

DE L'INTRICATION DES PARTICULES IDENTIQUES

PIERRE MARTIN-DUSSAUD

Cet article met en évidence une subtilité du formalisme de la physique quantique. Après avoir montré par l'exemple l'existence d'une ambiguïté de notation, on revient sur les notions d'intrication et sur le postulat de symétrisation des particules identiques. On explique alors ce que signifie l'intrication pour des particules identiques. Enfin on montre qu'il n'est pas toujours nécessaire de symétriser ou d'antisymétriser les fonctions d'onde de particules identiques.

1. EXPÉRIENCE INTRODUCTIVE

C'est au cours d'un stage de L3, réalisé au LPMC¹ de Nice sur le thème "Intrication en polarisation et interférences à deux photons", que le problème que je vais vous exposer et tenter de résoudre m'est apparu. Je vous expose donc le problème tel qu'il s'est présenté, à travers un cas particulier, en laissant volontairement certaines imprécisions contre lesquelles je veux précisément mettre en garde. À la fin de l'article nous reviendrons sur cet exemple et nous montrerons où le formalisme pêche.

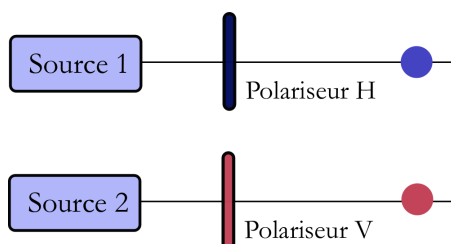


Fig. 1 Deux sources de photons polarisés indépendantes.

Considérons deux sources indépendantes de photons (Cf. Figure 1). On positionne à la sortie de chacune d'entre elles un polariseur. Pour l'une le polariseur est orienté horizontalement, pour l'autre verticalement. On s'intéresse ensuite à un système constitué d'un photon sortant de chaque voie du dispositif. L'état du système peut alors s'écrire

$$|H, V\rangle = |H\rangle \otimes |V\rangle, \quad (1)$$

et signifie que le photon issu de la première source est polarisé horizontalement et que le photon de la seconde source est polarisé verticalement. Or si l'on se souvient de ses cours de physique quantique (de M1), le vecteur d'état

d'un système de particules identiques doit être symétrique ou antisymétrique sous l'échange des particules. Dans le cas de photons, qui sont des bosons, il faut symétriser le vecteur d'état, en l'occurrence $|H, V\rangle$ qui n'est pas un état symétrique. Naïvement, on serait donc tenté d'écrire que le vecteur d'onde de nos deux photons est

$$(|H, V\rangle + |V, H\rangle)/\sqrt{2}. \quad (2)$$

Mais cet état semble être un état intriqué alors que l'on ne voit pas de raison pour laquelle les deux photons, étant issus de sources indépendantes éventuellement très éloignées l'une de l'autre, devraient être intriqués.

Pour résoudre l'apparent paradoxe qui vient de se présenter à nous, il est alors légitime de se poser les deux questions suivantes :

- Deux particules identiques sont-elles toujours intriquées ?
- Faut-il toujours symétriser les vecteurs d'onde d'un système de particules identiques ?

Nous allons dans la suite de cet article répondre à ces deux questions. Pour cela, il nous faut revenir sur les notions d'intrication et de symétrisation en tâchant d'être précis dans l'utilisation des concepts mis en jeu.

2. RAPPEL SUR L'INTRICATION

Considérons deux systèmes physiques différents \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 (par exemple un photon et un électron). D'après les postulats de la physique quantique on peut associer à chacun de ces systèmes un espace de Hilbert, respectivement noté \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , dont chaque vecteur de norme 1 décrit, à une phase près, un état possible du système. Au système total $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ est alors associé l'espace de Hilbert tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ (question laissée au lecteur : pourquoi ?). Si (u_i) et (v_i) sont respectivement des bases orthonormales de \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Alors $(u_i \otimes v_j)$ est une base de \mathcal{H} .

