Mélange par chaos lagrangien dans les écoulements plans

Florence Raynal, LMFA

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
CNRS/Université de Lyon
École Centrale de Lyon, Université Lyon 1, INSA Lyon

avec:

Aurélien Beuf et Philippe Carrière (LMFA)

Steve Wiggins, Université de Bristol

Qu'est-ce que le chaos ?

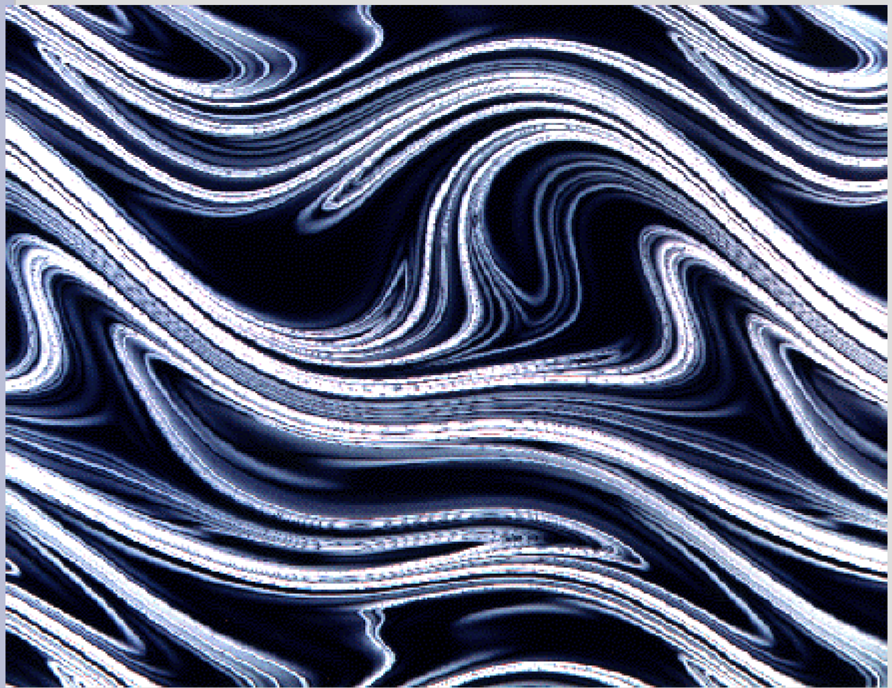
- Système dynamique déterministe :
  un point donné a un avenir connu
- Chaos = Très grande sensibilité aux conditions initiales
  - Deux points initialement très proches se séparent exponentiellement vite

➡ Propriété intéressante pour le mélange

→ 2 types de problèmes :

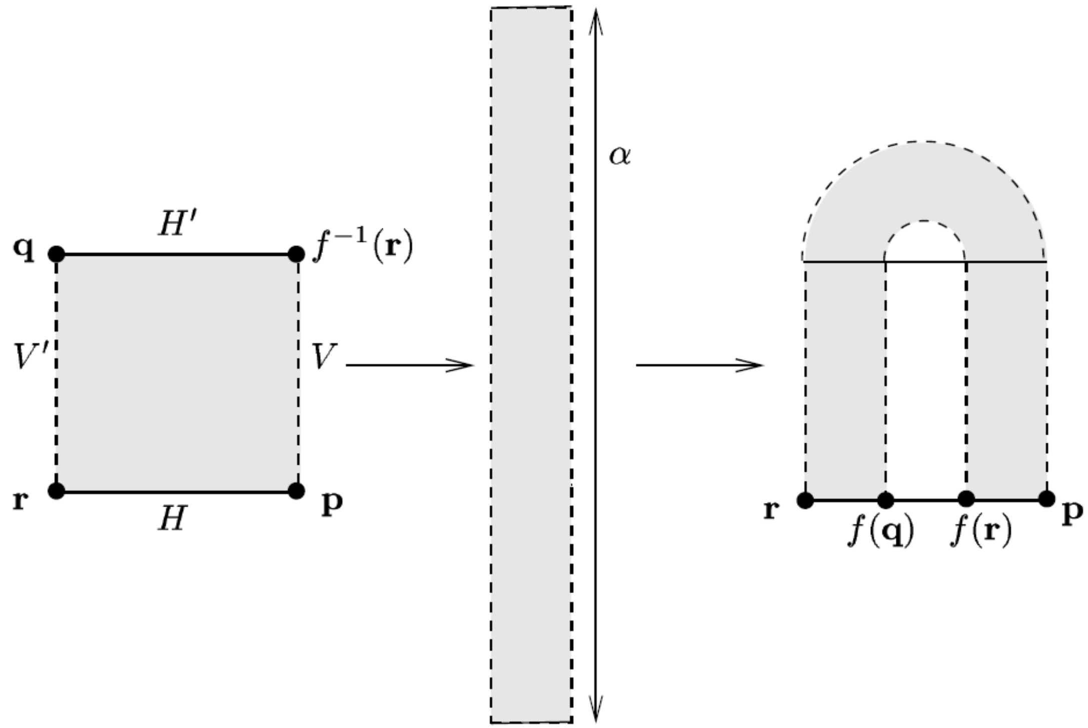
- Connaissant le champ de vitesse (donné par les lois de la nature), que peut-on en déduire sur le mélange ?
- Problème inverse : pour un problème de mélange donné, quel champ de vitesse faut-il choisir ?

Structures typiques de chaos lagrangien



→ Étirements, repliements

Application de Smale →



Les écoulements plans

- Écoulement plan incompressible :

$$\exists \Psi(x, y, t), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ψ : Fonction de courant

- Analogie avec les équations de Hamilton :

$$\exists H(q, p, t), \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

H : Hamiltonien

q : Coordonnée généralisée

p : Impulsion généralisée

(x,y) : espace des phases !

Condition nécessaire de chaos :

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t}\\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial t}\end{aligned}$$

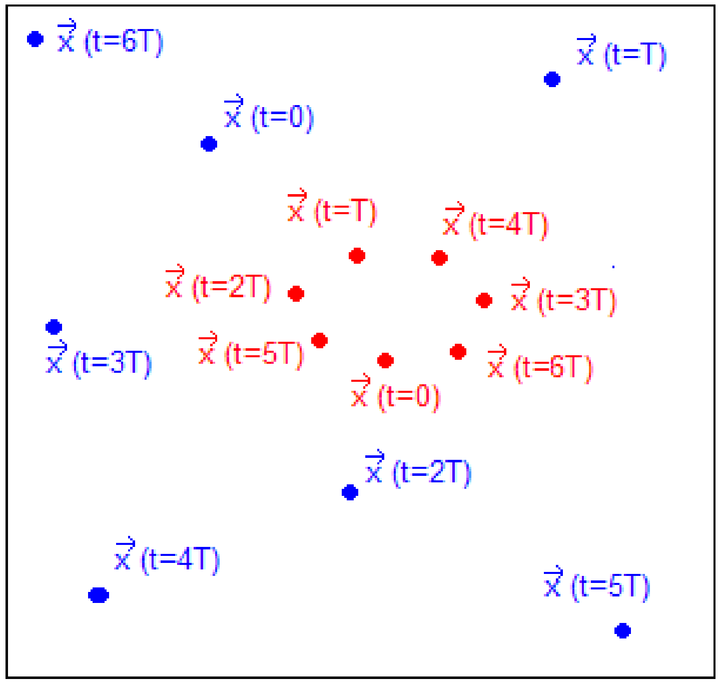
- Si l'écoulement est stationnaire :
  - Les trajectoires sont confondues avec les lignes de courant
- Nécessité d'un champ de vitesse instationnaire
  - Le plus simple : périodique en temps

