Ondelette Hypercomplexe

P. Carré
Laboratoire XLIM-SIC, UMR CNRS 7252
philippe.carre@univ-poitiers.fr

Thèse R. Soulard 2012

Grenoble 11 octobre 2012

But

La définition d’une tranformée en ondelette pour les images

La représentation doit permettre une analyse fine de l’information 2-D

- Lien avec des notions physiques : redéfinir la notion analytique

- De nouvelles informations

- Apporter de nouvelles propriétés : invariance, directionnalité, couleur

- La reconstruction parfaite doit être assurée, représentation redondante

•Cette représentation doit être associée avec un algorithme numérique rapide et stable

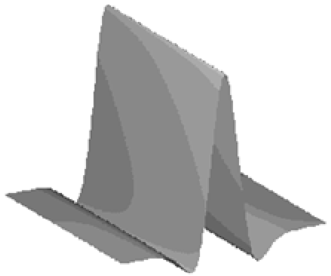
Contexte : transformation

2-D : une réponse géométrique par bases fixes

Transformée géométrique à fonctions d'analyse fixes

$$r\left(a,b,\theta\right)=\int_{\Re^2}\psi_{a,b,\theta}\left(\mathbf{x}\right)s\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}$$

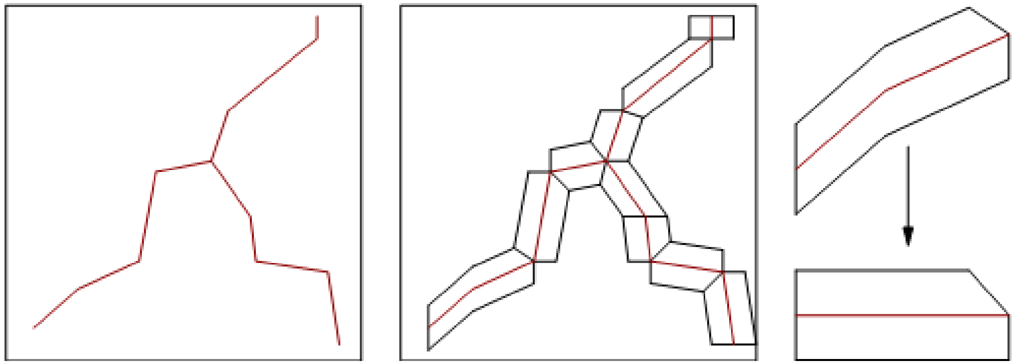
Fonction « adaptée »



➡ Ridgelet

2-D : une réponse géométrique par bases adaptatives

Transformées adaptatives

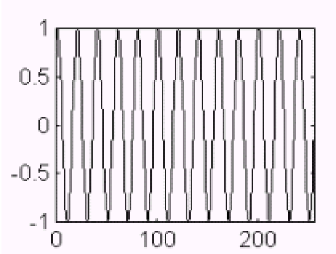


Bandelettes
et extensions

Base fixe

Transformation d’un signal nD : changement de base permettant d’obtenir une autre représentation des données (démarche non structurelle)

1. Définition de fonctions (formes) constituant la base



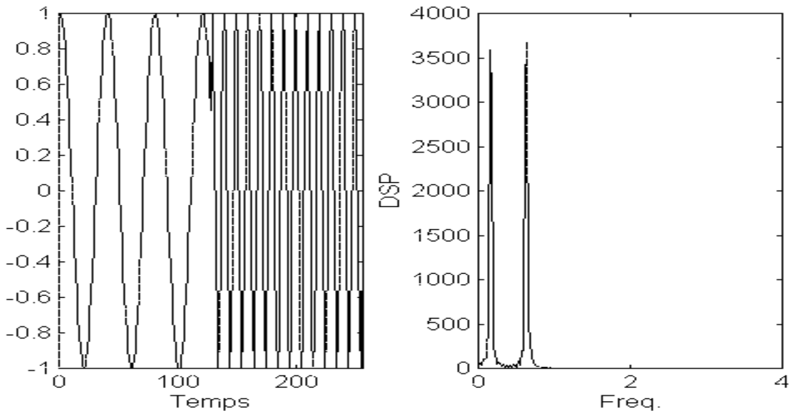
Fourier

2. Mesures de ressemblances entre les données et les fonctions de bases

☞ Transformée (produit scalaire)