1. Laboratoire de Physique de la Matière Condensée.

Le vecteur² $u_1v_1 \in \mathcal{H}$ est dit *factorisé* car c'est le produit tensoriel d'un vecteur de \mathcal{H}_1 et d'un vecteur de \mathcal{H}_2 . En revanche le vecteur $(u_1v_1 + u_2v_2)/\sqrt{2}$ n'est pas un état factorisé car on ne peut pas l'écrire comme produit tensoriel d'un vecteur de \mathcal{H}_1 et d'un vecteur de \mathcal{H}_2 . Pour le voir, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un vecteur $(\sum_i \alpha_i u_i) \in \mathcal{H}_1$ et $(\sum_j \beta_j v_j) \in \mathcal{H}_2$ avec $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ tel que l'on puisse écrire :

$$\begin{aligned} (u_1v_1 + u_2v_2)/\sqrt{2} &= \left(\sum_i \alpha_i u_i\right) \left(\sum_j \beta_j v_j\right) \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \beta_j u_i v_j \end{aligned}$$

Comme $(u_i v_j)$ est une base de \mathcal{H} , on peut identifier terme à terme les deux membres de l'équation. On trouve en particulier trois conditions $\alpha_1 \beta_1 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_2 \beta_2 = 1/\sqrt{2}$ et $\alpha_1 \beta_2 = 0$. La troisième de ces conditions contredit les deux autres, ce qui termine la démonstration.

Ainsi $(u_1v_1 + u_2v_2)/\sqrt{2}$ n'est pas un état factorisé, on dit que c'est un état *intriqué*.

L'intrication est un phénomène tout-à-fait remarquable de la physique quantique. Le fait qu'il ne soit pas possible d'attribuer d'états individuels aux sous-systèmes d'un système intriqué n'a pas d'équivalent en mécanique classique.

Dans cette section nous avons considéré que les deux systèmes intriqués étaient différents. Nous allons maintenant traiter le cas des particules identiques et pour cela nous devons rappeler le postulat de symétrisation.

3. LE POSTULAT DE SYMÉTRISATION

On dira que deux systèmes physiques sont *identiques* s'ils possèdent les mêmes propriétés intrinsèques. On peut imaginer par exemple le cas idéal³ de deux boules de billard si ressemblantes qu'aucune expérience (mesure de masse, densité, élasticité, couleur ...) ne permettrait de les différencier. En fait, pour trouver des systèmes physiques parfaitement identiques, il faut s'intéresser aux constituants élémentaires de la matière. Ainsi deux électrons sont parfaitement identiques car ils partagent exactement les mêmes propriétés intrinsèques comme la masse, la charge et le spin. En fait ces propriétés *définissent* l'électron.

Cependant, deux objets macroscopiques, même identiques, sont toujours *discernables*, c'est-à-dire qu'ils ne sont jamais spatialement confondus, ils occupent des positions spatio-temporelles différentes qui permettent de les distinguer en dépit de leur identité intrinsèque.

En physique quantique, les choses se corsent un peu. Deux particules identiques ne sont plus nécessairement discernables car les positions spatiales ne sont plus que des observables soumises au principe d'incertitude.

Dans une expérience de diffusion comme celle représentée sur la Figure 2 il n'est plus possible de dire si la par-

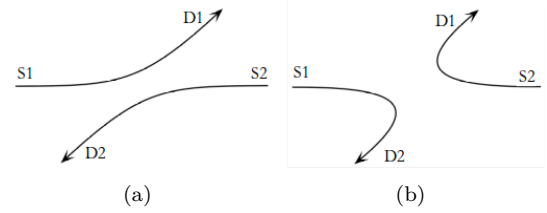


Fig. 2 Deux configurations possibles lors d'un processus de diffusion.

ticule détectée en D1 provient de la source S1 ou S2, car lors de l'interaction les particules sont devenues indiscernables. Dans la même expérience classique, réalisée avec des boules de billard identiques, la trajectoire des boules est définie à chaque instant et permet donc de connaître la provenance des boules qui demeurent discernables à tout instant.