Les outils du chaos :
Section de Poincaré

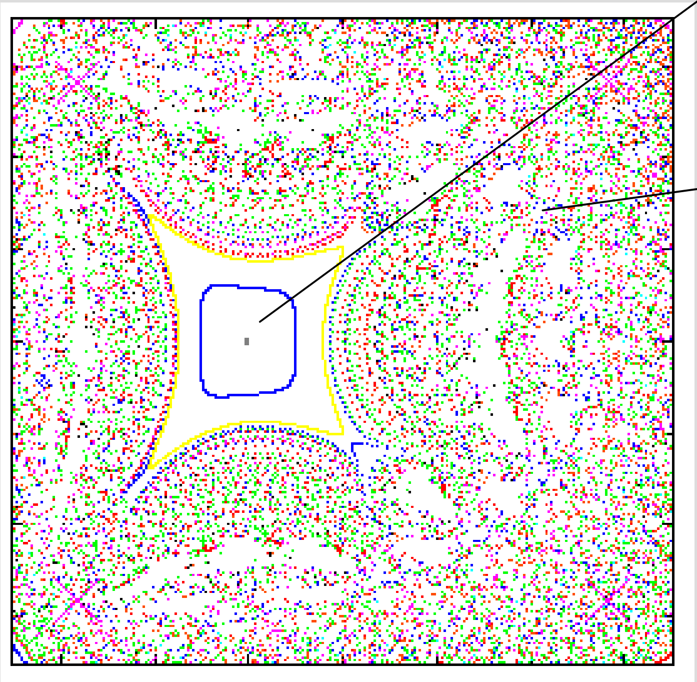
- En 3D : Plan recoupé par les trajectoires.
  - On note les points d'intersection $A_1, A_2, \ , A_n, \ldots$
- En 2D : Section en temps :
  - Toutes les périodes *T* !
- *Application de Poincaré* *f :*

$$x(t=0) \xrightarrow{f} x(t=T)$$

$$x(t=nT) \longrightarrow x(t=(n+1)T)$$



Exemple de section de Poincaré



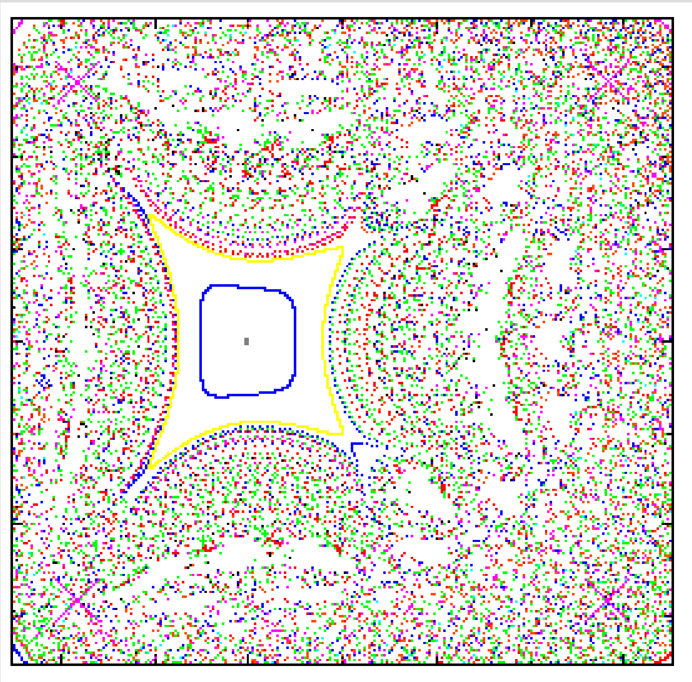
Région régulière

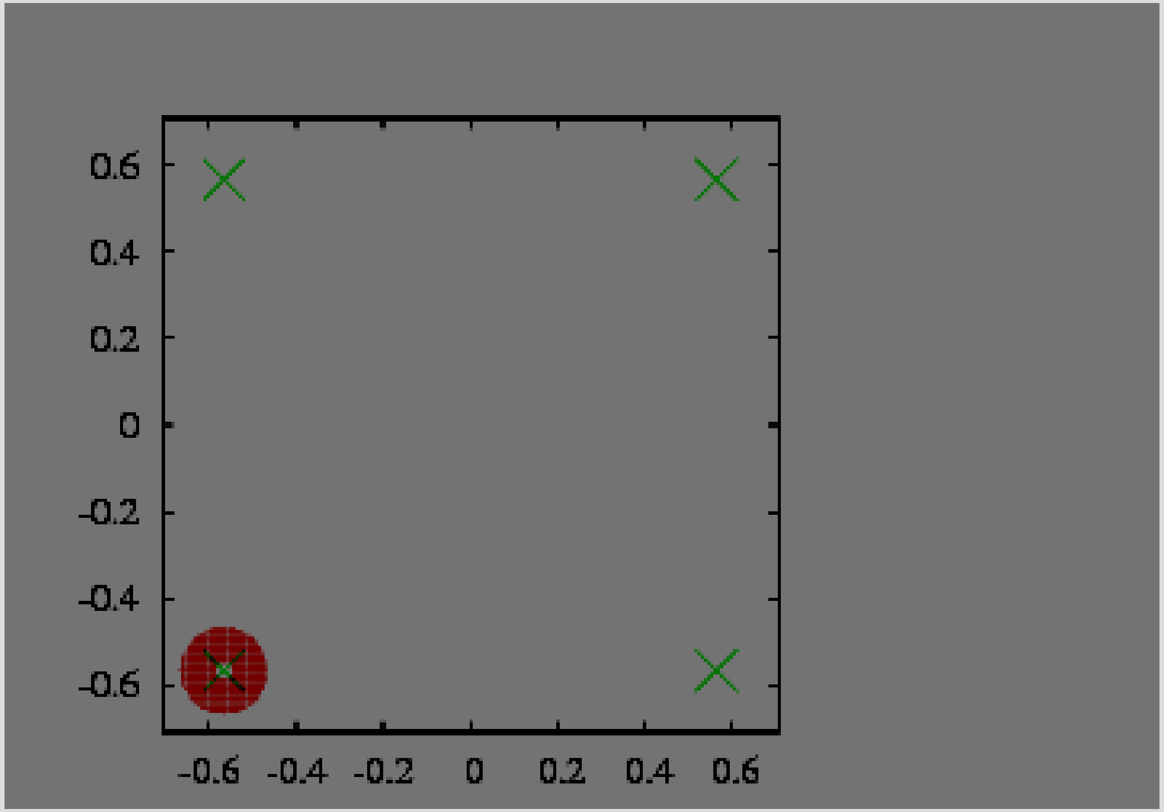
Région chaotique

(trop ?) souvent :

cohabitation de régions régulières et chaotiques

Section de Poincaré et mélange





Aurélien Beuf

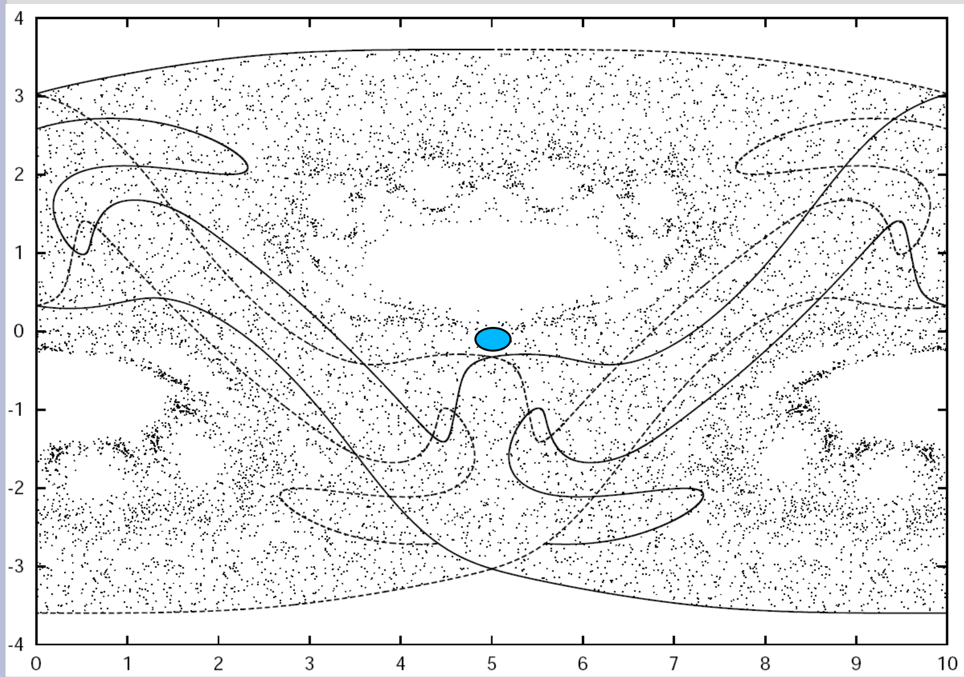
Les outils du chaos: Exposants de Lyapunov

- Définition :

$$\lambda = \frac{1}{t} \lim_{t \to \infty} \lim_{||\delta \vec{x}(t=0)|| \to 0} \ln \frac{||\delta \vec{x}(t)||}{||\delta \vec{x}(0)||}$$