But de la nouvelle représentation

☞ Extraire d’une façon optimale l’information présente dans les données

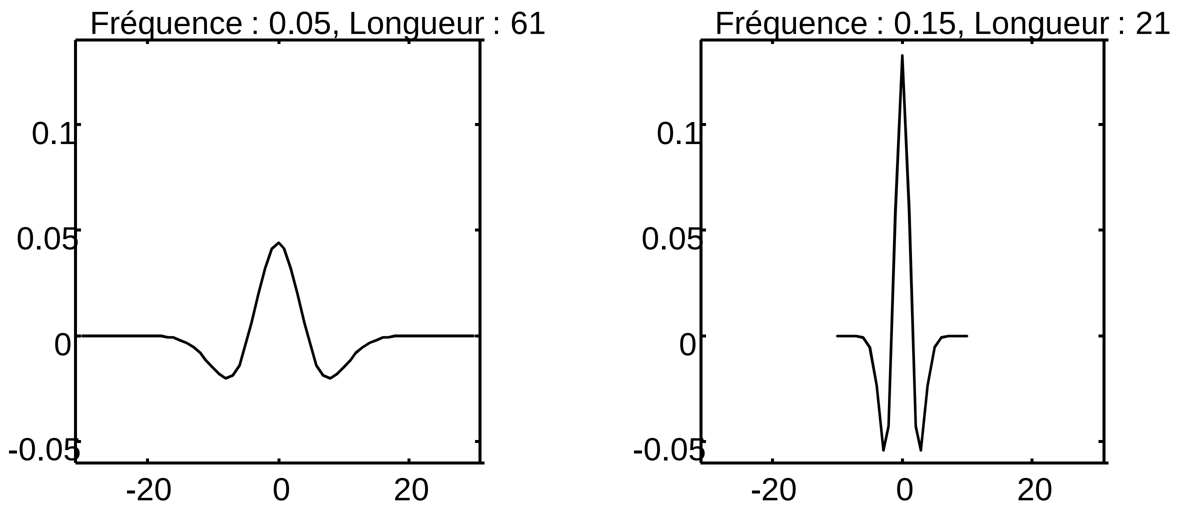


Contexte : ondelette

Idée

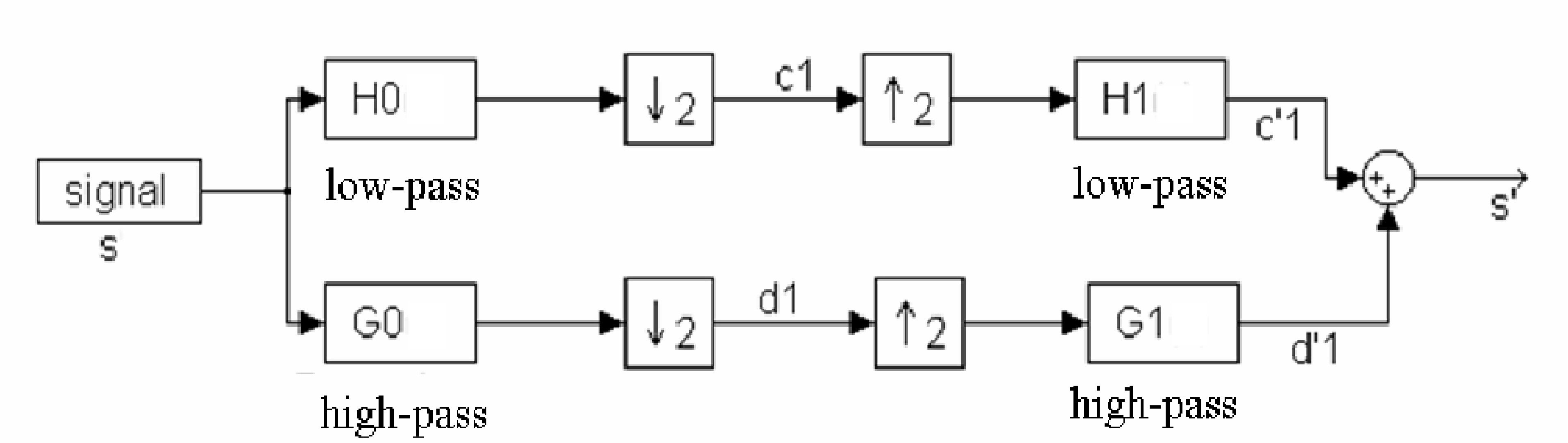
•Définir des fonctions de bases localisées spatialement et associées à une fréquence d'oscillation précise