L'existence de particules identiques a des conséquences fortes sur les vecteurs d'état qui les décrivent. Si un système est composé de particules identiques, la permutation (c'est-à-dire l'échange de numérotation) de deux particules ne modifient pas le système et le vecteur d'onde le décrivant doit donc être le même à une phase près. Comme l'opérateur de permutation \hat{U} vérifie la relation $\hat{U}^2 = I$, cette phase ne peut être qu'égal à 0 ou π . On en conclut alors le postulat de symétrisation dont on donne ici la formulation trouvée dans le livre de J. Dalibard et J-L. Basdevant [1] :

Les seuls vecteurs d'état physiquement acceptables pour un système de deux particules identiques sont symétriques ou antisymétriques par permutation des deux particules.

On trouve essentiellement la même formulation dans d'autres livres. Les particules pour lesquelles les vecteurs d'état sont symétriques sont appelées *bosons*. Dans le cas antisymétrique on parle de *fermions*.

Considérons un système de deux particules identiques. Si \mathcal{H} est l'espace de Hilbert associé à une particule, l'espace de Hilbert associé aux deux est $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Dans le cas de deux bosons, seuls les vecteurs symétriques de \mathcal{H}^2 sont physiquement acceptables, c'est-à-dire pertinents pour la description physique du système. Par exemple, l'état u_1u_1 est symétrique mais pas l'état u_1u_2 car $u_1u_2 \neq u_2u_1$. Pour décrire un système de deux bosons avec un boson dans l'état u_1 et un boson dans l'état u_2 , il faut utiliser l'état $(u_1u_2 + u_2u_1)/\sqrt{2}$ qui est bien symétrique sous l'échange des indices 1 et 2.

Mais on montre facilement, en procédant comme dans la section 2, qu'un tel état n'est pas factorisable⁴. Conformément à la dénomination employée précédemment pour des particules non-identiques, nous devrions conclure que l'état $(u_1u_2 + u_2u_1)/\sqrt{2}$ est un état intriqué, d'où nous tirerions, en généralisant que tout système de particules identiques est intriqué. Mais nous dirons pourtant que *cet état n'est pas un état intriqué* car cette forme apparente

2. On sous-entend le symbole \otimes du produit tensoriel. Il faut donc garder en tête que ce produit implicite est non-commutatif.

3. En pratique, deux systèmes physiques macroscopiques ne sont jamais parfaitement identiques. Deux vrais jumeaux présentent toujours certaines différences, deux pièces de un euro tout droit sorties de la fonderie diffèrent aussi par des détails subtils et que l'on ne remarquera par forcément à l'œil.

4. La démonstration de la section 2 a été faite dans le cas de particules non-identiques avec des bases d'espaces de Hilbert différentes, mais elle fonctionne toujours si les particules sont les mêmes et les bases de l'espace de Hilbert aussi.

d'intrication ne présente pas les caractéristiques propres aux phénomènes si particuliers de l'intrication. Le cas des particules identiques nous oblige donc à préciser ce que nous voulons dire par intrication, c'est ce que nous faisons dans la prochaine section.

4. L'INTRICATION DE PARTICULES IDENTIQUES

Dans le cas de particules non-identiques, nous avons dit que l'état $(u_1v_2 + u_2v_1)/\sqrt{2}$ était un état intriqué, car non-factorisable. La propriété intéressante d'un tel système est qu'il n'est pas possible d'attribuer un état individuel à l'une des deux particules. Parler de l'état de la particule 1 indépendamment de la particule 2, *n'a pas de sens*. L'information disponible sur l'une des deux particules est indissociable de l'information disponible sur l'autre.

Dans le cas de particules identiques, il n'en est plus ainsi. Les bases (u_i) et (v_i) sont alors les mêmes. L'état devient $(u_1u_2 + u_2u_1)/\sqrt{2}$. Certes, il n'est toujours pas possible de dire si la particule 1 est dans l'état u_1 ou dans l'état u_2 , mais en revanche on peut dire que *l'une des particules est dans l'état u_1 et l'autre dans l'état u_2* . Cette affirmation a du sens et constitue une information dont on dispose sur le système que l'on n'avait pas dans le cas de particules non-identiques.

Autrement dit, il est sensé de parler de l'état, et donc des propriétés physiques, de la particule 1, même s'il est impossible de dire *quel est cet état* (u_1 ou u_2), ou quelles sont ses propriétés physiques. Ce constat permet d'introduire naturellement la définition suivante.

