Journal de physique et de chimie des étudiants

Volume 1. No. 1. - Février 2016
Pages 13 - 15

Calcul du tenseur électromagnétique d'une particule chargée accélérée

Romain Pascalie

Ce petit article présente de façon détaillée le calcul du tenseur électromagnétique d'une particule chargée accélérée dans le cadre d'une formulation relativiste de l'électrodynamique.

1. Préambule

Le but de cet article est de présenter les détails du calcul, de ce fait il n'est pas facile à lire. Cependant j'ai essayé d'expliciter au maximum, ce qui, j'espère, aidera à suivre le calcul dans les meilleurs conditions. Avant d'enter dans le vif du sujet, nous allons poser quelques notations.

On notera le quadri-vecteur position dans l'espace-temps $X = (X^0, \boldsymbol{X})$. La convention que nous prenons pour la métrique est $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. On utilisera à plusieurs reprise la formule suivante :

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x_i)\right|} \tag{1}$$

où les x_i vérifient $f(x_i) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}(x_i) \neq 0$ [1].

2. Le potentiel retardé

On considère une particule chargée de charge q en mouvement accéléré. On désigne la trajectoire de la particule par $X_p(\tau)$ où τ est le temps propre et on note $u_\mu(\tau) = \frac{\mathrm{d}X_p(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$. Le courant en un point X de l'espace-temps s'écrit :

$$J_\mu(X) = cq \int d\tau u_\mu(\tau) \delta^{(4)}(X - X_p(\tau)) \tag{2}$$

On veut résoudre l'équation sur le potentiel A_μ en jauge de Lorentz : $\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = \mu_0 J_\mu$. Pour ce faire on utilise la fonction de Green retardée du d'Alembertien qui s'écrit : $D_r(X) = \frac{1}{2\pi}\delta^{(4)}(X^2)\theta(X^0)$ [1]

Le potentiel s'exprime en fonction de D_r et J_μ comme :

$$\begin{aligned} A_\mu(X) &= \mu_0 \int d^4X' D_r(X - X') J_\mu(X') \\ &= \mu_0 cq \int d\tau u_\mu(\tau) D_r(X - X_p(\tau)) \end{aligned} \tag{3}$$

À partir de cette expression nous allons déterminer le tenseur électromagnétique sous forme intégrale. Dans la suite on notera $R(\tau) = X - X_p(\tau)$, et par souci de lisibilité on ne précisera pas toujours les dépendances en τ.

3. Tenseur sous forme intégrale

On rappelle l'expression du tenseur électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4}$$

Il nous faut d'abord calculer la dérivée de la fonction de Green retardée du d'Alembertien :

$$\partial_\mu D_r(R) = \frac{1}{2\pi}\left[\partial_\mu(\delta^{(4)}(R^2))\theta(R^0) + \delta^{(4)}(R^2)\partial_\mu(\theta(R^0))\right] \tag{5}$$

Le second terme est nul car $\delta^{(4)}(R^2)$ impose $R^0 \neq 0$ mais $\partial_\mu(\theta(R^0))$ donne $\delta(R^0)$ qui est non nul pour $R^0 = 0$. On peut alors écrire la dérivée du potentiel comme :

$$\partial_\mu A_\nu = \frac{\mu_0 cq}{2\pi} \int d\tau u_\nu(\tau) \partial_\mu(\delta^{(4)}(R^2))\theta(R^0) \tag{6}$$

Or

$$\partial_\mu(\delta^{(4)}(R^2)) = \partial_\mu(R^2)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dR}^2}\frac{\mathrm{d}\delta^{(4)}(R^2)}{\mathrm{d}\tau} \tag{7}$$

Sachant que :

$$\frac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}\tau} = -2[X - X_p(\tau)]_\mu \frac{\mathrm{d}X_p(\tau)^\mu}{\mathrm{d}\tau} = -2R_\mu u^\mu \tag{8}$$

On obtient :

$$\partial_\mu(\delta^{(4)}(R^2)) = -\frac{R_\mu}{R_\alpha u^\alpha}\frac{\mathrm{d}\delta^{4)}(R^2)}{\mathrm{d}\tau} \tag{9}$$

On peut alors remplacer (9) dans (6), puis effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu &= -\frac{\mu_0 cq}{2\pi}\int d\tau \frac{R_\mu u_\nu}{R_\alpha u^\alpha}\frac{\mathrm{d}\delta^{(4)}(R^2)}{\mathrm{d}\tau}\theta(R^0) \\ &= \frac{\mu_0 cq}{2\pi}\int d\tau \delta^{(4)}(R^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{R_\mu u_\nu}{R_\alpha u^\alpha}\theta(R^0)\right) \\ &- \frac{\mu_0 cq}{2\pi}\left[\frac{R_\mu u_\nu}{R_\nu u^\nu}\delta^{(4)}(R^2)\theta(R^0)\right]_{-\infty}^{+\infty}\end{aligned} \tag{10}$$