•Adapter la taille des fenêtres en fonction de la fréquence étudiée



⇨ Construction de bases discrètes orthogonales avec reconstruction

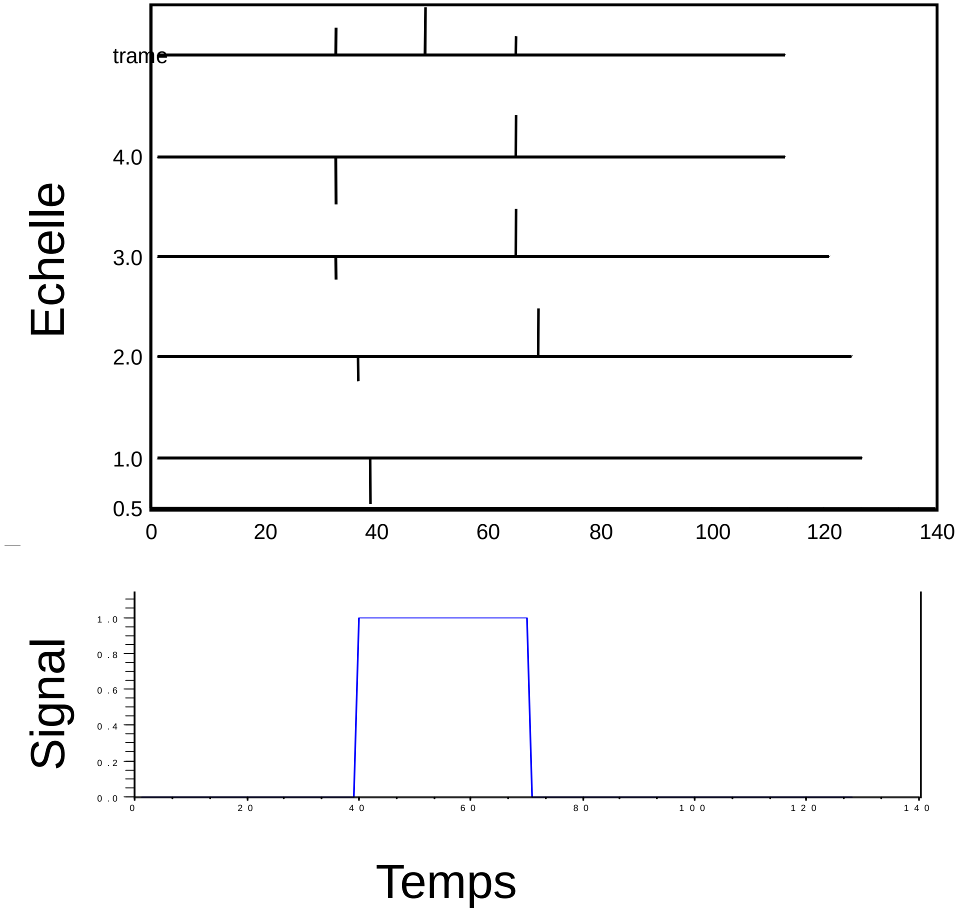
Algorithme rapide



Un ensemble de filtres liés par des opérateurs de ré-échantillonnage

$$\boxed{s' = s}$$

