

# Sur l'Analyse Spectrale Singulière (SSA)

**Jinane Harmouche**

***Projet ASTRES*** 

19 novembre

## Principaux enjeux

- De combien deux fréquences pures doivent être espacées pour qu'elles soient séparables par la SSA ?
- Qu'en est-il de la séparation entre une fréquence pure et un chirp ?
- SSA : une technique de décomposition modale ?
- Proposition : SSA glissante pour la séparation des composantes AM-FM

# Principe de la SSA

L'algorithme comporte deux étapes principales :

- **Décomposition** : (paramètre de réglage : taille de fenêtre  $L$ )

SVD d'une matrice de Hankel  $S$  dite "de trajectoire" déduite des échantillons du signal  $(s_1, s_2, \dots, s_N)$ ,  $N = K + L - 1$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_K \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_L & s_{L+1} & \dots & s_{K+L-1} \end{pmatrix}$$

$$S = \sum_{i=1}^L S_i \quad \text{avec} \quad S_i = \sigma_i U_i V_i^T, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_L$$

- **Reconstruction** : (procédure de Regroupement)

(1) Moyennage sur les éléments anti-diagonaux des  $S_i \Rightarrow \mathcal{S}_i$

$S_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  **composante élémentaire**,

(2) groupement des  $\mathcal{S}_i$

$\Rightarrow$  groupe  $I_j$  : la  $j^{\text{ème}}$  **composante du signal**  $y_j = \sum_{i \in I_j} \mathcal{S}_i$ .

# Application à un signal ECG

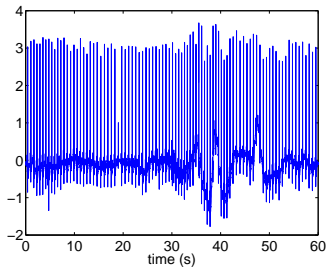


FIGURE: Signal ECG,  $F_s = 128$

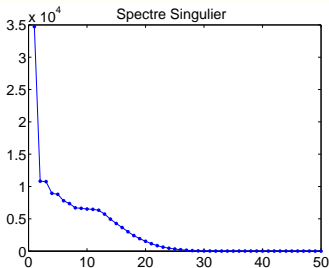
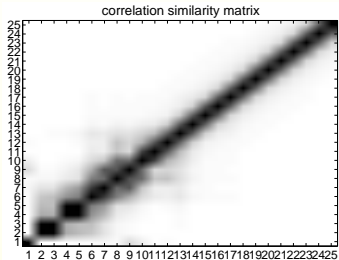


FIGURE: Spectre singulier,  $L = 50$ .

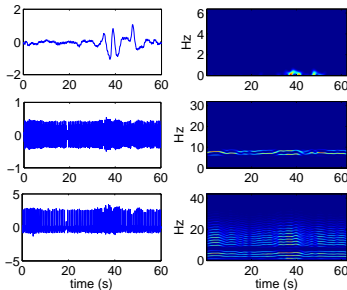
Signal de 8000 valeurs  $\Rightarrow$  matrice de trajectoire  $S$  ( $50 \times 7951$ )  $\Rightarrow$  SVD (EVD de  $S * S^T$ )  
 $\Rightarrow$  50 triplets  $(\sigma_i, U_i, V_i^T)$ ,  $i = 1, \dots, 50 \Rightarrow$  50 composantes élémentaires

- Spectre singulier  $\Rightarrow$  25 valeurs singulières non négligeables
- Groupement des 25 composantes élémentaires ?

# Regroupement basé sur une matrice de similarité



**FIGURE:** Corrélation entre les composantes élémentaires



**FIGURE:** Reconstruction de 3 composantes associées à  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2, \sigma_3)$ ,  $(\sigma_4, \dots, \sigma_{25})$

**Outil de regroupement automatique : la classification ascendante hiérarchique**  
*paramètre d'entrée : Nombre de composantes du signal*

## Regroupement par classification hiérarchique ascendante

Exemple de séparation d'un signal de  $N = 300$  échantillons composé d'une sinusoïde ( $\lambda = 0.03$ ) et d'une sinusoïde modulée linéairement en fréquence ( $H = 0.8$ ,  $\lambda_1 = 0.06$ ,  $\delta\lambda = 0.09$ ), le RSB allant de 40 dB à  $-20$  dB.

**FIGURE:** (a) le spectre singulier (b) le dendrogramme obtenu pour un nombre maximal de classes fixé à 2 (une couleur distincte par classe). (c) (d) les composantes obtenues. La qualité de reconstruction de la composante  $x_i$  :  $\sigma\text{RSB} = \|x_i\|^2 / \|x_i - \hat{x}_i\|^2$

## Séparation de deux sinusoïdes

$$s_n = \cos(2\pi\lambda_0 n) + H \cos(2\pi\lambda_1 n + \phi), \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

$$\lambda_0 = 0.1, \lambda_1 \in ]0, 0.2], H \in [0.01, 100], \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$N = 500$  et  $L = 45$ . La SSA sur  $s_n \rightarrow$  deux composantes  $y_0$  et  $y_1$ .

