y_2 (\underline{y_1 y_2 y_3})$$

$$N_2^{(0)} \equiv M_2^{(0)}[y_1] \equiv y_1 y_2 (\underline{y_1 y_3 y_3})$$

Per brevita' abbiamo sottolineato $N_i^{(1)} \equiv M_i^{(1)}$ e $N_i^{(2)} \equiv M_i^{(2)}$. Si ha $\sigma = 2$ ed e' $N_1^{(0)} \neq N_2^{(0)}$, $M_1^{(2)} \not\sim M_2^{(2)}$.

Osserviamo tuttavia che

$$M_i^{(1)}[KKy_1] = N_i^{(2)} \quad \text{ma purtroppo e'} \quad M_i^{(0)}[KKy_1] = y_2$$

$$M_i^{(0)}[K^2Iy_1] = N_i^{(1)}[K^2Iy_1] \quad \text{ma purtroppo e'} \quad N_i^{(1)}[K^2Iy_1] = y_3,$$

cioe' la presenza di due variabili principali uguali in differenti coppie della catena puo' generare una certa incompatibilita' fra i selettori che si vorrebbero usare.

Per completare la dimostrazione del teorema 1 e' sufficiente dimostrare il seguente

LEMMA 3

Sia $N_1^{(0)} \neq N_2^{(0)}$ ed a $(N_1^{(0)},N_2^{(0)})$ sia associata una catena $(M_1^{(l)},M_2^{(l)})$ $l = 0,\ldots,\sigma$ rispettivamente con variabili principali

$z^{(0)},\ldots,z^{(\sigma-1)},z_i^{(\sigma)}$, $i = 1,2$, le cui componenti scriveremo

$$M_i^{(l)}[z^{(0)},\ldots,z^{(\sigma-1)},z_1^{(\sigma)},z_2^{(\sigma)}].$$

Esistono allora 3 interi h_1,h_2,h_3 sufficientemente grandi tali che, ponendo

$$\nabla_h \equiv \lambda u \lambda t_1 \ldots \lambda t_{h+1}(t_{h+1}\, u\, t_1 \ldots t_h)$$

si verifichi:

(i) Indicando con $(\underline{M}_1^{(l)},\underline{M}_2^{(l)})$ la coppia univocamente associata a $(M_1^{(l)}[\nabla_{h_3}z^{(0)},\ldots\nabla_{h_3}z^{(\sigma-1)},\nabla_{h_1}z_1^{(\sigma)},\nabla_{h_2}z_2^{(\sigma)}],M_2^{(l)}[\ldots])$ si ha che $(\underline{M}_1^{(l)},\underline{M}_2^{(l)})$ $l = 0,\ldots,\sigma$ e' una catena associata a $(M_1^{(0)}[\ldots],M_2^{(0)}[\ldots])$.

(ii) Le variabili principali $\underline{z}^{(0)},\ldots\underline{z}^{(\sigma-1)},\underline{z}^{(\sigma)}$ di $(\underline{M}_1^{(l)},\underline{M}_2^{(l)})$ sono tutte diverse fra loro e diverse da ogni $z^{(l)}$, $z_i^{(\sigma)}$.

Esempio 2 (continuazione e fine)

E' sufficiente scegliere $h_1=0$, $h_2=1$, $h_3=2$. Eseguendo le sostituzioni si ottiene

$$M_1^{(0)}[\nabla_2 y_1,\nabla_0 y_2,\nabla_1 y_3] = \lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_0 y_2)\lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_0 y_2)(\nabla_1 y_3)))$$

$$M_2^{(0)}[\nabla_2 y_1,\nabla_0 y_2,\nabla_1 y_3] = \lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_0 y_2)\lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_1 y_3)(\nabla_1 y_3)))$$

$$\underline{M}_1^{(0)} = x_1 y_1(\nabla_0 y_2)\lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_0 y_2)(\nabla_1 y_3))$$

$$\underline{M}_2^{(0)} = x_1 y_1(\nabla_0 y_2)\lambda t_3(t_3 y_1(\nabla_1 y_3)(\nabla_1 y_3))$$

$$\underline{M}_1^{(1)} = x_2 y_1 \lambda t_1(t_1 y_2)(\nabla_1 y_3)$$

$$\underline{M}_2^{(1)} = x_2 y_1 \lambda t_1 \lambda t_2(t_2 y_3 t_1)(\nabla_1 y_3)$$