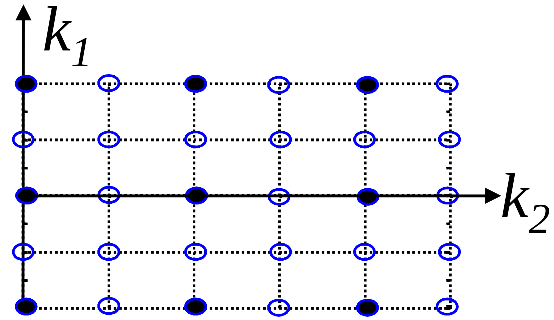
Singularitées

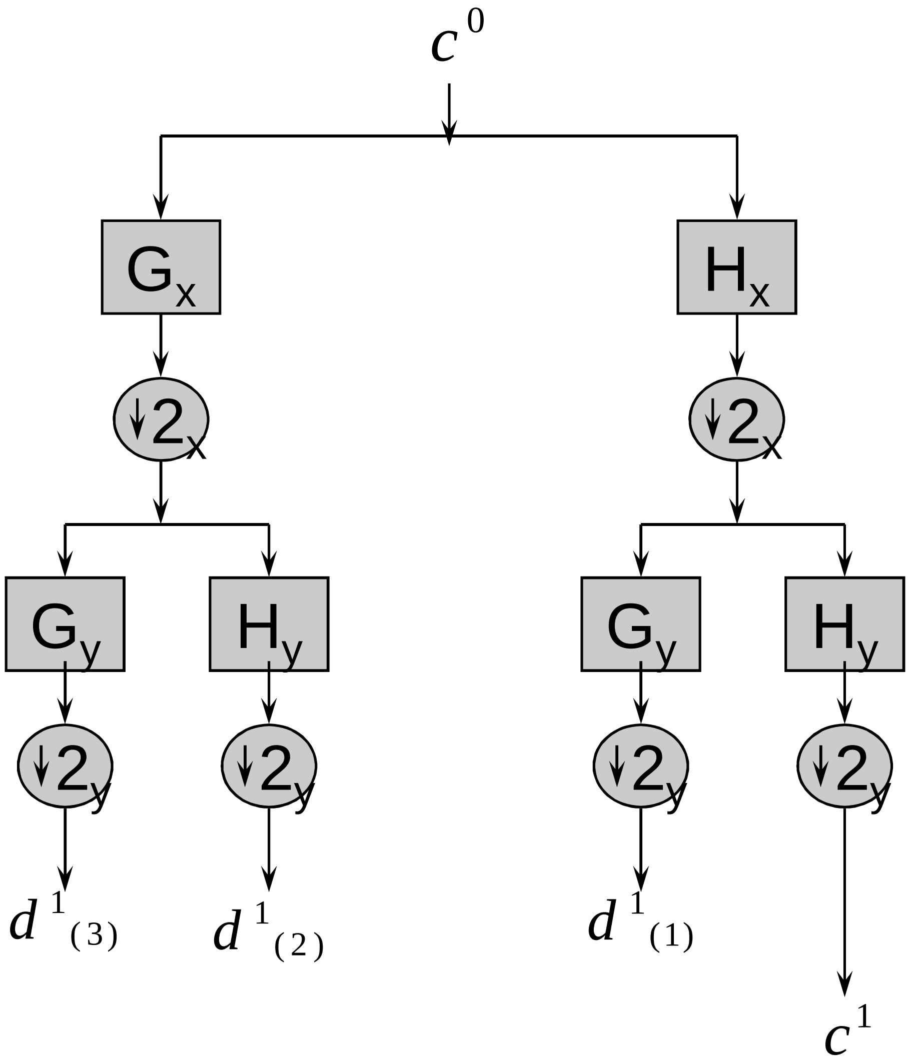


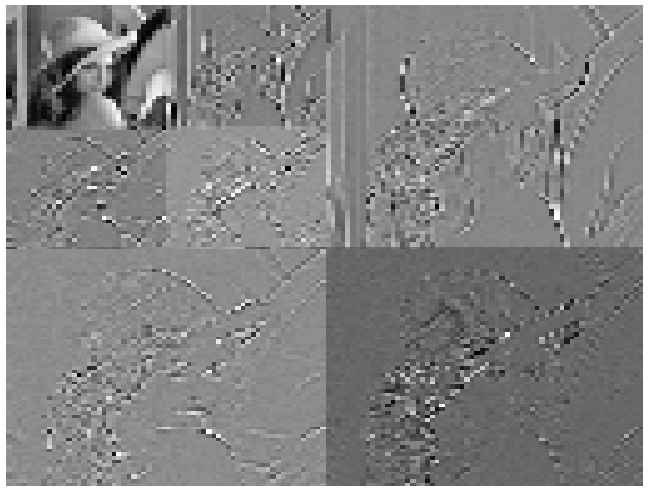
Décomposition séparable

Dilatation séparable

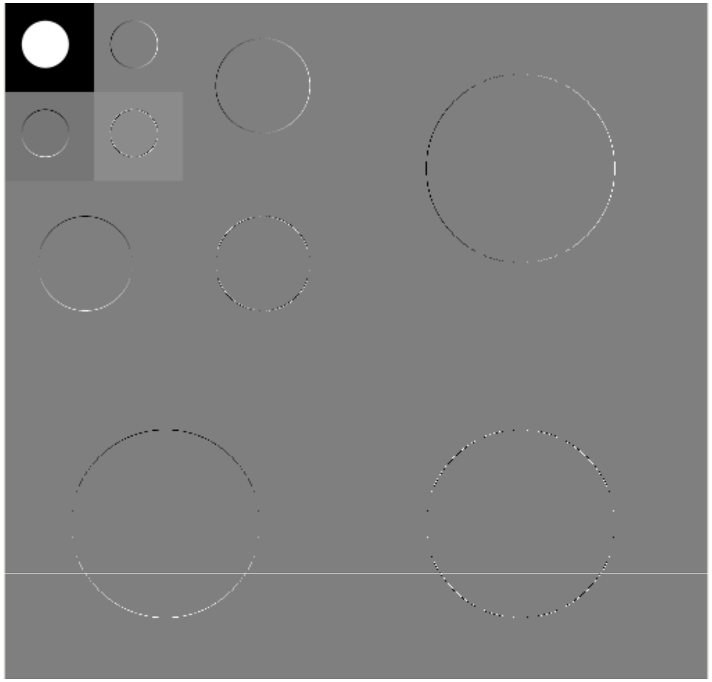
$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$