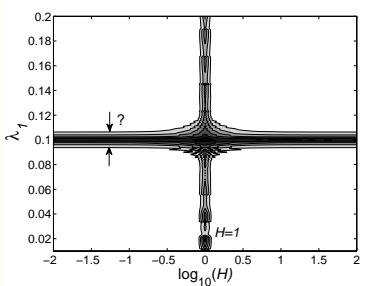


FIGURE: Mesure de la qualité de séparation :

$1/2 * (corr(x_0, y_0) + corr(x_1, y_1))$ , où

$x_0 = \cos(2\pi\lambda_0 n)$  et

$x_1 = H \cos(2\pi\lambda_1 n + \phi)$

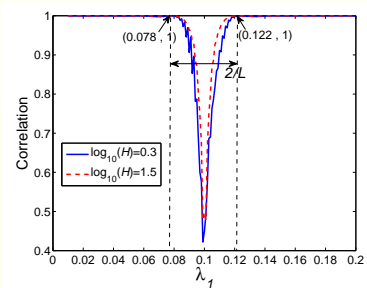


FIGURE: Qualité de séparation en fonction de  $\lambda_1$

# Séparation de deux sinusoïdes

## Interprétation fréquentielle du spectre singulier :

$(s_1, s_2, \dots, s_K) \in \mathbb{R}^K \rightarrow$  Transformée de Fourier :  $(\hat{s}_0, \hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{K-1})$

Sous la condition  $K \gg L$ , **chaque valeur propre** de la matrice de covariance normalisée ( $C/K = SS^T/K$ ) peut être approchée par la valeur moyenne d'une portion de **la puissance spectrale** de la série, dont la largeur est d'environ  $K/L$ <sup>1</sup> :

$$\sigma_i^2/K \approx \frac{1}{l} \sum_{j=i-l}^{i+l-1} |\hat{s}_j|^2, \quad l = \frac{K}{L}, \quad i = 1, \dots, L, \quad (2)$$

- Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux sinusoides de fréquences normalisées  $\lambda_0$  et  $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ .
- **La SSA évalue la valeur singulière associée à  $x_0$  indépendamment de  $x_1$  (et vice versa) si leurs fréquences sont espacées de plus de  $K/L$  échantillons  $\Rightarrow \min(\Delta\lambda) = 1/L$ .**

1. E. Bozzo, R. Carniel, and D. Fasino, "Relationship between Singular Spectrum Analysis and Fourier analysis : Theory and application to the monitoring of volcanic activity," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 60, pp. 812–820, 2010



# Séparation de deux sinusoïdes

$L = 45 ; N \in \{1000, 500, 200, 100\}$ .

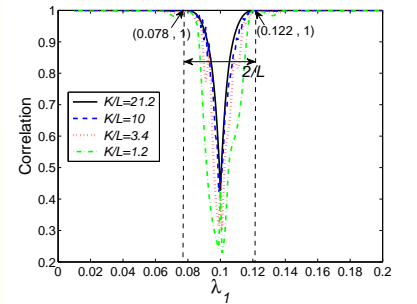


FIGURE: Qualité de séparation en fonction de  $K/L$ ,  $H = 2$

- Changement non abrupt de la qualité de séparation
- Dégradation de séparation plus rapide quand  $K/L$  décroît
- $\exists$  des faibles variations hors de la zone délimitée pour  $K/L=1.2$

# Séparation entre une sinusoïde et un chirp

Le modèle non stationnaire choisi est le suivant :

$$s_n = \cos(2\pi\lambda_0 n) + H \cos(\varphi(n)), \quad n = 1, \dots, N \quad (3)$$

$$\text{avec } \varphi(n) = 2\pi \left( \lambda_1 n + (\delta\lambda/2N)n^2 \right). \quad (4)$$

$\lambda_1 = 0.11$  et  $0 \leq \delta\lambda \leq 0.2$ . Trois cas sont possibles :

(1)  $\lambda_0 < \lambda_1$ , (2)  $\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 + \delta\lambda$ , (3)  $\lambda_0 > \lambda_1 + \delta\lambda$ .

$N = 500$ ,  $L = 45$ .