→ Mesure la séparation exponentielle entre deux trajectoires infiniment proches

Exemple d'exposants de Lyapunov



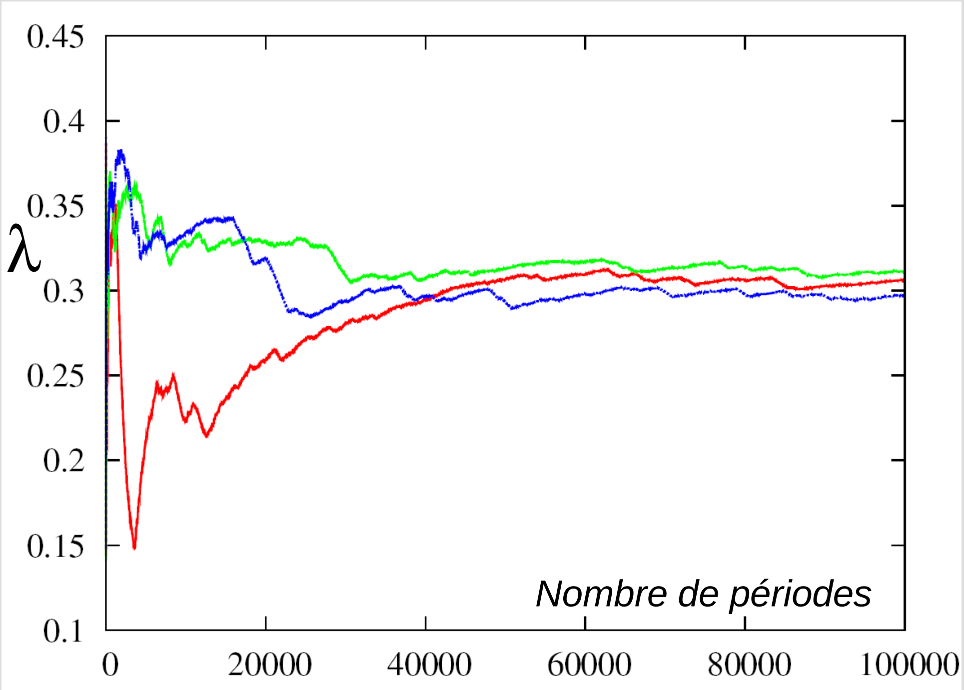
3 conditions initiales très proches

(5,0)

(5,0.005)

(5,01)

avec Steve Wiggins

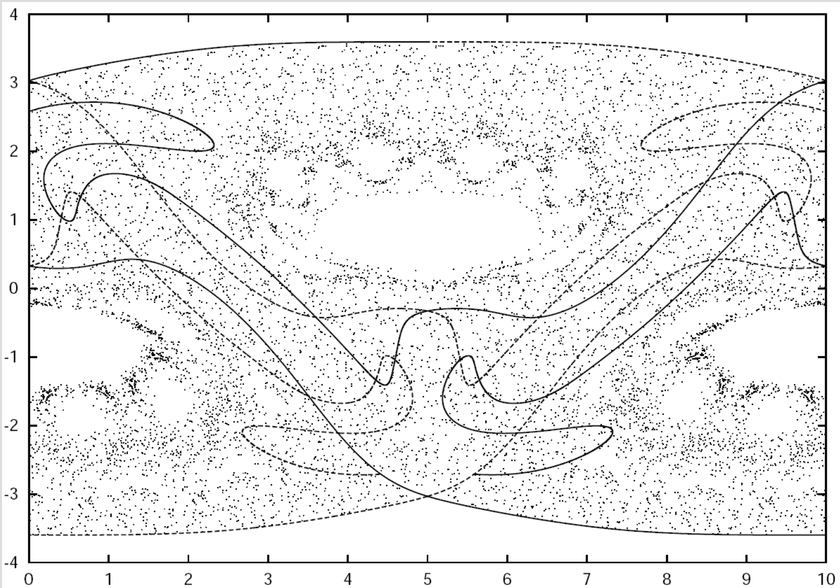


- Converge très lentement !
- Exposants à temps fini ???

Entropie de Kolmogorov (ou entropie topologique)

- Dans le cas ergodique, on peut montrer que cette quantité correspond au produit

« surface de la zone chaotique couverte par une condition initiale *unique*» par « exposant de Lyapunov »

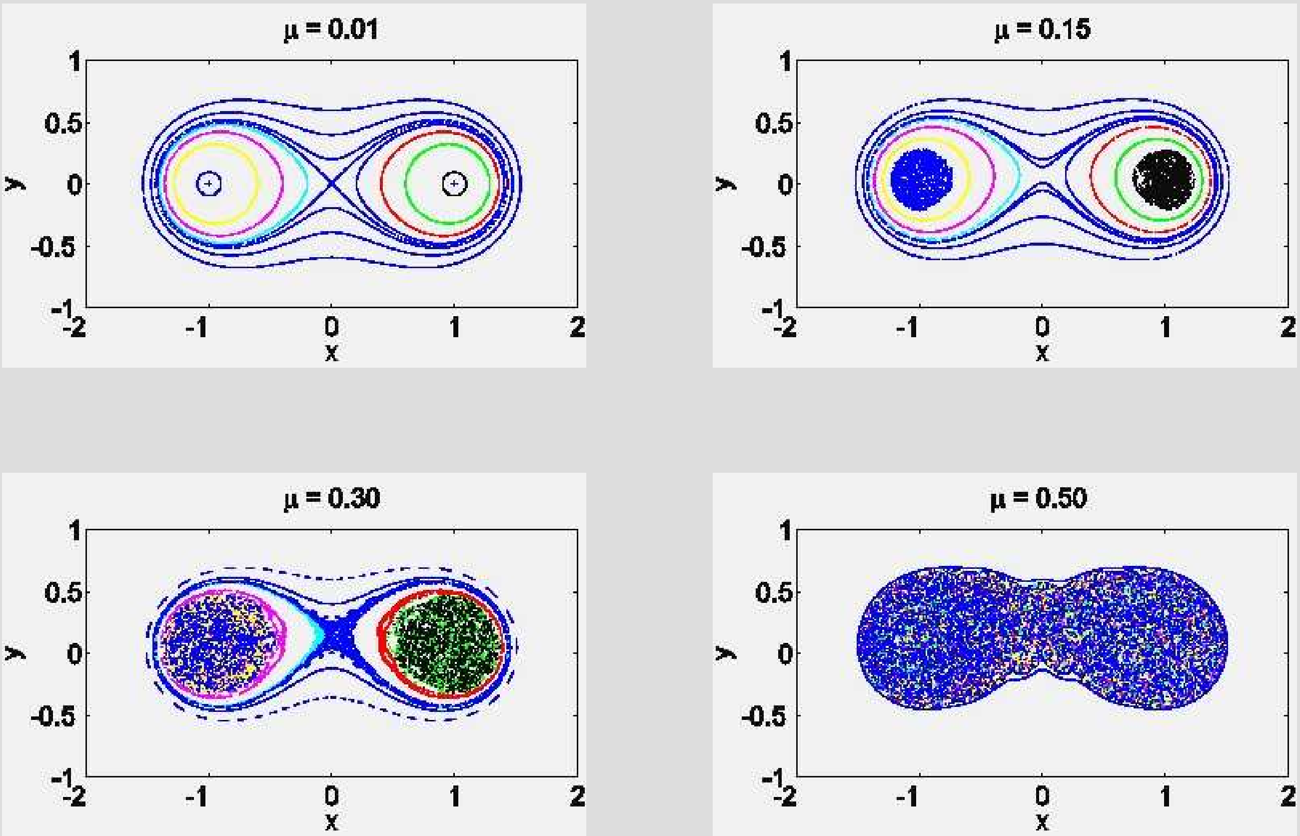


→ Surface couverte par un ensemble de points répartis de manière non uniforme ???

• Cette quantité peut devenir très grande dans des cas où la zone de chaos est très localisée (exposant de Lyapunov très grand)

Un peu d'histoire : Aref (1984)