Le second terme de l'intégration par partie est nul car la seule contribution du terme $\delta^4(R^2)\theta(R^0)$ est en $\tau = \tau^*$ qui correspond à l'intersection de la trajectoire de la particule avec le cône de lumière passé (imposé par $\theta(R^0)$) centré en X. Autrement dit τ^* est définie comme satisfaisant la condition :

$$X^0 - X_p^0(\tau^*) - |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_p(\tau^*)| = R^0(\tau^*) - |\boldsymbol{R}(\tau^*)| = 0 \tag{11}$$

De plus, le terme que l'on obtient lorsque l'on dérive $\theta(R^0)$ s'annule pour la même raison qu'à l'équation (5). Ainsi (10) se simplifie en :

$$\partial_\mu A_\nu = \mu_0 cq \int d\tau \frac{\delta^{(4)}(R^2)\theta(R^0)}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{R_\mu u_\nu}{R_\alpha u^\alpha}\right) \tag{12}$$

On reconnaît alors la fonction de Green retardée du d'Alembertien et on peut écrire de manière compacte le tenseur électromagnétique sous forme intégrale :

$$F_{\mu\nu}(X) = \mu_0 cq \int d\tau D_r(X - X_p(\tau))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{R_\alpha u^\alpha}\right)$$

4. Tenseur de champ proche et de champ lointain

Notre objectif est désormais d'obtenir une forme explicite du tenseur électromagnétique. On va montrer que celui-ci ce décompose en un champ lointain décroissant en $|\boldsymbol{R}|^{-1}$ et un champ proche décroissant en $|\boldsymbol{R}|^{-2}$.

Commençons par simplifier l'expression de la fonction de Green retardée du d'Alembertien. D'après (1) :

$$\begin{aligned}D_r(R) &= \frac{\delta(R^0 - |\boldsymbol{R}|)\theta(R^0)}{4\pi|\boldsymbol{R}|} + \frac{\delta(R^0 + |\boldsymbol{R}|)\theta(R^0)}{4\pi|\boldsymbol{R}|} \\ &= \frac{\delta(R^0 - |\boldsymbol{R}|)}{4\pi|\boldsymbol{R}|}\end{aligned} \tag{13}$$

Une fois de plus le second terme est nul puisque $\delta(R^0 + |\boldsymbol{R}|)$ impose $R^0 < 0$. Nous allons à nouveau appliquer (1) à :

$$\delta(R^0 - |\boldsymbol{R}|) = \delta(X^0 - X_p^0(\tau) - |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_p(\tau)|) = \delta(f(\tau))$$

En se rappelant de (11) on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*) &= -\frac{\mathrm{d}X_p^0}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*) + \frac{\boldsymbol{R}(\tau^*)}{|\boldsymbol{R}(\tau^*)|}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X_p}}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*) \\ &= -\frac{|\boldsymbol{R}(\tau^*)|u^0(\tau^*) - \boldsymbol{R}(\tau^*)|\boldsymbol{u}(\tau^*)|}{|\boldsymbol{R}(\tau^*)|} \\ &= -\frac{R_\nu u^\nu}{|\boldsymbol{R}|}(\tau^*)\end{aligned} \tag{14}$$

D'où la fonction de Green retardée du d'Alembertien s'écrit :

$$D_r(X - X_p(\tau)) = \frac{\delta(\tau - \tau^*)}{|R_\nu u^\nu(\tau^*)|}\frac{|\boldsymbol{R}|(\tau)}{|\boldsymbol{R}|(\tau^*)} \tag{15}$$

En particulier on peut simplifier l'expression de D_r en notant que $|R_\nu u^\nu(\tau^*)| = R_\nu u^\nu(\tau^*)$. Cela est vrai puisque $R_\nu u^\nu(\tau^*) = |\boldsymbol{R}|\gamma c - \gamma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R} = |\boldsymbol{R}|\gamma c(1 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}) > 0$ où $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$ et $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$.

Nous pouvons ensuite réécrire le tenseur électromagnétique comme :

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(X) &= \frac{\mu_0 cq}{4\pi}\frac{1}{R_\alpha u^\alpha(\tau^*)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{R_\alpha u^\alpha}\right)\Bigg|_{\tau=\tau^*} \\ &= \frac{\mu_0 cq}{4\pi}\frac{1}{R_\alpha u^\alpha(\tau^*)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*)\end{aligned} \tag{16}$$

Il ne nous reste plus qu'à développer $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tau}(\tau^*) = &\frac{1}{R_\alpha u^\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu\Big)\Bigg|_{\tau=\tau^*} \\ &- \frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{(R_\alpha u^\alpha)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(R_\alpha u^\alpha\Big)\Bigg|_{\tau=\tau^*}\end{aligned} \tag{17}$$

