Résumé de la discussion.

Peut-on "vérifier" le(s) théorème(s) de fluctuation ?

Cette question a-t-elle un sens ? Peut-on vérifier ce(s) théorème(s) à l'aide d'expériences ? Peut-on le vérifier à l'aide de simulations numériques?

rédigé par Sylvain Joubaud et Pierdomenico Paolino

Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon

Le théorème de Gallavotti-Cohen étudie le taux de contraction de l'espace des phases (ou taux de production d'entropie) qui est une quantité très difficile à mesurer expérimentalement ou numériquement. Pour "tester" le théorème, il est nécessaire de trouver une observable pouvant être reliée par un modèle au taux de production d'entropie.

Exposé de Frederic VAN WIJLAND : "Power injected in a granular gas"

On se place dans le cadre des systèmes dissipatifs dans un état stationnaire hors-équilibre ; la relation de fluctuation étudiée ici est liée au théorème de Gallavotti-Cohen. Il faut déjà remarquer que la deuxième hypothèse du théorème (réversibilité temporelle de la dynamique) n'est pas vérifiée. La dérivée temporelle de l'énergie $\dot{E}(t)$ est définie comme la différence entre la puissance instantanée injectée $w(t)$ et un terme de dissipation $d(t)$:

$$\dot{E}(t) = w(t) - d(t).$$

$w(t)$ est en général positive mais certains évènements rares de $w(t)$ sont négatifs. La puissance injectée sur un temps τ pour maintenir le système dans un état stationnaire hors équilibre est noté $w_\tau = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} w(t')\mathrm{d}t'$. La fonction des grandes déviations s'écrit :

$$\Pi(w) \equiv \lim_{\tau\to\infty} \Pi_\tau(w_\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\log P(w_\tau)$$

où $P(w_\tau)$ est la densité de probabilité (PDF). Le théorème de Gallavotti-Cohen s'intéresse à une propriété de symétrie de la PDF autour de 0 et implique sous certaines conditions :

$$\Pi(w) - \Pi(-w) = \beta\, w \qquad \forall\, w$$

où β est une constante qui a les dimensions de l'inverse d'une énergie. Pour vérifier cette relation dans des simulations ou des expériences, il faut regarder le linéarité de $\Pi(w)-\Pi(-w)$ avec w et cela pour tout événement w. Il est donc nécessaire d'obtenir une statistique suffisante pour les événements négatifs $w < 0$. De même, il n'est pas possible d'accéder directement à la fonction $\Pi(w)$. En réalité, on observe la fonction à temps fini : $\Pi_\tau(w_\tau) = \frac{1}{\tau}\log P(w_\tau)$. En général, la probabilité d'observer des événements négatifs diminue quand le temps τ augmente. Il est ainsi nécessaire de trouver le bon compromis entre les deux conditions.

Dans les résultats numériques et expérimentaux, la probabilité d'observer des évènements négatifs est souvent faible, *i.e.* la zone où la statistique des évènements négatifs est significative est proche de $w = 0$. Dans ce cas, un développement de Taylor à l'ordre 1 en w suffit pour décrire le comportement du système :

$$\Pi(w) - \Pi(-w) \sim 2\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}w}(0)w$$

La linéarité en w est donc triviale.

- Quel est l'intérêt de regarder la puissance injectée ?

Il est intéressant de rechercher une propriété globale et commune à différents domaines de la physique. La puissance injectée permet de gommer les détails microscopiques (intégration sur le temps et l'espace) et ainsi de mettre en relation les gaz granulaires avec les écoulements turbulents par exemple.

Exposé de Francesco ZAMPONI

- Quelles sont les motivations pour tester les théorèmes de fluctuation ?

L'intérêt est d'obtenir des informations sur la mesure invariante (motivation originale de Gallavotti-Cohen et Evans-Searles) et plus généralement sur la théorie ergodique.

- A-t-on le droit de décaler la PDF le long de l'axe des abscisses d'une valeur arbitraire ? Ceci pourrait être une possibilité d'obtenir plus d'évènements négatifs et reviendrait à définir la position 0 de manière arbitraire.

On considère une distribution à temps fini $P(w_\tau/\langle w_\tau\rangle, \tau)$ dont on a renormalisé l'axe des abscisses par la valeur moyenne. Si ces PDF sont asymétriques, il est possible de les décaler de manière à placer le maximum de la PDF à la valeur 1. Ce décalage est d'ordre $1/\tau$, *i.*e. il devient négligeable quand $\tau \to \infty$. Un décalage d'ordre 1 (pour la moyenne par exemple) n'est pas permis. Cette question est discutée dans l'article de F. Zamponi, cond-mat/0612019.

- L'hypothèse chaotique est-elle nécessaire?

