

# Optimisation par majoration-minimisation pour les problèmes inverses linéaires

Jérôme IDIER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CNRS, IRCCyN, Nantes

## Résumé

La résolution de nombreux problèmes inverses en traitement du signal, tels que la restauration d'image, peut se ramener à la minimisation d'un critère pénalisé qui prend en compte conjointement les observations et les informations préalables. Nous nous intéressons ici principalement à la minimisation des critères pénalisés différentiables. Nous discutons plus précisément du choix d'une stratégie de recherche de pas dans les algorithmes de descente itérative, en mettant en avant le recours au principe de Majoration-Minimisation (MM). Ce principe est ancien [1] et sous-tend de nombreux algorithmes d'optimisation: algorithmes EM, algorithmes de seuillage itératif, algorithmes de moindres carrés repondérés. Il repose sur la spécification en tout point d'une approximation majorante de la fonction objectif, qui soit tangente au point courant. Un algorithme MM est alors obtenu en minimisant l'approximation majorante pour engendrer le nouveau point courant. Le caractère monotone décroissant de la suite des critères engendrée est immédiat, et différents résultats de convergence sont disponibles sous des hypothèses variées.

Les algorithmes MM proposés dans la littérature reposent principalement sur deux types d'approximation majorante: les approximations séparables (par exemple, les algorithmes de seuillage itératif) et les approximations quadratiques (par exemple, les algorithmes de moindres carrés repondérés).

Nous nous sommes intéressés à la seconde catégorie. Bien qu'utilisés en restauration d'image (et souvent baptisés algorithmes semi-quadratiques dans ce contexte), les algorithmes de ce type ont un coût élevé par itération pour les problèmes de grande taille, puisque chaque itération suppose la résolution d'un système linéaire. Une de nos contributions a consisté à démontrer la convergence de versions tronquées de ces algorithmes, obtenues par résolution inexacte du système linéaire à chaque itération.

Nous avons ensuite considéré différentes stratégies de direction de descente plus naturellement adaptées aux problèmes de grande taille (gradient conjugué [2], mais aussi LBFGS, pseudo-Newton tronqué), en les associant systématiquement à une stratégie de pas conçue comme un algorithme MM univarié. Les algorithmes ainsi obtenus sont à la fois convergents sous des conditions mathématiques larges, d'une conception simple et d'un comportement pratique très efficace. La formulation la plus efficace est un algorithme à mémoire de gradient consistant à effectuer l'itération courante dans un sous-espace plutôt que le long d'une

direction [3]. Notre formulation MM permet alors la sélection d'un pas multivarié, d'une façon simple et mathématiquement fondée.

Une caractéristique de notre démarche est de permettre l'optimisation (locale) de critères non convexes [2,3,4]. D'autre part, elle n'est pas limitée aux approximations majorantes quadratiques. En particulier, dans certains cas de critères présentant des barrières aux frontières de leur domaine (critères entropiques, log-vraisemblance poissonienne), pour lesquels ces dernières sont mal adaptées, nous avons développé une stratégie de pas spécifique s'appuyant sur une approximation non quadratique, et nous avons montré la convergence de plusieurs algorithmes de descente incorporant cette stratégie de pas [5,6].

- [1] E. Weiszfeld, Sur le point pour lequel la somme des distances de  $n$  points donnés est minimum, Tôhoku Mathematical Journal, vol. 43, pp. 355–386, 1937
- [2] C. Labat et J. Idier, Convergence of conjugate gradient methods with a closed-form stepsize formula, J. Optim. Theory Appl., vol. 136, pp. 43-60, 2008
- [3] E. Chouzenoux, J. Idier et S. Moussaoui, A majorize-minimize strategy for subspace optimization applied to image restoration, IEEE Trans. Image Processing, vol. 20, pp. 1517–1528, 2011
- [4] E. Chouzenoux, A. Jeziarska, J.-C. Pesquet and H. Talbot. A Majorize-Minimize Subspace Approach for l2-l0 Image Regularization. SIAM Journal on Imaging Science, vol. 6, no. 1, pp. 563–591, 2013
- [5] E. Chouzenoux, S. Moussaoui, J. Idier et F. Mariette, Efficient maximum entropy reconstruction of nuclear magnetic resonance T1-T2 spectra, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 58, pp. 6040–6051, 2010
- [6] E. Chouzenoux, S. Moussaoui et J. Idier, Majorize-minimize linesearch for inversion methods involving barrier function optimization, Inverse Problems, vol. 28, 065011, oct. 2012