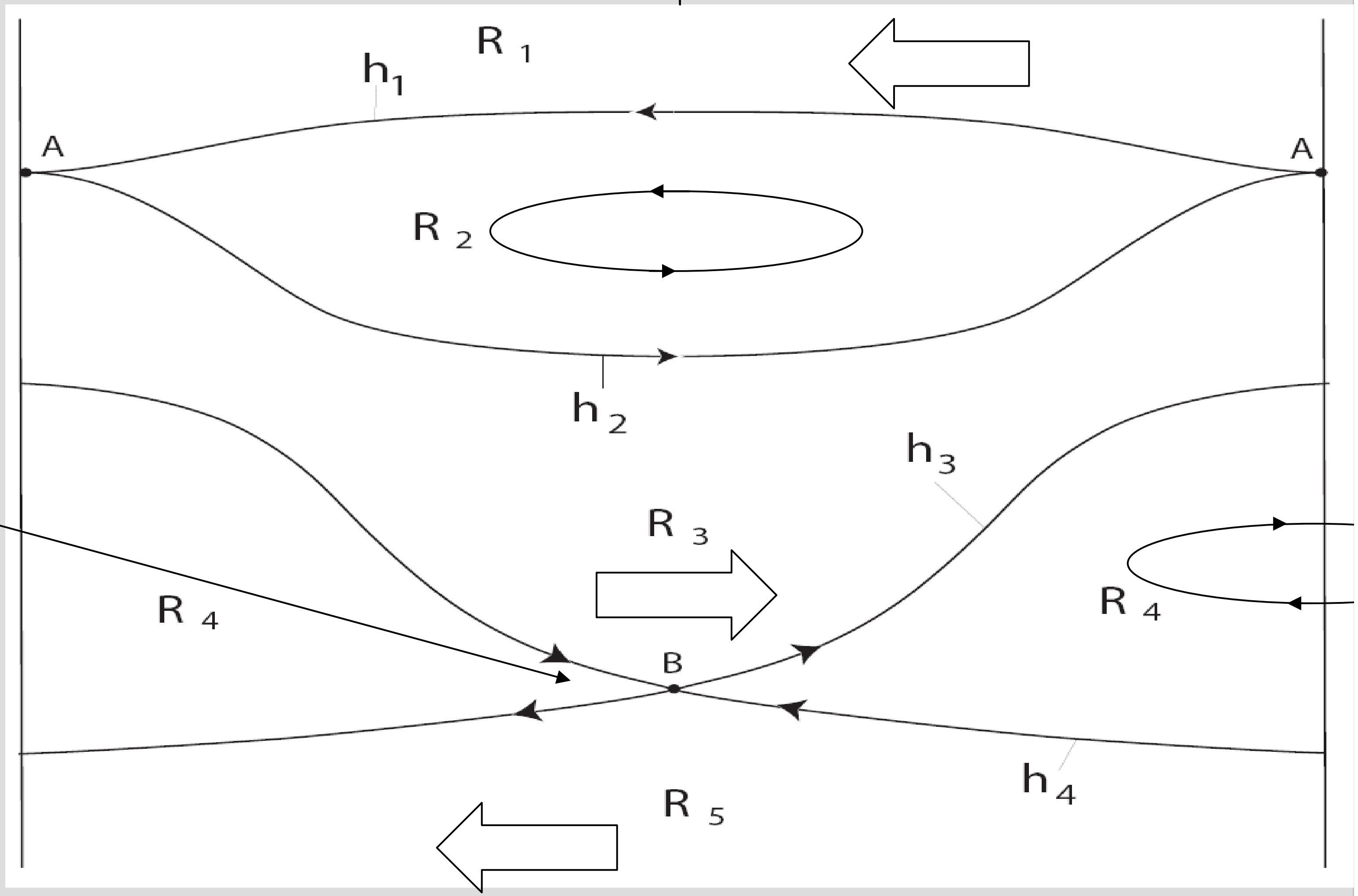
Deux vortex actionnés tour à tour pendant T/2 chacun



Dynamique des lobes : les points fixes hyperboliques

Cas d'un jet sinueux (Gulf Stream)