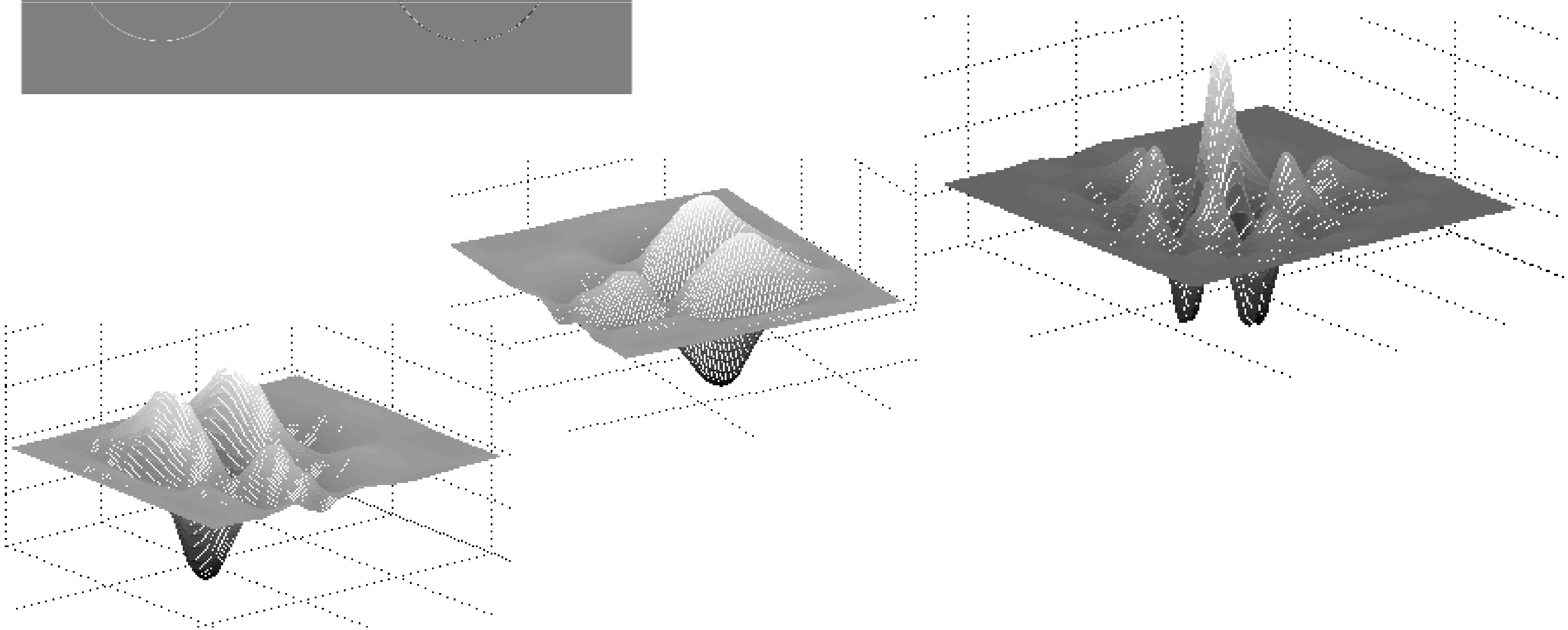


Discontinuités 2-D



Ondelettes meilleures que Fourier mais

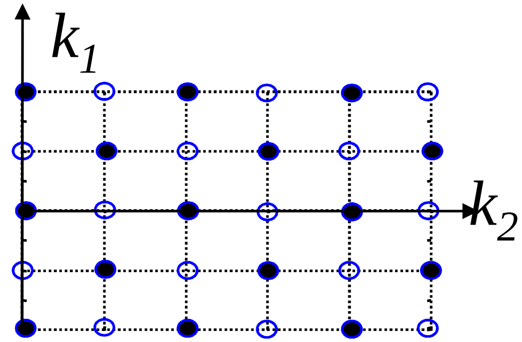
- Détectent les singularités pas la structure contour
- Directions privilégiées
- Trois plans d'ondelettes par échelle