Conformément à l'article [2], on dira que *deux particules identiques ne sont pas intriquées si chaque particule possède un ensemble complet de propriétés*. Il convient alors de préciser ce que nous voulons dire par "posséder un ensemble complet de propriétés".

Pour cela nous allons d'abord revenir sur l'interprétation probabiliste de la physique quantique dans le cas d'une particule. Soit $\psi \in \mathcal{H}$ décrivant l'état d'une particule et P un projecteur unidimensionnel de \mathcal{H} . Il existe $\phi \in \mathcal{H}$ tel que $P = |\phi\rangle\langle\phi|$. La quantité $\langle\psi|P|\psi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$ est la probabilité que la particule soit observée dans l'état ϕ (à l'issue de la mesure d'une observable pour laquelle ϕ est un vecteur propre).

Appliquons cette interprétation probabiliste au cas à deux particules. Soit $\psi \in \mathcal{H}^2$. Soit P_1 et P_2 deux projecteurs unidimensionnels de \mathcal{H} . Il existe $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$ tels que $P_1 = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$ et $P_2 = |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$. L'opérateur $P_1 \otimes P_2$ est un projecteur de \mathcal{H}^2 et $\langle\psi|P_1 \otimes P_2|\psi\rangle$ est la probabilité de mesurer la première particule dans l'état ϕ_1 et la deuxième dans l'état ϕ_2 .

Si $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ est un projecteur unidimensionnel de \mathcal{H} , $\langle\psi|P \otimes (I - P)|\psi\rangle$ est la probabilité de trouver la première particule dans l'état ϕ et la deuxième particule dans un état qui lui est orthogonal.

Ainsi, suivant la même interprétation probabiliste, la quantité

$$\langle E \rangle = \langle\psi|E(P)|\psi\rangle, \quad (3)$$

avec

$$E(P) = P \otimes (I - P) + (I - P) \otimes P + P \otimes P, \quad (4)$$

est la probabilité de trouver au moins l'une des deux particules dans l'état sur lequel projette P . C'est la somme des probabilités de trouver la première dans l'état ϕ mais pas la seconde, la seconde mais pas la première, et les deux dans l'état ϕ .

On peut vérifier que $E(P)$ est une bonne observable pour notre système de deux particules en remarquant qu'elle commute avec l'opérateur de permutation,

$$\hat{U}^\dagger E(P) \hat{U} = E(P). \quad (5)$$

On dira alors que l'une des deux particules possède un ensemble complet de propriétés s'il existe un projecteur unidimensionnel P de \mathcal{H} tel que :

$$\langle\psi|E(P)|\psi\rangle = 1, \quad (6)$$

c'est-à-dire s'il existe un état $\phi \in \mathcal{H}$ tel que l'on puisse dire avec certitude que la particule 1 ou la particule 2 ou les deux particules sera (seront) trouvé(es) dans l'état ϕ à l'issue d'une mesure effectuée dans une base orthonormale contenant ϕ .

On peut montrer que l'une des deux particules possède un ensemble complet de propriétés si et seulement si les deux possèdent un ensemble complet de propriétés.

La précédente investigation nous fournit donc un critère mathématique calculatoire nous permettant de dire si un système de deux particules est dans un état intriqué ou non. L'état $\psi \in \mathcal{H}^2$ est intriqué si et seulement s'il n'existe pas de projecteur unidimensionnel P de \mathcal{H} tel que $\langle\psi|E(P)|\psi\rangle = 1$. Au passage remarquons que ce critère nous fournit un moyen de mesurer la qualité de l'intrication des deux particules.

Pour conclure cette section, appliquons le critère d'intrication à l'état $\psi = (u_1u_2 + u_2u_1)/\sqrt{2}$.

Soit $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ avec $\phi \in \mathcal{H}$. On montre après un petit calcul :

$$\begin{aligned} \langle\psi|E(P)|\psi\rangle &= |\langle\phi|u_1\rangle|^2 + |\langle\phi|u_2\rangle|^2 \\ &\quad - 2|\langle\phi|u_1\rangle\langle\phi|u_2\rangle|^2. \end{aligned}$$

Pour $\phi = u_1$, on trouve $\langle\psi|E(P)|\psi\rangle = 1$ ce qui montre que l'état ψ n'est pas intriqué. Cela traduit le fait que si l'on mesure l'état $(u_1u_2 + u_2u_1)/\sqrt{2}$ dans la base (u_i) la particule 1 ou la particule 2 sera trouvée dans l'état u_1 .