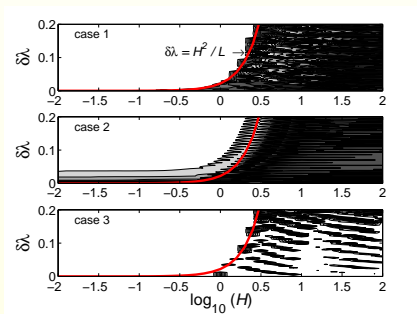
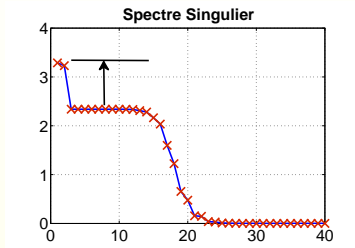


FIGURE: Corrélation moyenne entre les composantes du signal et celles reconstruites par classification hiérarchique ascendante

# Séparation entre une sinusoïde et un chirp

Somme d'une sinusoïde et un chirp  $\Rightarrow$



**La courbe de transition** correspond à la situation où **le plateau**, associé au chirp, atteint le niveau de la **paire**, associée à la sinusoïde, **des valeurs singulières**.

**FIGURE:** Courbe de transition = recouvrement des valeurs singulières.

**Interprétation du spectre singulier**  $\Rightarrow$  A un facteur  $L/K$  près, les valeurs propres

- associées à la sinusoïde sont égales à  $1/2$
- associées au chirp sont égales à  $(H^2/2)/(L\delta\lambda)$

$$\text{A l'égalité : } \frac{1}{2} = \frac{H^2}{2L\delta\lambda} \Rightarrow \delta\lambda = \frac{H^2}{L}$$

# SSA : une décomposition modale ?

Soit le signal suivant

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

où

$$x_1(t) = \sin(3(2\pi \times 6t))$$

$$x_2(t) = 2 \sin(3(2\pi \times 46t + 21 \sin(3\pi t)))$$

$$x_3(t) = \sin(3(2\pi \times 77t + 30 \sin(3\pi t)))$$

$N_x = 2048$  valeurs uniformément échantillonnées sur  $[0, 1]$  sec.  $L = 200$ .

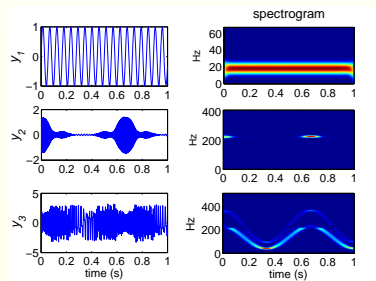
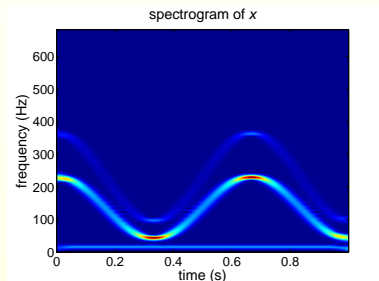


FIGURE: Spectrogram de  $x$  utilisant une fenêtre de kaiser de longueur  $N_x/6$ .

FIGURE: Décomposition automatique du signal en 3 composants :  $x = y_1 + y_2 + y_3$ .

# SSA : une décomposition modale ?

Le résultat est lié à la densité spectrale de l'énergie (DSE) du signal : les premières composantes extraites par la SSA sont associées aux pics de la DSE.

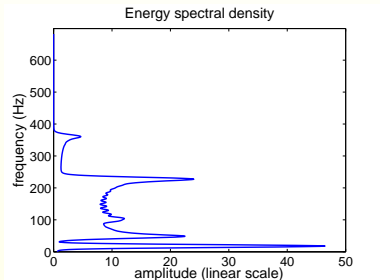


FIGURE: Densité spectrale de l'énergie de  $x$

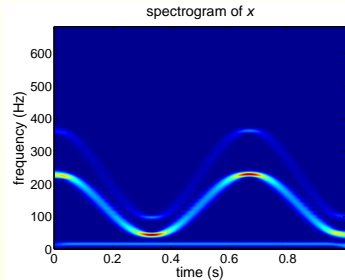


FIGURE: Spectrogram de  $x$  utilisant une fenêtre de kaiser de longueur  $N_x/6$ .

# SSA : une décomposition modale ?

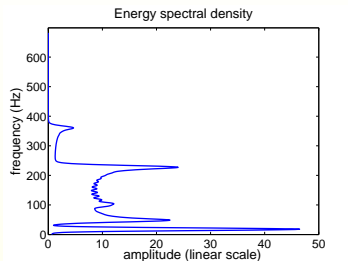


FIGURE: Densité spectrale de l'énergie de  $x$

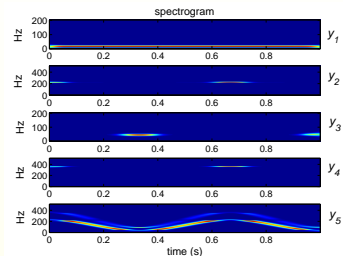
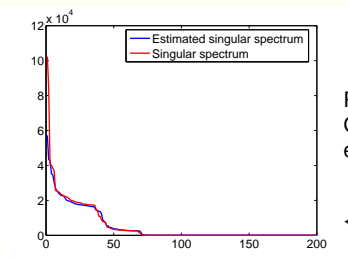


FIGURE: Décomposition de  $x$  en 5 composantes :  $x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ .