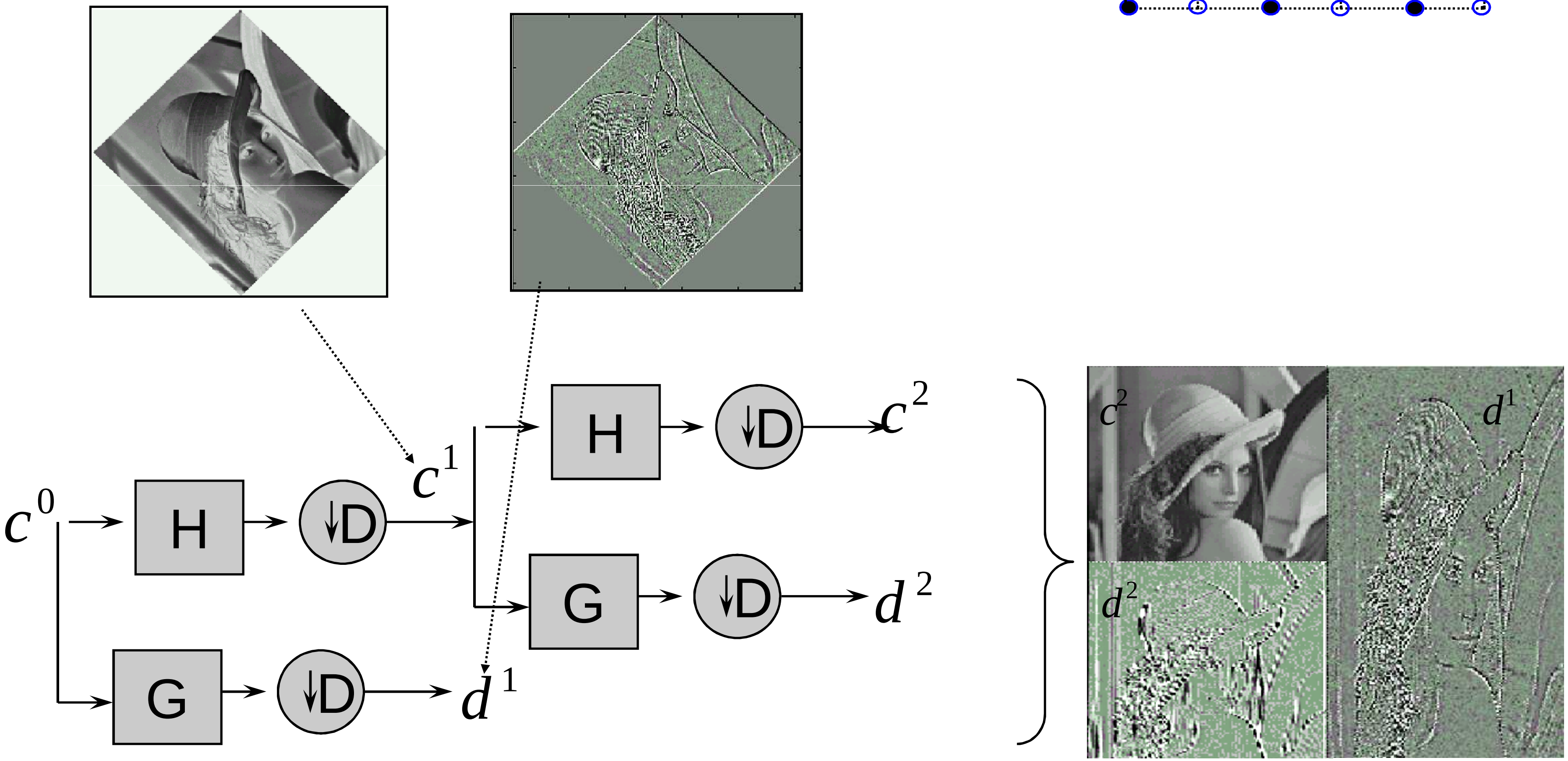


Exemple de décomposition à 2 canaux

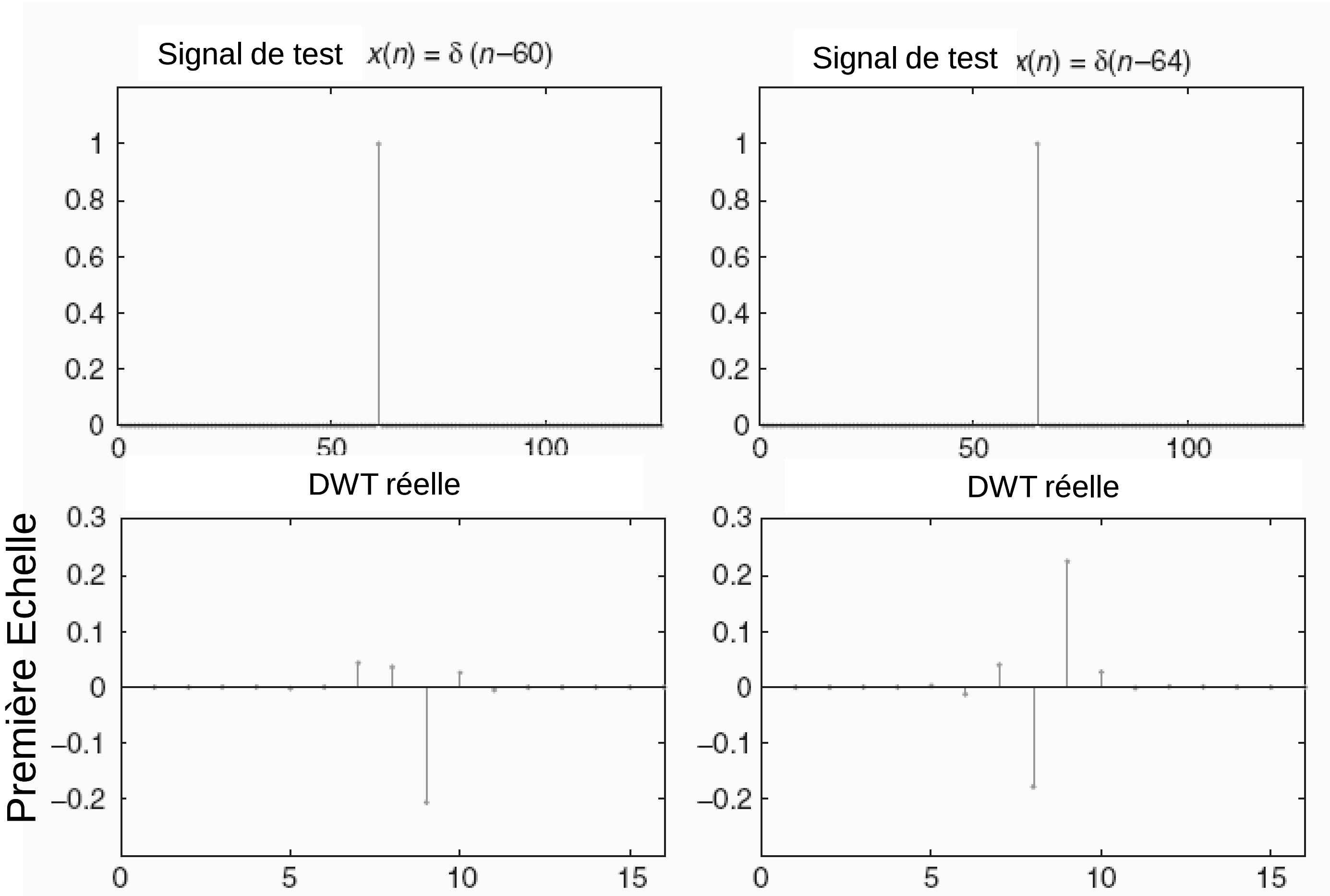
Dilatation en quinconce

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$





Problème avec la transformée en ondelette réelle



Oscillations ; Sensibilité à la translation ; Problème de direction pour la transformée 2-D

Ondelette Complexe

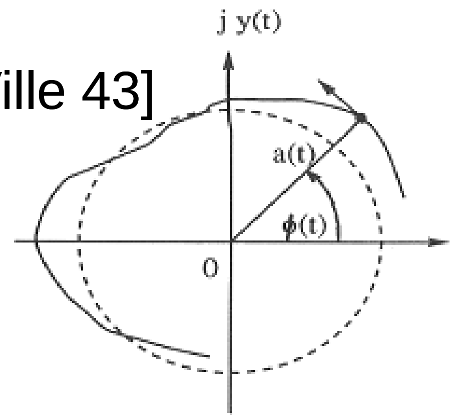
Bülow : Signal Analytique

Kingsbury : Shift invariant

Retour aux sources