$$\underline{M}_1^{(2)} = x_3 y_2$$

$$\underline{M}_2^{(2)} = x_4 y_3 x_3$$

Essendo ora tutte le variabili principali della catena di-

verse fra loro si puo' applicare il lemma 2 ottenendo

$$N_i^{(0)}[\nabla_2 y_1, \nabla_0 y_2, \nabla_1 y_3](K^3 I x_1)(K^2 K x_2)(K^2 K x_3)(K^4 I x_4) v_1 v_2 = v_i$$

ovvero

$$N_i^{(0)}[\nabla_2 y_1, \nabla_0 y_2, \nabla_1 y_3](K^2 I)(KK)(KK)(K^3 I) v_1 v_2 = v_i$$

Dimostrazione

Se ciascuna delle $M_i^{(l)}[z^{(0)}, \ldots, z_2^{(\sigma)}]$ ha la struttura della formula (2) allora $M_i^{(l)}[\nabla_{h_3} z^{(0)}, \ldots, \nabla_{h_2} z_2^{(\sigma)}]$, per h_1, h_2, h_3 sufficientemente grandi, ha la seguente struttura

$$(8) \qquad \lambda t_{g_i+1} \ldots \lambda t_{h_j+1} (t_{h_j+1} z\, Z_1^{(i)} \ldots Z_{g_i}^{(i)} t_{g_i+1} \ldots t_{h_j}) \qquad \begin{matrix} j=1,2,3 \\ i=1,2 \end{matrix}$$

dove con $Z_k^{(i)}$ si rappresenta il risultato delle sostituzioni $z^{(0)}/\nabla_{h_3} z^{(0)}, \ldots, z_2^{(\sigma)}/\nabla_{h_2} z_2^{(\sigma)}$ in $Y_k^{(i)}$.

Poiche' $M_1^{(l)} \sim M_2^{(l)}$ per $l < \sigma$, in tali formule e' $g_1 = g_2 = g$; mentre essendo $M_1^{(\sigma)} \not\sim M_2^{(\sigma)}$ puo' essere $g_1 \neq g_2$.

Possiamo indicare percio' con $g_0, g_1, \ldots g_{\sigma-1}, g_1^{(\sigma)}, g_2^{(\sigma)}$ i gradi delle $M_i^{(l)}[z^{(0)}, \ldots, z^{(\sigma)}]$. Sia $\bar{g}$ il massimo di tali gradi.

La scelta $h_1 = h_2 = h_3 = \bar{g}$ garantisce che le $\underline{z}^{(0)}, \ldots, \underline{z}^{(\sigma-1)}$ nelle $\underline{M}_i^{(l)}$ siano diverse fra loro e diverse da ogni $z^{(0)}, \ldots, z_1^{(\sigma)}, z_2^{(\sigma)}$; non garantisce pero' $\underline{z}_1^{(\sigma)} \neq \underline{z}_2^{(\sigma)}$ nel caso in cui sia $g_1^{(\sigma)} = g_2^{(\sigma)} = g^{(\sigma)}$ (caso dell'esempio 2).

Una semplice ispezione della (8) permette di asserire

$$h_1 - g^{(\sigma)} \neq h_2 - g^{(\sigma)} \longrightarrow \underline{z}_1^{(\sigma)} \neq \underline{z}_2^{(\sigma)}$$

percio' in questo caso e' sufficiente scegliere

$$h_1 = h_3 = \bar{g} \quad , \quad h_2 = \bar{g} + 1 \, .$$

Si noti che la soluzione dell'esempio 2 non e' valida in generale perche' potrebbe essere $z_1^{(\sigma)}$ o $z_2^{(\sigma)}$ uguale a qualche $z^{(l)}$ e $g_l = \bar{g}$.

Abbiamo quindi mostrato che $\underline{z}_1^{(\sigma)} \neq \underline{z}_2^{(\sigma)}$ e che le $\underline{z}$ sono tutte diverse fra loro e diverse dalle $z^{(0)}, \ldots, z_1^{(\sigma)}, z_2^{(\sigma)}$. In particolare e' anche $\underline{M}_1^{(\sigma)} \not\sim \underline{M}_2^{(\sigma)}$. Esaminando la (8) si vede che $\underline{M}_1^{(l)} \sim \underline{M}_2^{(l)}$ per $l = 0, \ldots, \sigma-1$.