Pour la récupération des composantes FM : RE-GROUPEMENT SUPERVISE des composantes élémentaires NECESSAIRE

← Spectre singulier et son image estimée par la DSE

# SSA glissante : une décomposition modale

## Problème de MELANGE DE MODES

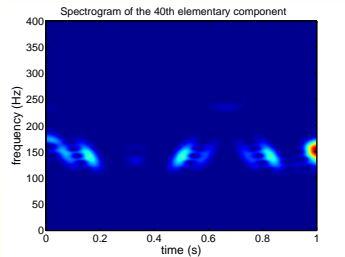


FIGURE: 40<sup>ème</sup> composante élémentaire : mélange de  $x_2$  et  $x_3$

## + Problème de REGROUPEMENT SUPERVISE

**Proposition : SSA glissante** → application de (SSA + classification hiérarchique) à une fenêtre de temps glissante sur le signal.

*paramètres d'entrée : nombre de composantes, taille de la fenêtre*

# Algorithm de la SSA glissante

## Paramètres d'entrées :

- le signal,  $x$ , de longueur  $N_x$
- le nombre de composantes du signal,  $n_c$
- la taille de la fenêtre glissante,  $N$
- le paramètre de la SSA,  $L$
- la longueur du pas de glissement,  $\Delta$

A la sortie :  $n_c$  composantes de longueur  $N_x$ .

## A chaque position $k$ de la fenêtre :

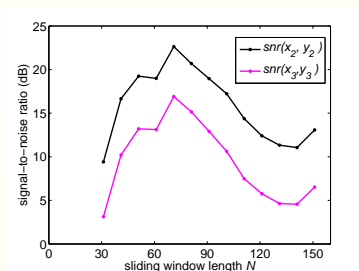
- 1 application de la SSA + classification hiérarchique
- 2 connexion des sous composantes : les  $n_c$  sous-composantes sont comparées à celle obtenues à la position  $k - 1$  (en calculant leur corrélation)
- 3 les valeurs des sous composantes aux indices dans  $[N/2, N/2 + \Delta - 1]$  sont affectées aux composantes appropriées



## Exemple 1

$$x(t) = 2 \sin(3(2\pi \times 46t + 21 \sin(3\pi t))) + \sin(3(2\pi \times 77t + 30 \sin(3\pi t)))$$

Le résultat de la SSA glissante en fonction de la taille  $N$  de la fenêtre du temps :



**FIGURE:** Spectrogram des composantes reconstruites par SSA glissante :

$L = (N - 1)/2$ , le pas  $\Delta = 1$

**FIGURE:** Rapport signal-sur-bruit calculé pour les composantes reconstruites :

$$snr(x_i, y_i) = 20 \log_{10} \frac{\|x_i\|}{\|x_i - y_i\|}, \text{ où } y_i \text{ est associé à } x_i$$

## Exemple 2

$$z(t) = \sin(2\pi \times 30(t + 1/4)^2) + 2 \sin(2\pi \times 50(t + 1/4)^2)$$

*Problème de la SSA classique : mélange de modes*

**FIGURE:** Spectrogram de :  $z(t)$ , 1<sup>ère</sup> et 4<sup>ème</sup> composantes élémentaires de la décomposition SSA classique

## Exemple 2

Résultat de la SSA glissante :

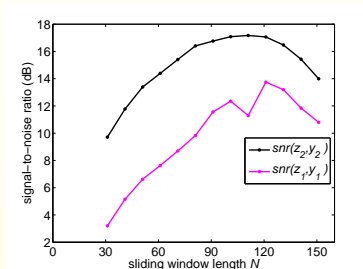


FIGURE: Rapport signal-sur-bruit calculé pour les composantes reconstruites :

FIGURE: Spectrogram des composantes obtenues par SSA glissante :  
 $L = (N - 1)/2$ , le pas  $\Delta = 1$

$$snr(z_i, y_i) = 20 \log_{10} \frac{\|z_i\|}{\|z_i - y_i\|}, \text{ où } y_i \text{ est associé à } z_i$$

$\Delta > 1$  valeur

**FIGURE:** Spectrogram des composantes obtenues par SSA glissante :  $N = 71$ ,  $L = (N - 1)/2$

**FIGURE:** Spectrogram des composantes obtenues par SSA glissante :  $N = 121$ ,  $L = (N - 1)/2$

# Perspectives

? Nombre de composantes du signal

? Les composantes intermittentes

? Les applications de la SSA glissante

? ??