Outils Temps-Fréquence : notion de phase, fréquence et énergie instantanée

[Ville 43]



$$z(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

Signal analytique

$$s(t) + jH[s(t)]$$

Signal analytique : obtenu par suppression des fréquences négatives

Calcul du signal analytique $s_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$S_a(f) = (1 + \mathrm{sign}(f))S(f)$$

Transformée de Hilbert

$$s_a(t) = s(t) + js_H(t)$$

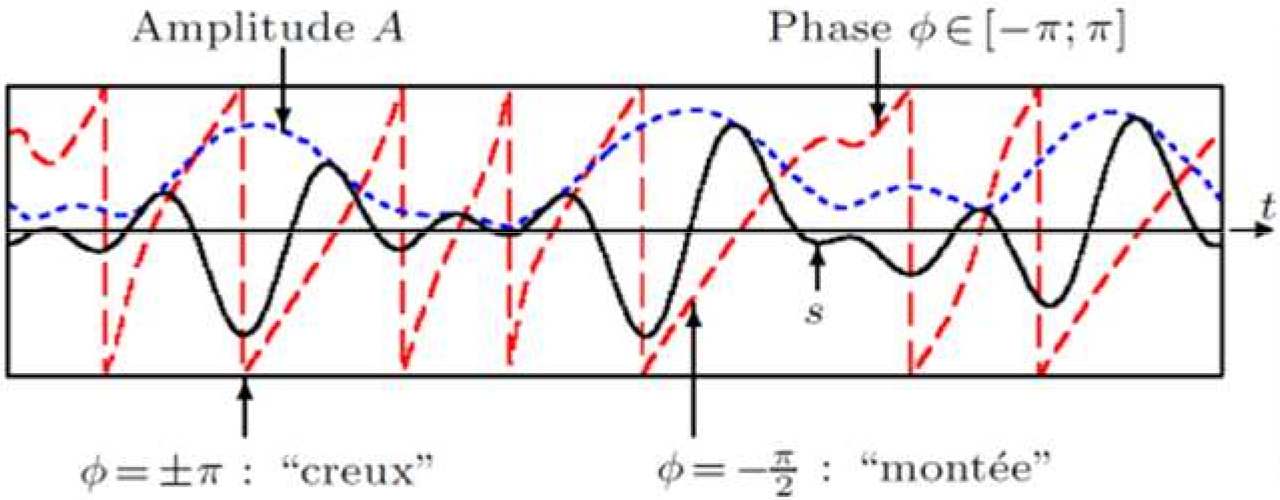
G(f)=-*j* sign(*f*)