On peut en fait montrer qu'un état n'est pas intriqué si et seulement s'il peut être obtenu par symétrisation ou anti-symétrisation d'un état factorisé [2].

5. EST-IL TOUJOURS NÉCESSAIRE DE SYMÉTRISER LA FONCTION D'ONDE ?

Dans cette section nous allons voir, qu'en fait, il n'est pas toujours nécessaire de symétriser la fonction d'onde pour des particules identiques. Ce qui suit est inspiré d'un passage du livre de Messiah [3].

Considérons deux photons qui se situent, avec certitude, dans deux régions disjointes de l'espace. Si les deux photons n'étaient pas des particules identiques on pourrait assigner à chacun d'eux une fonction d'onde ϕ_1 et ϕ_2 et l'ensemble serait décrit par la fonction d'onde $\phi_1\phi_2$. Comme

les deux photons sont en fait des bosons identiques, la fonction d'onde totale est $\sqrt{2}S\phi_1\phi_2 = (\phi_1\phi_2 + \phi_2\phi_1)/\sqrt{2}$ où S est l'opérateur de symétrisation⁵. Supposons qu'un photon, nommé astucieusement photon 1, se trouve dans la région de l'espace \mathcal{D}_1 et qu'un autre photon, nommé tout aussi astucieusement photon 2, se trouve dans la région \mathcal{D}_2 de sorte que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$.

Soit (θ_2^i) une base orthonormale complète de fonctions d'onde s'annulant en dehors de \mathcal{D}_2 . Comme ϕ_2 s'annule en dehors de \mathcal{D}_2 , on peut écrire :

$$\phi_2 = \sum_i \theta_2^i \langle \theta_2^i | \phi_2 \rangle. \quad (7)$$

Nous désirons connaître la probabilité p pour que le photon de la région 1 soit dans l'état χ_1 . Nous ne considérons donc que des observables locales à une particule.

Si les photons 1 et 2 n'étaient pas des particules identiques :

$$\begin{aligned} p &= \sum_i |\langle \chi_1 \theta_2^i | \phi_1 \phi_2 \rangle|^2 \\ &= |\langle \chi_1 | \phi_1 \rangle|^2 \sum_i |\langle \theta_2^i | \phi_2 \rangle|^2 \\ &= |\langle \chi_1 | \phi_1 \rangle|^2. \end{aligned}$$

Mais les photons 1 et 2 sont des particules identiques :

$$\begin{aligned} p &= \sum_i |\langle \sqrt{2}S\chi_1\theta_2^i | \sqrt{2}S\phi_1\phi_2 \rangle|^2 \\ &= 2 \sum_i |\langle \chi_1\theta_2^i | S^\dagger S \sqrt{2} | \phi_1\phi_2 \rangle|^2 \\ &= 2 \sum_i |\langle \chi_1\theta_2^i | \sqrt{2}S | \phi_1\phi_2 \rangle|^2 \\ &= 2 \sum_i \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \chi_1\theta_2^i | \phi_1\phi_2 \rangle + \langle \chi_1\theta_2^i | \phi_2\phi_1 \rangle) \right|^2 \\ &= \sum_i |\langle \chi_1\theta_2^i | \phi_1\phi_2 \rangle|^2 \\ &= |\langle \chi_1 | \phi_1 \rangle|^2. \end{aligned}$$

On a utilisé que pour tout i , $\langle \theta_2^i | \phi_1 \rangle = 0$ qui est dû au fait que θ_2^i s'annule partout sauf sur \mathcal{D}_2 et que ϕ_1 s'annule sur \mathcal{D}_2 .

Cette démonstration se généralise pour un nombre quelconque de bosons séparés spatialement ainsi que pour des fermions.