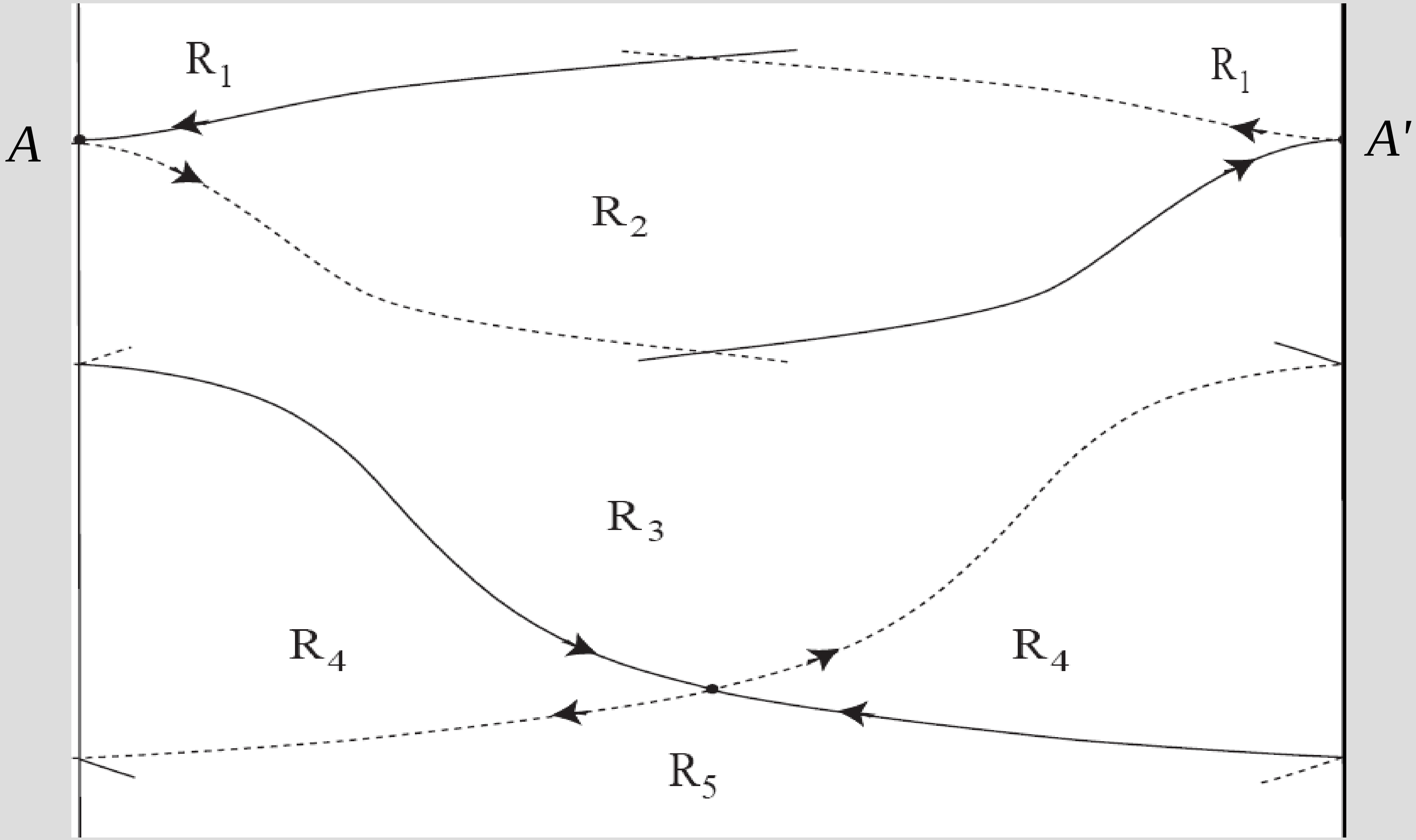
Points fixes hyperboliques



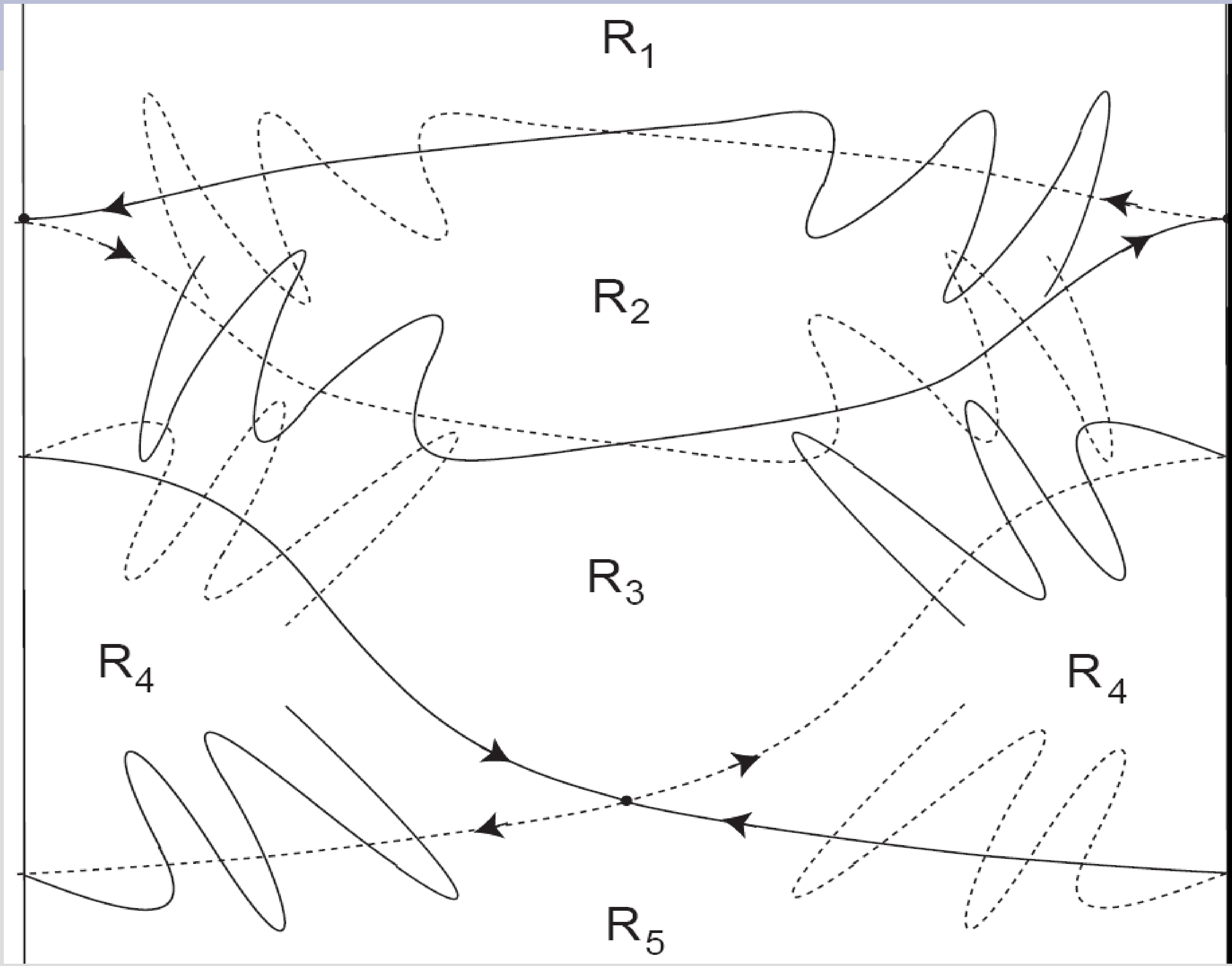
avec S. Wiggins

Ajoût d'une perturbation périodique

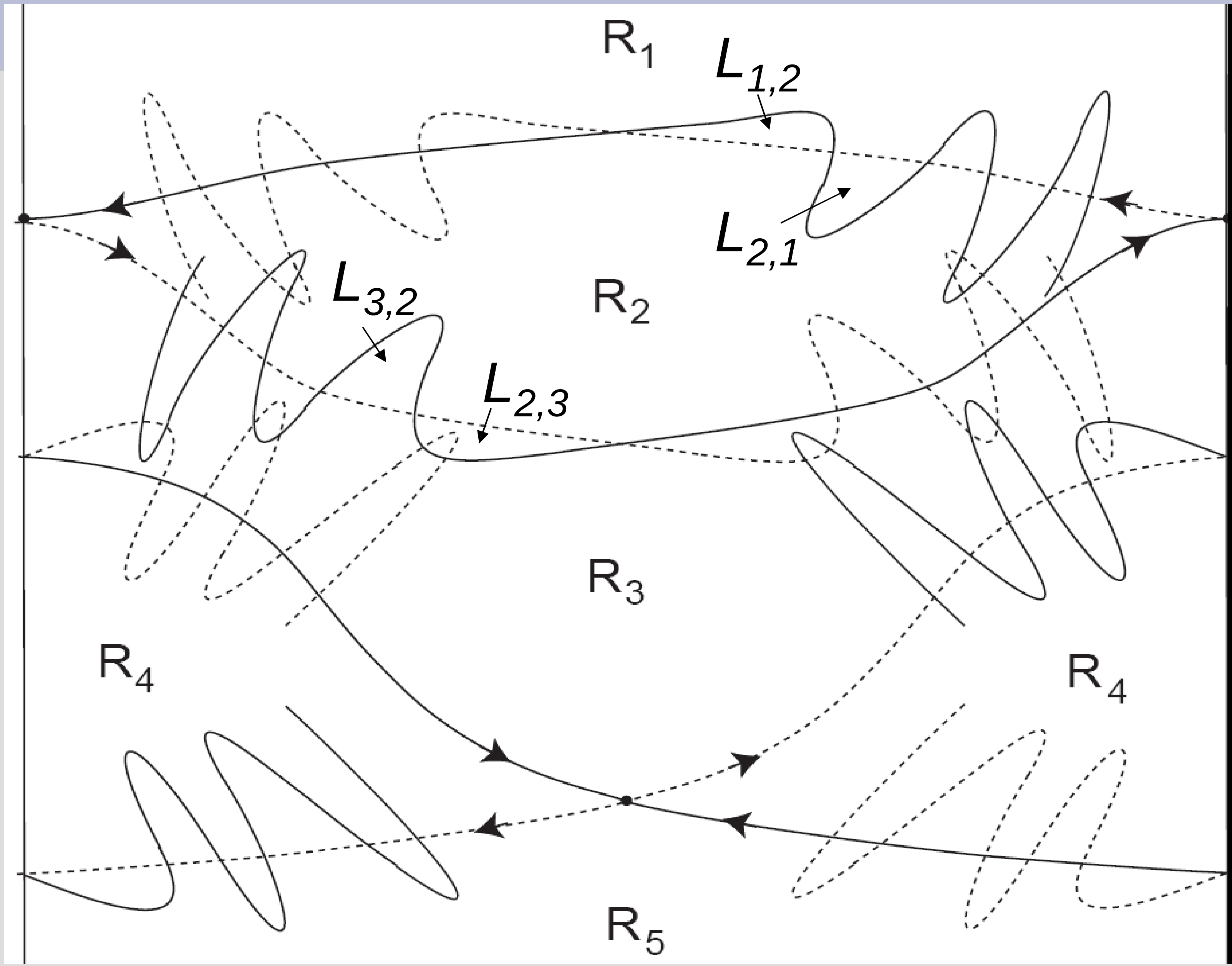
Les variétés se croisent



Et cela donne (dynamique des lobes):



Les lobes tourniquets:

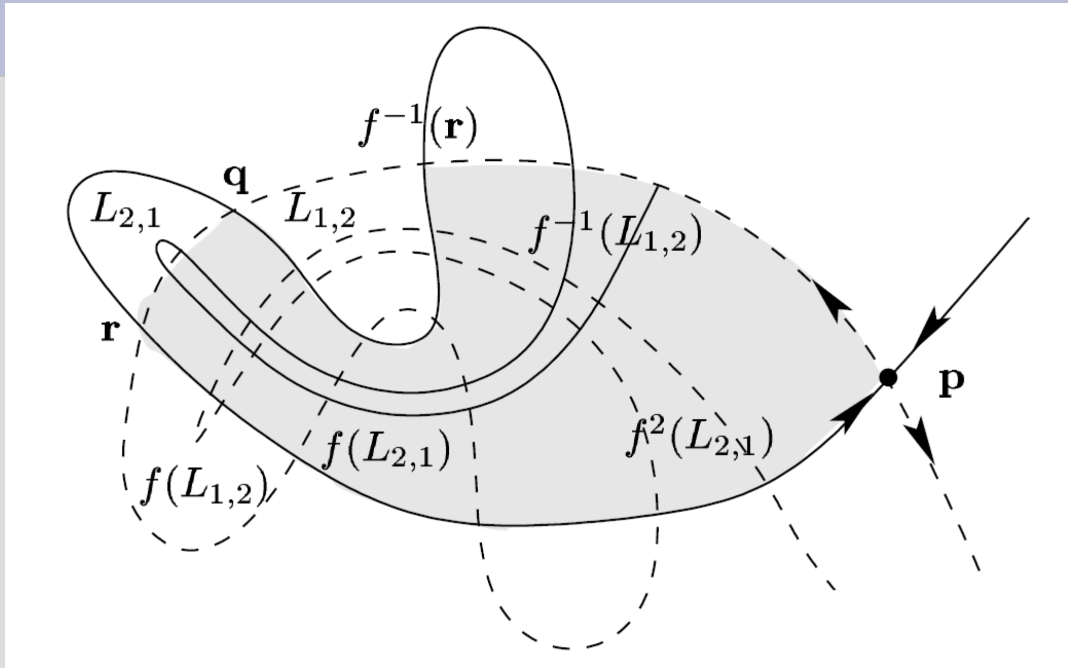


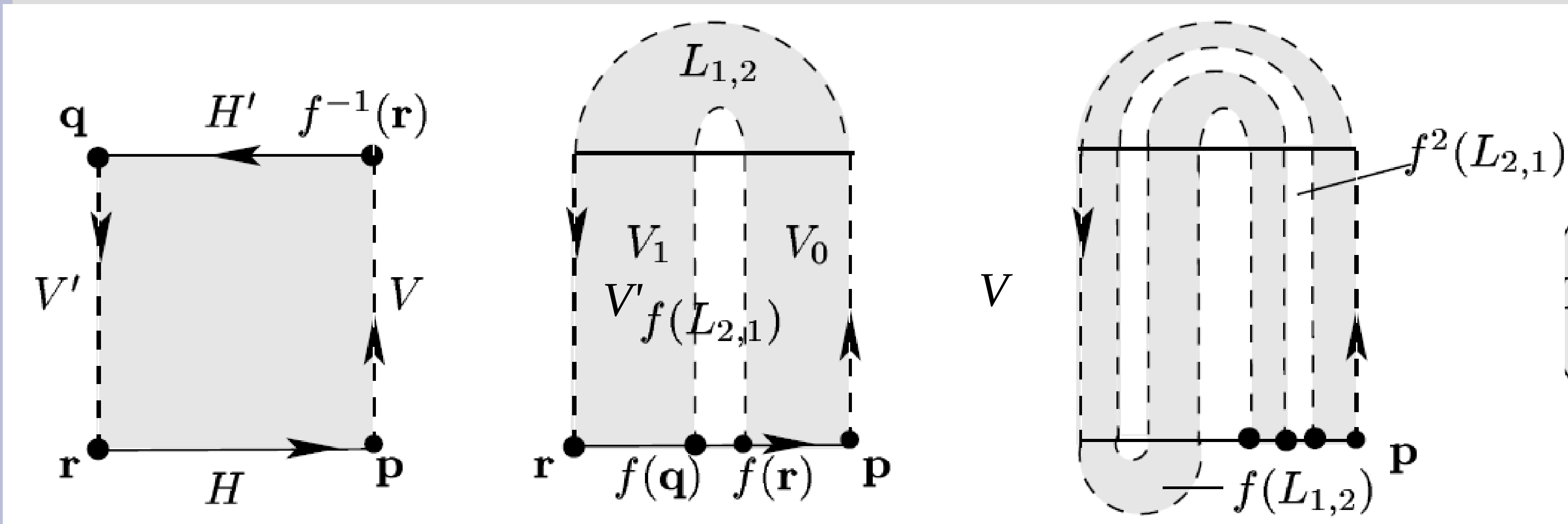
Utilisation de la dynamique des lobes

- À partir de l'étude du comportement des lobes, couplée à une méthode statistique, on peut prédire (Raynal & Wiggins) :