Un ragionamento simile a quello effettuato per la dimostrazione del lemma 2 permette di dedurre $\underline{M}_1^{(\sigma-1)} \neq \underline{M}_2^{(\sigma-1)}$ da $\underline{M}_1^{(\sigma)} \neq \underline{M}_2^{(\sigma)}$ e quindi per induzione su σ che $\left(\underline{M}_1^{(l)}, \underline{M}_2^{(l)}\right)$ e' una catena associata a $\left(M_1^{(0)}[\nabla_{h_3} z^{(0)}, \ldots, \nabla_{h_2} z_2^{(\sigma)}], M_2^{(0)}[\ldots]\right)$. Poiche' il passaggio da $(N_1^{(0)}, N_2^{(0)})$ alla coppia appena scritta avviene con operazioni ammesse dal teorema 1, il lemma 3 e' dimostrato in quanto e' ridotto al lemma 2, ed in conseguenza anche il teorema 1 risulta dimostrato.

Il metodo di dimostrazione per il teorema 1 e' costruttivo, percio' suggerisce di per se' un algoritmo per la costruzione delle formule.

L'algoritmo suggerito pero' non e' il piu' efficiente.

Diamo ora qualche indicazione supplementare che non si e' voluta includere nella dimostrazione per non complicarla ulteriormente.

Mentre non sembra possibile migliorare i risultati dei lemmi 1 e 2, per quanto riguarda il lemma 3 e' chiaro che una trasformazione ∇_h e' indispensabile se esiste una classe di variabili $z^{(l)}$ uguali fra loro, e soltanto nel caso che, come nell'esempio 2, avvenga che esistano due o piu' selettori incompatibili fra loro. Per esempio nessuna trasformazione ∇_h e' necessaria per

$$N_1 = \lambda x(x(x(xy_1)))$$

$$N_2 = \lambda x(x(xy_2))$$

in quanto $N_i[KKy_1, K^2 I y_2] I v_1 v_2 = v_i$, mentre nel caso

$$N_1 = \lambda x \lambda y(x(x(xy))) = \underline{3}$$

$$N_2 = \lambda x \lambda y(x(xy)) = \underline{2}$$

e' sufficiente la trasformazione ∇_0 (mentre la teoria indica ∇_1):

$$N_i(\nabla_0 I)(K^3 I)(K v_1) v_2 = v_i$$

Si vede da questi esempi che il lemma 3 e' suscettibile di

qualche miglioramento, relativamente all'efficienza dell'algoritmo associato.

Ulteriori sviluppi del teorema 1 e del corollario 1

Il metodo di dimostrazione del teorema 1 permette di dimostrare facilmente il seguente

COROLLARIO 2

Per ogni combinatore $F \in \mathcal{N}^{\rho}$ se y occorre in F allora esistono 2 combinatori Δ e ∇ tali che

$$\Delta \circ F \circ \nabla = I$$

ed e'

$$\Delta \equiv \langle G_1, \ldots, G_s \rangle \qquad G_j \equiv K^{a_j} K^{b_j} \qquad \nabla \equiv K^g$$

dove a_j, b_j, g, s interi $\geqslant 0$.

Dimostrazione

Sia

$$N_1[y_1, y_2] \equiv F y_1$$

$$N_2[y_1, y_2] \equiv F y_2$$

E'ovviamente $N_1 \neq N_2$, $N_1 \sim N_2$ ed esiste una catena $\left(M_1^{(l)}, M_2^{(l)}\right)$ $l = 0, \ldots, \sigma$ con $M_1^{(\sigma)} \not\sim M_2^{(\sigma)}$. E'pressoche' ovvio che $M_i^{(\sigma)}$ ha la forma

$$M_i^{(\sigma)}[y_1, y_2] = y_i Y_1 \ldots Y_g$$

e che le y_i non coincidono con nessuna delle variabili principali di $M_i^{(0)}, \ldots, M_i^{(\sigma-1)}$.

Si ha percio'

$$M_i^{(\sigma)}[K^g y_1, K^g y_2] = y_i$$

da cui applicando il teorema 1 ed il corollario 1 per quanto riguarda il passaggio da N_i a $M_i^{(\sigma)}$ si puo' scrivere

$$N_i[K^g y_1, K^g y_2] G_1 \ldots G_s = y_i$$

ovvero tornando alla scrittura originale

$$F(K^g y) G_1 \ldots G_s = y \tag{9}$$

Ora dal corollario 1 noi sappiamo che le G_j sono combinatori, dalla dimostrazione del teorema 1 risulta che e' $G_j = I = K^0 K^0$ oppure e' un selettore della forma $K^a K^b$. La (9) si puo' riscrivere

$$\langle G_1, \ldots, G_s \rangle (F(K^g y)) = y$$

da cui astraendo rispetto a y ed introducendo l'operatore di composizione si ottiene

$$\langle G_1, \ldots, G_s \rangle \circ F \circ K^g = I$$

che dimostra il corollario.