En notant $a_\mu = \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ et en se rappelant que $u_\alpha u^\alpha = c^2$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(R_\alpha u^\alpha\Big) &= R_\alpha a^\alpha - c^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu\Big) &= R_\mu a^\nu - R_\nu a^\mu\end{aligned}$$

En réinjectant dans (16) on obtient finalement :

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(X) &= \frac{\mu_0 c^3 q}{4\pi}\left(\frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{(R_\alpha u^\alpha)^3}\right)\Bigg|_{\tau=\tau^*} \\ &+ \frac{\mu_0 cq}{4\pi}\Bigg(\frac{R_\mu a_\nu - R_\nu a_\mu}{(R_\alpha u^\alpha)^2} \\ &- (R_\lambda a^\lambda)\frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{(R_\alpha u^\alpha)^3}\Bigg)\Bigg|_{\tau=\tau^*}\end{aligned}$$

Nous pouvons donc remarquer que le premier terme correspond au champ proche et que le deuxième terme correspond au champ lointain. Le champ proche est de type coulombien alors que le champ lointain est un champ de rayonnement provenant du mouvement accéléré de la particule.

5. Pour aller plus loin

Nous avons déterminé l'expression explicite du tenseur électromagnétique d'une particule chargée en mouvement accéléré. À partir de cette expression, il est possible de déterminer les expressions du champ électrique et du champ magnétique créé par la particule. Nous allons donner les principales étapes pour y arriver sans autant de détails que précédemment.

Le tenseur électromagnétique s'écrit sous forme matricielle en fonction des composantes du champ électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{-E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{-E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{-E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Autrement dit, les composantes du champ électrique sont liées aux coefficients du tenseur électromagnétique par la relation : $F_{0i} = \frac{E_i}{c}$. Nous connaissons l'expression des différents quadri-vecteurs et produits scalaires intervenant dans l'expression de $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} R_\alpha u^\alpha &= |\boldsymbol{R}|\gamma c(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}) \\ a^\mu &= \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\gamma c\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}(\gamma\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= (c\gamma^4\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}, c\gamma^2\dot{\boldsymbol{\beta}} + c\gamma^4\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})) \end{aligned}$$

À partir de ces expressions et après quelques lignes de calcul on obtient la forme du champ électrique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right) \\ &+ \frac{q}{4\pi c\epsilon_0 R}\left(\frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\beta}$ et R sont évalués en $\tau*$.

On peut de la même manière déterminer le champ magnétique et vérifier que $\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}}{c}$. Dans la continuité de notre démarche, il me paraît ensuite naturel d'essayer de déterminer la puissance rayonnée par la particule.

Au vu de la forme du champ électromagnétique, le vecteur de Poynting $\boldsymbol{\Pi} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}$ se décompose en trois termes : un terme en R^{-2}, un en R^{-3} et le dernier en R^{-4}. Or, lorsque l'on veut calculer la puissance rayonnée, on calcul pour R grand l'intégrale $\int dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}$ où $dS = R^2 d\Omega$. Ainsi, seul le terme en R^{-2} contribuera à la puissance rayonnée.

On peut alors simplifier le calcul de la puissance en notant que $\boldsymbol{\Pi} = c\epsilon_0\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = c\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}$ et en ne prenant en compte dans le calcul que le terme en R^{-1} (le champ lointain) dans $\boldsymbol{E}$ conformément au raisonnement effectué précédemment. Il faut cependant tenir compte du retard lors du calcul de la puissance (voir [2] ou [3]), on obtient alors :

$$P = \frac{q^2}{4\pi c\epsilon_0}\int d\Omega\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} \tag{19}$$

Dans le cas général il ne me semble pas que l'on puisse calculer cette intégrale. Cependant il est possible de simplifier la distribution angulaire du rayonnement dans deux cas particuliers : si le mouvement est uniformément accéléré ($\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$) ou si la particule est en mouvement sur un cercle ($\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$). Pour les détails de calcul voir [3].

Néanmoins, par des arguments développés dans [4] par exemple, on peut obtenir l'expression de la puissance rayonnée, appelée puissance de Lamor relativiste qui s'écrit :

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi c\epsilon_0}\gamma^6\big((\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2\big) \tag{20}$$

Remerciements

Merci à Henning Samtleben pour avoir relu cet article.

Références

[1] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens.* H&K, 2002.

[2] V. Ginzburg. *Physique Théorique et Astrophysique.* Mir, 1975.

[3] L. Landau et E. Lifchitz. *Théorie du Champ.* Mir, 1966.

[4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* Wiley, 1998.

□ Romain Pascalie
M1 Sciences de la Matière
ENS de Lyon - Université Lyon 1
romain.pascalie@ens-lyon.fr