  - Le temps de résidence dans chaque région
  - Le temps moyen pour traverser le jet central
  - La quantité de fluide qui peut passer de la zone de recirculation froide (nord) à la zone de recirculation chaude

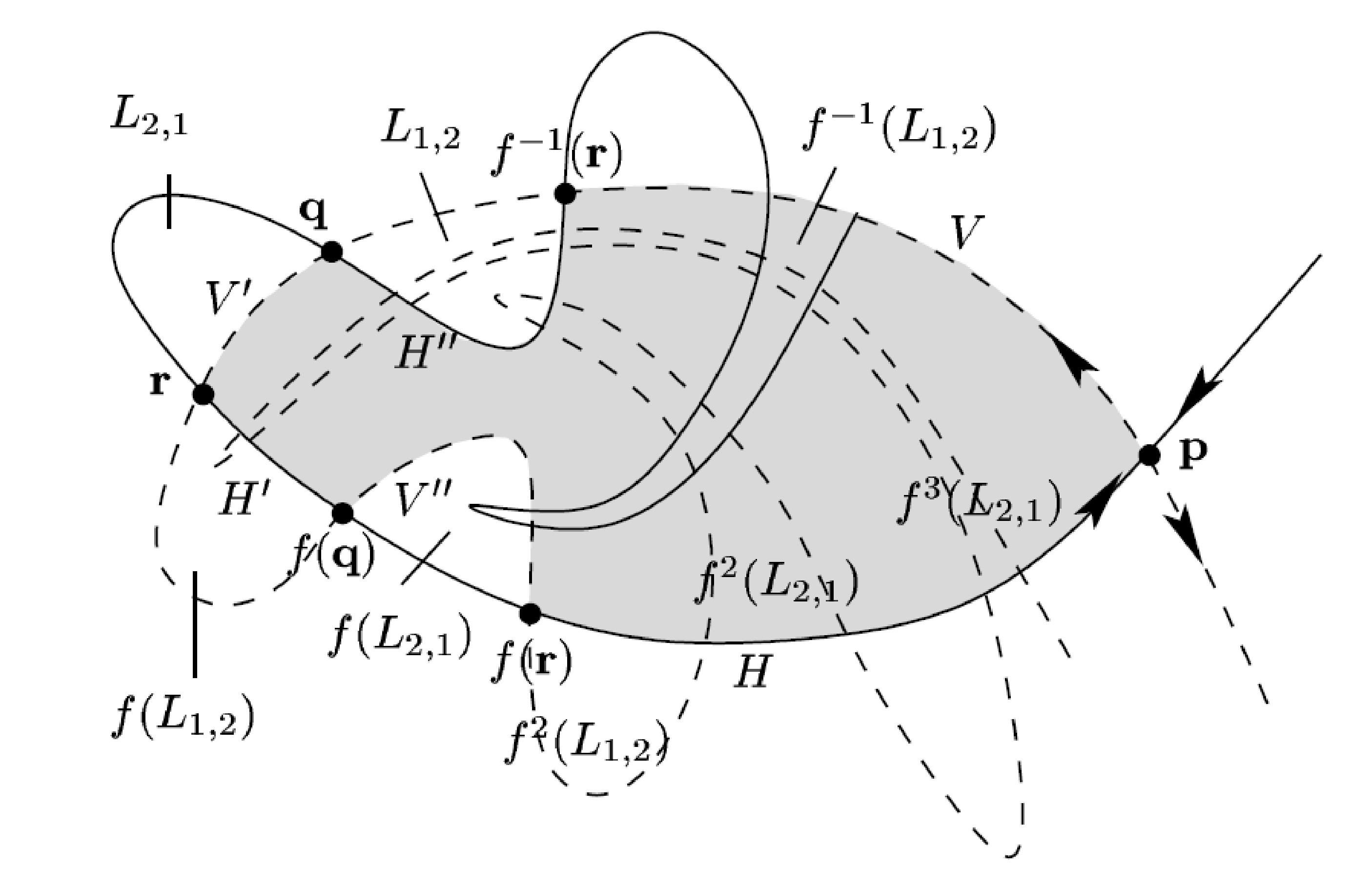
Relation lobes / Smale





<u>*λ=2*</u>

Plus compliqué...



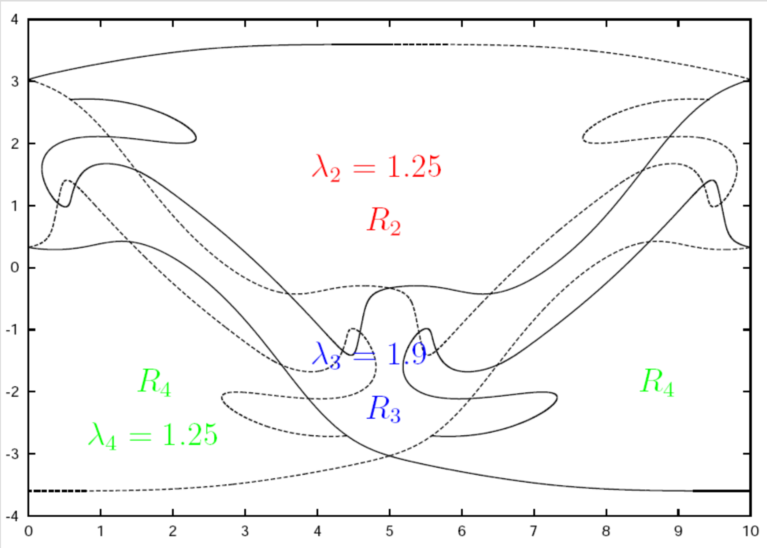
$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

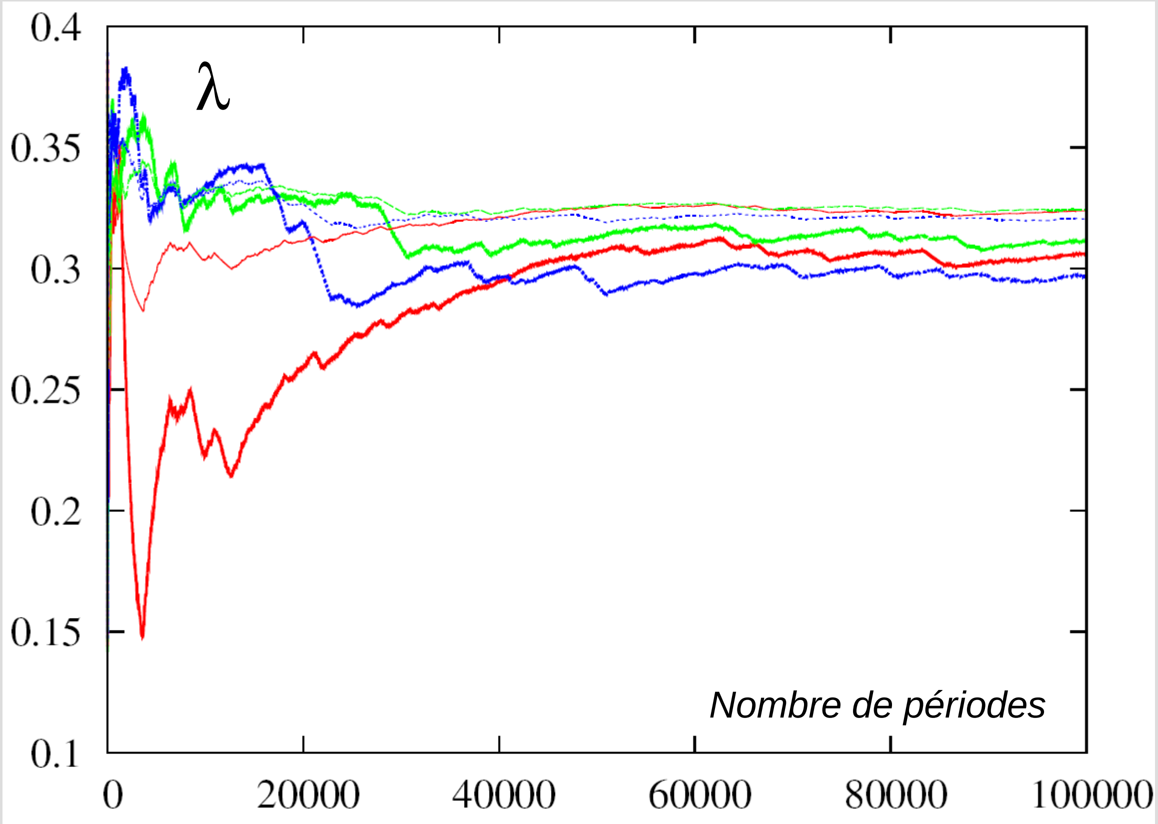
$$\lambda = 1.7$$

Cas général

- On peut toujours trouver une base de décomposition des lobes :
  - On peut construire une matrice
  - On en déduit la valeur propre maximale
  - On obtient un taux d'étirement dans chaque région de l'écoulement
- Utilité ???