Il teorema 1 ed i suoi corollari possono dare alcune informazioni sulla struttura algebrica dei combinatori a prescindere dal fatto che essi posseggano o no forma normale.

Infatti la dimostrazione del teorema 1 dipende essenzialmente dall'esistenza della catena $(M_1^{(l)}, M_2^{(l)})$ per formule normali diverse fra loro. Per l'esistenza della catena e' sufficiente ma non necessario che le formule di partenza siano normali. Basta pensare al fatto che ogni formula cancellata dal procedimento potrebbe non possedere forma normale senza per questo influire sul risultato finale. Mostriamo ora un altro risultato su combinatori non necessariamente possedenti forma normale.

COROLLARIO 3

Siano X, c_1, c_2 combinatori.

Se $Xc_1 \neq Xc_2$ e tali formule ammettono entrambe forma normale, esiste almeno un terzo combinatore c tale che

$$Xc \neq Xc_1 \quad , \quad Xc \neq Xc_2$$

Dimostrazione

Dal corollario 1 consegue l'esistenza di Δ tale che

$$\Delta(Xc_1) = c_2$$

$$\Delta(Xc_2) = c_1$$

Sia $b = \theta(X \circ \Delta)$ dove per θ vale la proprieta' $\theta x = x(\theta x)$.
Si ha percio'

$$b = X(\Delta(\theta(X \circ \Delta))) = X(\Delta b).$$

Ora se fosse $b = Xc_1$ si avrebbe

$$Xc_1 = X(\Delta(Xc_1)) = Xc_2$$

in contraddizione con l'ipotesi; e se fosse $b = Xc_2$ si avrebbe

$$Xc_2 = X(\Delta(Xc_2)) = Xc_1$$

pure in contraddizione; percio' $b \neq Xc_1$, $b \neq Xc_2$. Scegliendo ora $c = \Delta b$ la tesi consegue.

BIBLIOGRAFIA

[1] Church, A. "The calculi of lambda-conversion", Ann. Math. Stud. N.6, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1941 (Ristampa 1951).

[2] Rosenbloom, P. "The elements of mathematical logic", New York: Dover Press, 1950.

[3] Curry, J.B. e Feys, R. "Combinatory logic, Volume I", Amsterdam: North Holland, 1958.

[4] Böhm, C e Gross, W. "Introduction to the CUCH" in: "Automata theory" (pag.35-65) editor E.R.Caianiello, Academic Press, 1966.

[5] Böhm, C. "The CUCH as a formal and description language" in: "Formal languages description Languages for Computer Programming" (pag.179-197) editor T.B. Steel, Jr., Amsterdam: North Holland, 1966.

Sia $b = \theta(X \circ \Delta)$ dove per θ vale la proprieta' $\theta x = x(\theta x)$.
Si ha percio'

$$b = X(\Delta(\theta(X \circ \Delta))) = X(\Delta b).$$

Ora se fosse $b = Xc_1$ si avrebbe

$$Xc_1 = X(\Delta(Xc_1)) = Xc_2$$

in contraddizione con l'ipotesi; e se fosse $b = Xc_2$ si avrebbe

$$Xc_2 = X(\Delta(Xc_2)) = Xc_1$$

pure in contraddizione; percio' $b \neq Xc_1$, $b \neq Xc_2$. Scegliendo ora $c = \Delta b$ la tesi consegue.

BIBLIOGRAFIA

[1] Church, A. "The calculi of lambda-conversion", Ann. Math. Stud. N.6, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1941 (Ristampa 1951).

[2] Rosenbloom, P. "The elements of mathematical logic", New York: Dover Press, 1950.

[3] Curry, J.B. e Feys, R. "Combinatory logic, Volume I", Amsterdam: North Holland, 1958.

[4] Böhm, C e Gross, W. "Introduction to the CUCH" in: "Automata theory" (pag.35-65) editor E.R.Caianiello, Academic Press, 1966.

[5] Böhm, C. "The CUCH as a formal and description language" in: "Formal languages description Languages for Computer Programming" (pag.179-197) editor T.B. Steel, Jr., Amsterdam: North Holland, 1966.