C'est une question ouverte: elle est suffisante mais il n'a pas été démontré si elle est nécessaire.

Commentaires de Stéphan Fauve : critiques de deux expériences

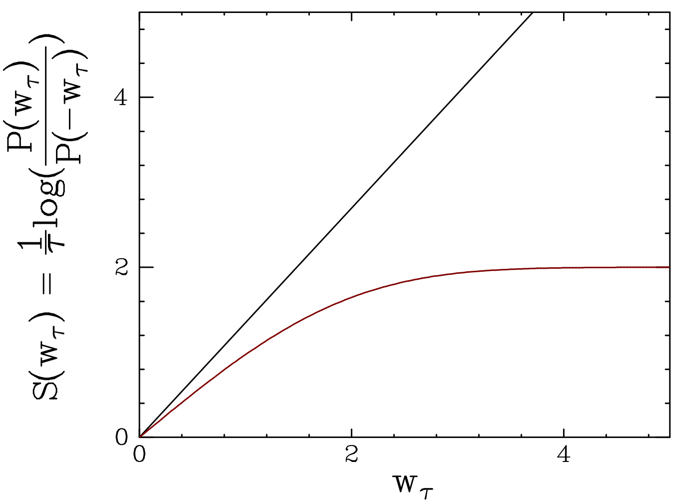
- S. Ciliberto *et al*, *Physica A* **340**, 240 (2004);

L'étude se fait sur les fluctuations de forces en turbulence. La question soulevée ici est comment la quantité force est reliée à une production d'entropie ce qui n'est dimensionnellement pas correct. Une méthode consiste en une mesure ou estimation de la vitesse moyenne au même point. Par le produit de la force avec la vitesse, on obtient une puissance instantanée qu'il est ensuite possible de relier ensuite à une production d'entropie.

- S. Ciliberto et C. Laroche, *J. Phys. IV*, France **8**, 215 (1998);

Le théorème de Gallavotti et Cohen regarde la symétrie de la PDF autour de 0. Il est donc nécessaire d'obtenir des évènements négatifs. Par le choix du point de mesure, il est possible de choisir la moyenne de la PDF. On la place ainsi de manière à obtenir suffisamment d'évènements négatifs pour vérifier le théorème.

- Dans certaines expériences ou simulations numériques, le comportement de la fonction $\Pi_\tau(w_\tau) - \Pi_\tau(-w_\tau)$ n'est pas linéaire. La courbe obtenue est semblable à celle de la figure **??**.



Ce comportement s'explique par un développement de Taylor de la fonction $\Pi_\tau(w_\tau) - \Pi_\tau(-w_\tau)$ aux ordres supérieurs :

$$\Pi_\tau(w_\tau) - \Pi_\tau(-w_\tau) = \beta w_\tau - \gamma w_\tau^3 + \ldots$$

Pour tester le théorème, il faut avoir au moins accès à l'ordre 3 et vérifier que γ tende vers 0 quand τ tend vers l'infini. Il faut quand même remarquer qu'il existe également une limitation au théorème de Gallavotti-Cohen. Celui-ci est attendu entre 0 et une valeur w^* définie typiquement comme un point où la fonction grande déviation diverge. Il n'existe toutefois pas d'estimation générique de w^*.

Discussion générale

- La valeur de la pente (β) a-t-elle une pertinence?

La valeur permet de donner certaines informations. Elle est differente suivant la portée des corrélations. Par exemple, cette valeur dépendra du *Re* en turbulence ou du *Ra* pour la convection. Elle est liée aux nombres de degrés de liberté du système étudié.

- Peut-on "vérifier" le théorème?

La statistique ne sera jamais suffisamment bonne pour pouvoir "vérifier" ce genre de théorème compte tenu des conditions d'applications (S. Fauve). Le même problème apparaît pour l'égalité de Jarzynski où les évenements qui ont le poids le plus important sont des évènements rares (C. Van den Broek).

- Quel en est "l'intérêt"? N'y aurait-il cependant pas quelque chose de plus pertinent à étudier comme les fluctuations autour de la moyenne?

Il met en relation des échelles de grandeurs qui n'ont rien à voir les unes avec les autres (J. Farago).

Ces théorèmes ont permis l'introduction de nouveaux concepts. Ils ont été un coup de projecteur sur les mathématiques des années 60. C'est de plus une propriété générique des phénomènes hors-équilibre. Cependant il faut passer à autre chose et aller plus loin (F. Van Wijland).

Il s'agit d'un concept fort puisque il s'agit d'une mesure quantitative du second principe et de ses violations. Il en est de même pour le théorème de Jarzynski. (Le second principe n'est valable qu'en valeur moyenne) (N. Garnier).