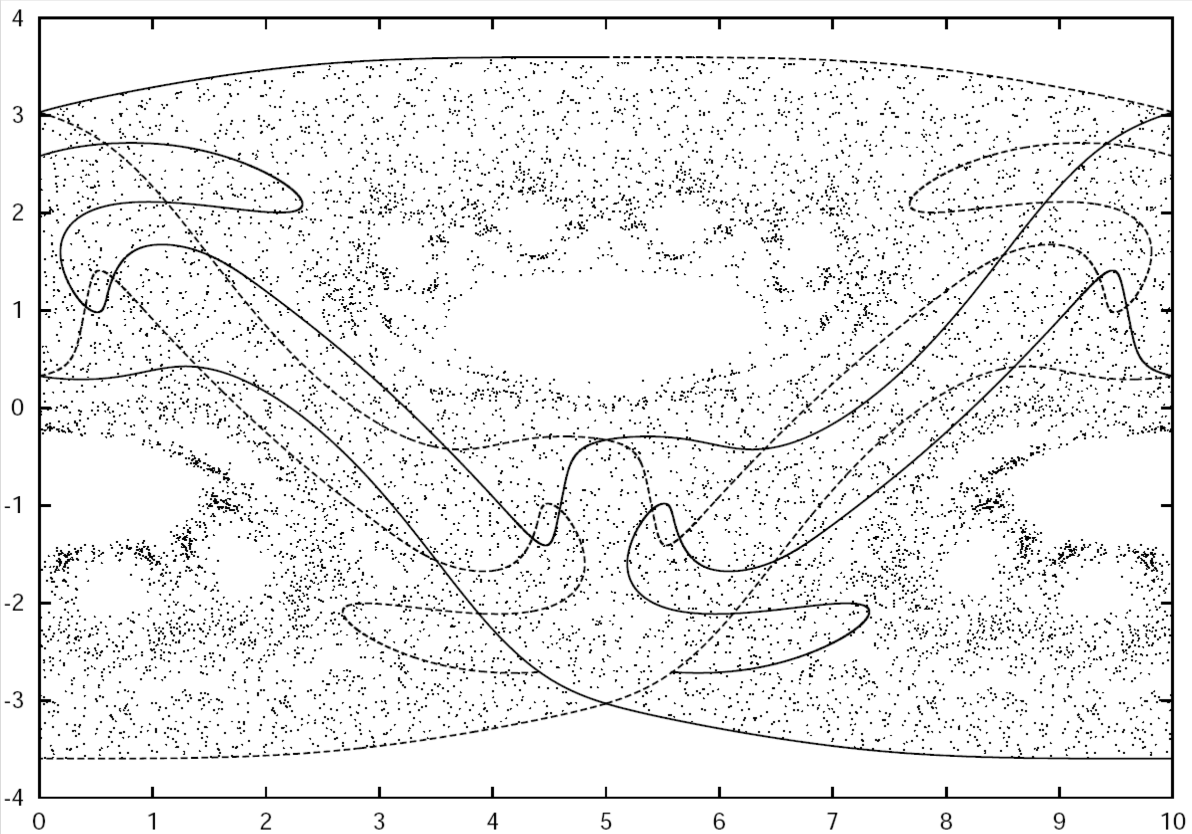
Application au “fit” des exposants de Lyapunov





- Résultat intéressant... Mais un peu surestimé.
- Ne suit pas les “chutes”

Pourquoi l'exposant chute-t-il ?



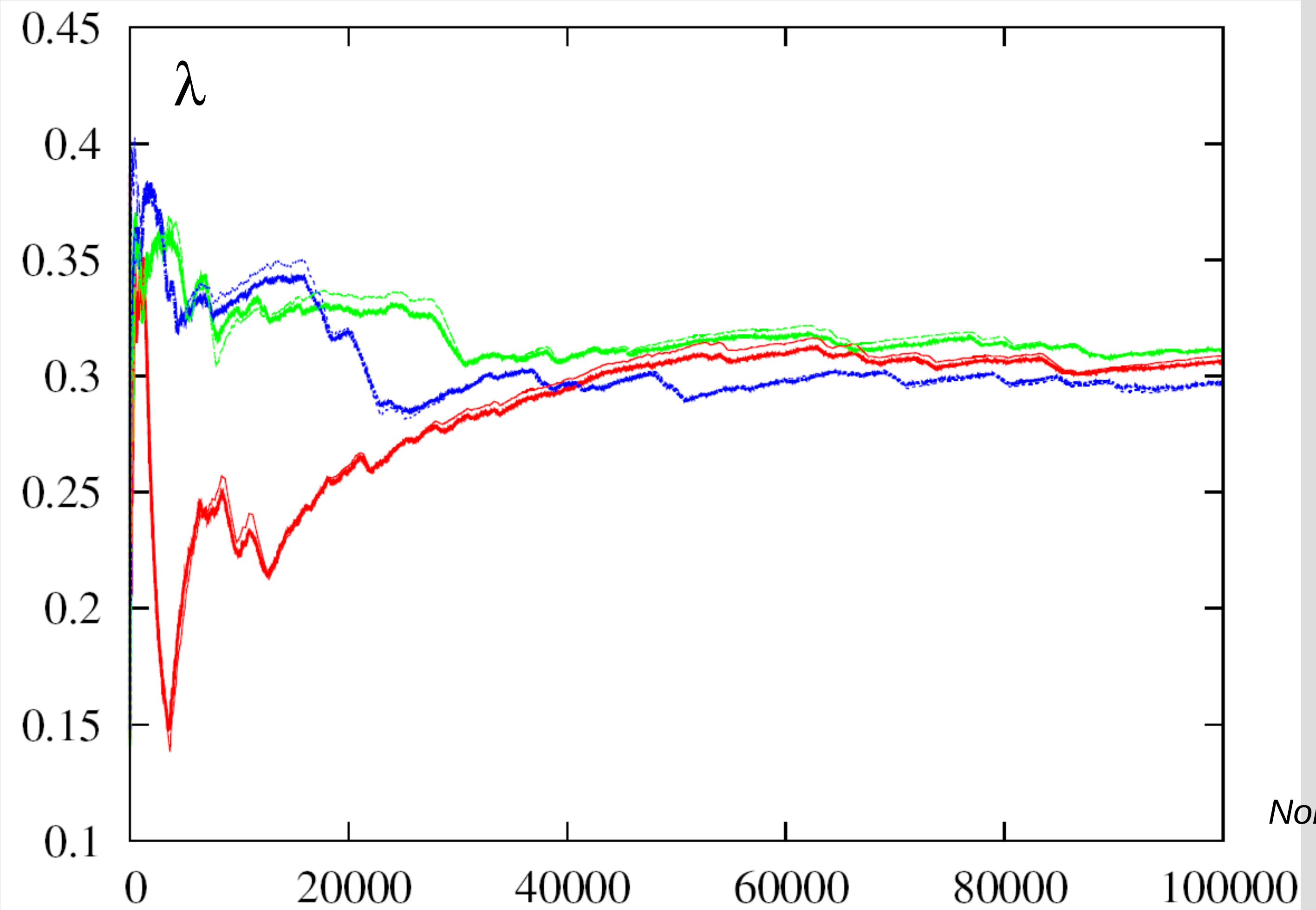
La particule reste “bloquée” près des régions non chaotiques (régions “collantes”)

Nouveau modèle

- Lorsque la particule reste trop longtemps dans une région, c'est qu'elle est coincée
  → Pas d'étirement (λ=1)

- À partir de quand ???
  - On a constaté que lorsqu'il y a des zones collantes, le taux d'échappement de cette région n'est pas exponentiel
  - Si le taux d'échappement d'une région était exponentiel, la particule serait sortie au bout de n fois le temps moyen associé à cette région
  - Quel n ???

Fit pour n =10



Nombre de périodes

→ Bon fit ! Mais ne permet pas de connaître l'exposant de Lyapunov de manière prédictive…

Quelques tentatives de paramètres...