On voit donc que pour calculer des probabilités de transitions pour des particules situées dans des zones différentes de l'espace, il n'est pas nécessaire de symétriser la fonction d'onde. Autrement dit, tout se passe comme si le fait de savoir que les particules identiques sont dans des domaines d'espace disjoints rendait les particules non identiques. Si l'on se réfère à la dénomination développée dans la Section 3, il est plus correct de dire que *des particules identiques dans des domaines de l'espace différents sont discernables et qu'il n'est nécessaire d'appliquer le postulat de symétrisation que pour des particules indiscernables*.

5. Rappelons que S est un projecteur et donc un opérateur hermitien. Le facteur $\sqrt{2}$ devant l'opérateur S provient de la normalisation de la fonction d'onde totale.

Le fait qu'il n'est pas toujours nécessaire de symétriser la fonction d'onde est intéressant car il nous ramène au cas classique. En effet des particules quantiques localisées, avec certitude, dans des domaines de l'espace différents, redeviennent en partie classique car discernables. Le postulat de symétrisation n'a plus besoin de s'appliquer. En somme, on peut dire qu'il est suffisant de symétriser (ou anti-symétriser dans le cas des fermions) la fonction d'onde de particules *indiscernables*.

6. RÉOLUTION DU PROBLÈME INITIAL

À la lumière de notre précédente analyse, il convient désormais d'expliquer l'origine de la confusion dans l'exemple introductif.

Remarquons tout d'abord que les notations de la Section 1 ne spécifient pas la voie dans laquelle se trouve le photon. Or c'est une information que nous connaissons sur le système. En notant $H1$ et $H2$ (resp. $V1$ et $V2$) les états d'un photon polarisé horizontalement (resp. verticalement) et situé dans les voies respectivement 1 et 2, l'état des deux particules, anciennement écrit $|H, V\rangle$ s'écrit en fait :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H1, V2\rangle + |V2, H1\rangle) \quad (8)$$

Cet état est bien symétrique, et nullement intriqué bien qu'il ne soit pas factorisable. Mais comme les photons sont dans des domaines de l'espace disjoints, on peut, d'après la section précédente, ne pas symétriser le vecteur d'état qui s'écrit alors seulement :

$$|H1, V2\rangle \quad (9)$$

En fait, le photon dans la voie 1 et le photon dans la voie 2 sont discernables. Tout se passe comme si on avait affaire à deux types de particules différentes "photon voie 1" et "photon voie 2". Il n'est alors plus nécessaire de conserver les numéros de voies et l'état s'écrit :

$$|H, V\rangle \quad (10)$$

comme initialement.

Derrière cette notation se cache donc l'hypothèse que les deux photons sont dans des voies différentes.⁶

L'état

$$\frac{|H, V\rangle + |V, H\rangle}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

est dans ce cas bel et bien un état intriqué, dont l'écriture symétrique est :

$$\frac{1}{2}(|H1, V2\rangle + |V2, H1\rangle + |V1, H2\rangle + |H2, V1\rangle) \quad (12)$$

Mais puisque les photons sont spatialement différenciés il n'est pas nécessaire d'utiliser la forme symétrique (12), la forme (11) suffit.

6. Les numéros de voies sont habilement masquées et rendues inutiles par le caractère non-commutatif et chiral de l'écriture.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Alexander Thomas et Louis Garbe pour les discussions fructueuses que nous avons eues à propos de l'intrication de particules identiques. Mes remerciements vont aussi à François Delduc et à Marc Magro qui ont bien voulu relire cet article.

RÉFÉRENCES

[1] Jean-Louis BASDEVANT et Jean DALIBARD. *Mécanique quantique*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2002. Chap. 16 - Particules identiques.

[2] Giancarlo GHIRARDI. "Entanglement and Properties of Composite Quantum Systems : a Conceptual and Mathematical Analysis". In : *J. Stat. Phys.* 108.49 (2002).

[3] Albert MESSIAH. *Mécanique quantique*. Dunod, 1995. Chap. XIV, p. 512–514.

□ PIERRE MARTIN-DUSSAUD
M2 Sciences de la Matière
Physique, Concepts et Applications
ENS de Lyon - Université Lyon 1
pierre.martin-dussaud@ens-lyon.fr