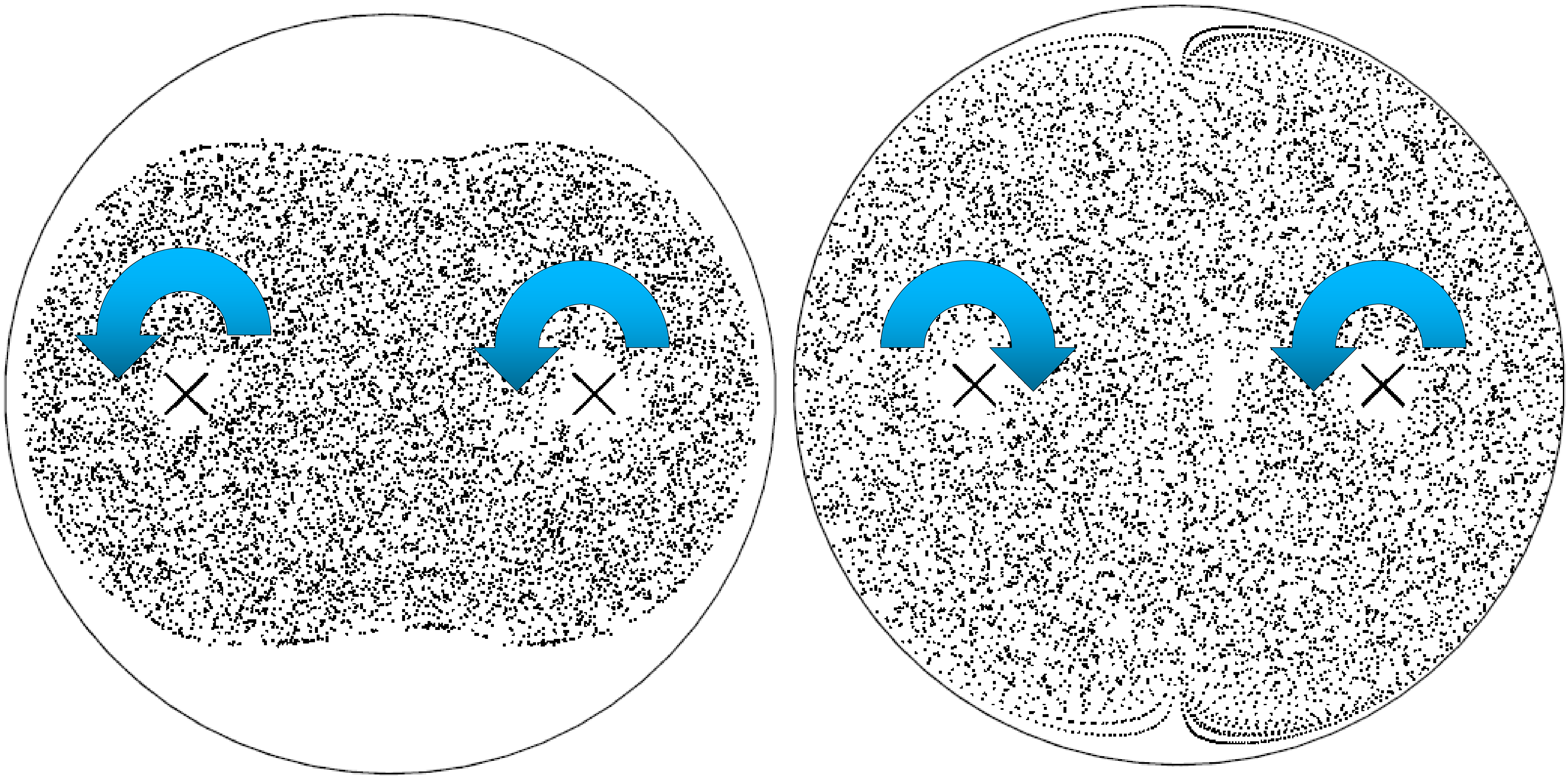
- **Taille du lobe tourniquet** (Rom-Kedar, Leonard, Wiggins): quantité de fluide qui passe d'une région à une autre à chaque période du champ de vitesse
  - Souvent calculable analytiquement dans le cas des faibles perturbations
  - Accessible numériquement
- **Flux chaotique** (Raynal & Gence): **taille du lobe/période**
  - On peut montrer que lorsque l'on fait varier la période il existe toujours un maximum
  - Mais : le maximum est généralement obtenu lorsque la période est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique du système...

Dynamique des lobes : conclusion

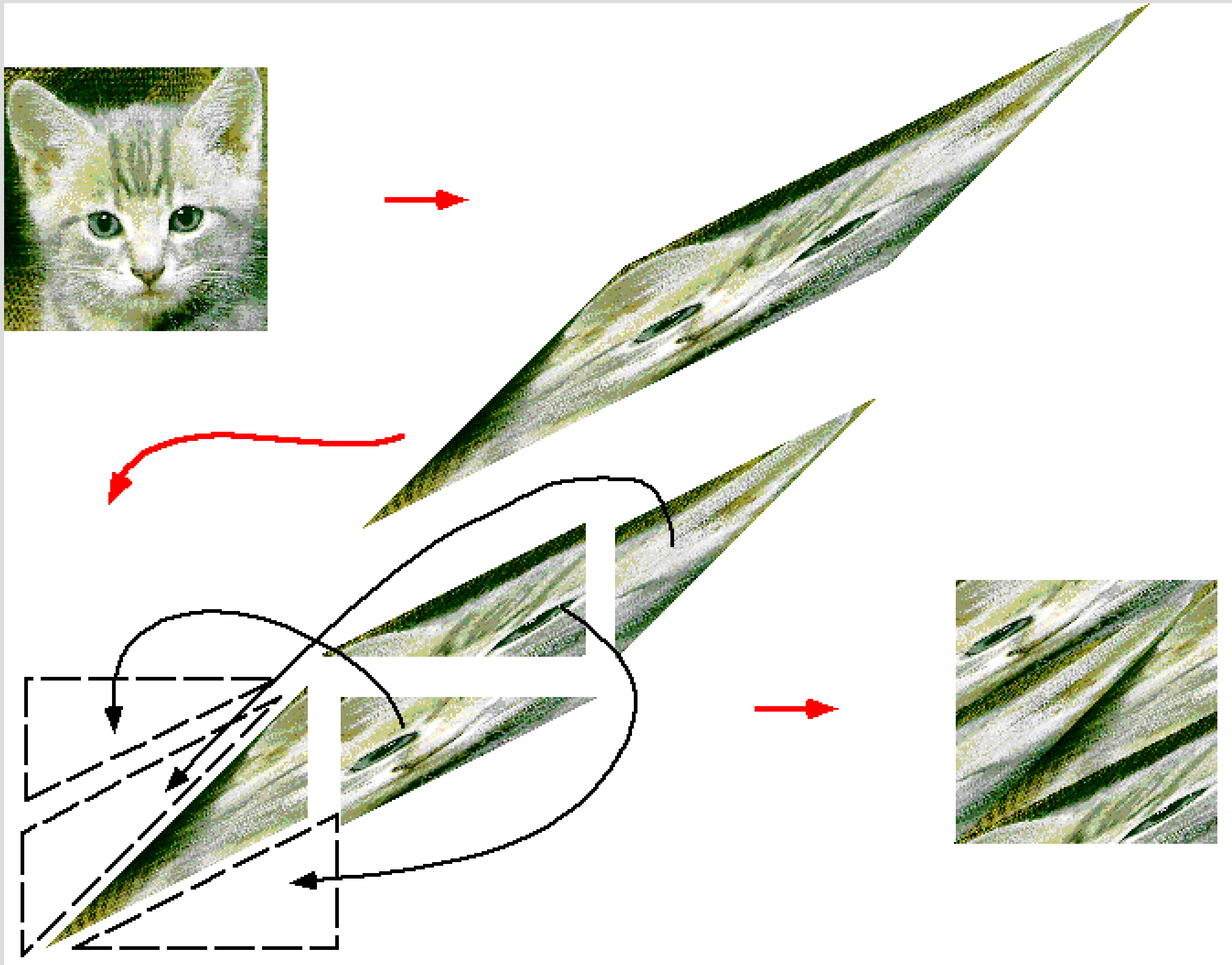
- Chaos lié à l’existence des points hyperboliques (formation de lobes)

→ question : Vortex d’Aref : vaut-il mieux mélanger de manière co-rotative ou contra-rotative ???

Comparaison
co-rotatif / contra-rotatif



L'application du chat



Conclusion : écoulements 2-D

- Existence de nouvelles techniques prédictives :
  - Théorie des tiges fantômes (E. Gouillart, J.-L. Thiffeault)
  - Linked Twist Map (LTM) (Sturman, Ottino, Wiggins)
- Cependant, il est quasiment impossible de prédire si un écoulement chaotique sera totalement efficace ou pas sans faire l’expérience
- Manque de paramètres quantitatifs rééllement exploitables

→ Encore beaucoup de recherche possible !