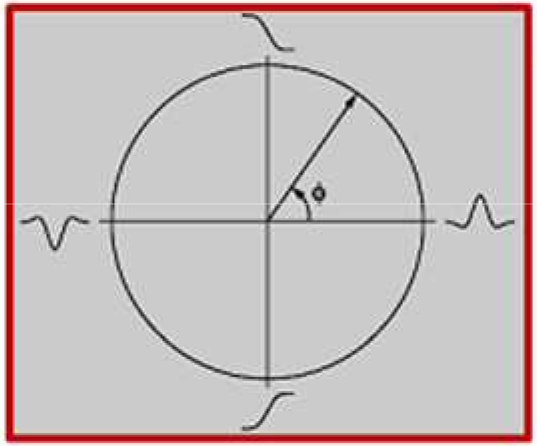
Fonctions de même module mais déphasées de 90°

Notion de phase

Energie locale $||s_a(t)||$ Phase locale $\phi(t) = \arg s_a(t)$

Fréquence instantanée



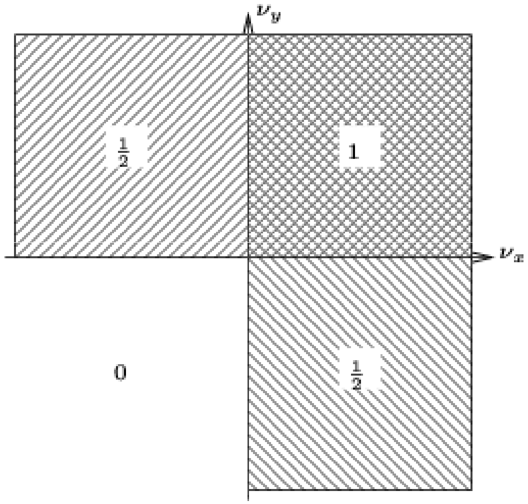


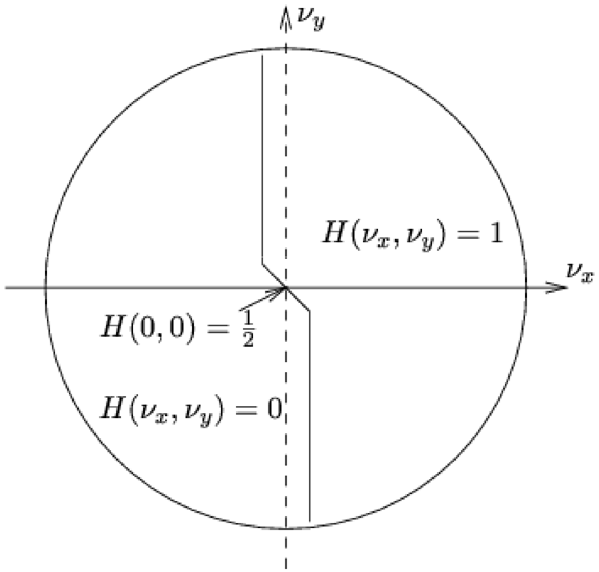
La phase locale permet une analyse des structures du signal

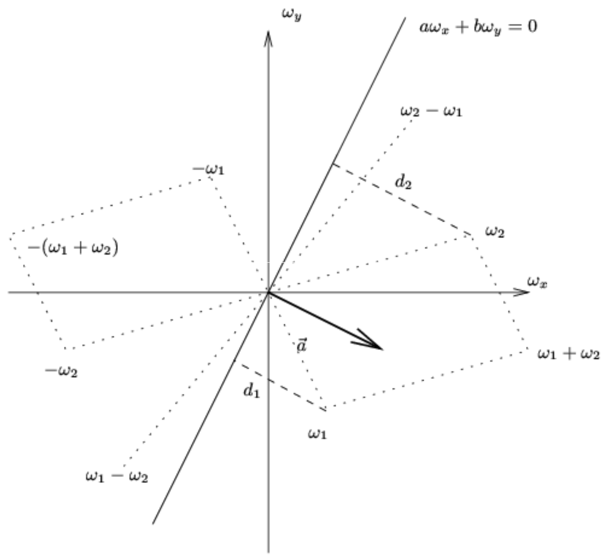
Pic $\phi(t) = 0$ Trou $\phi(t) = \pi$ Pente $\phi(t) = \pm\frac{\pi}{2}$

Notion de base : signal analytique

Extension 2-D ??? : notion de fréquences négatives







Limites des ondelettes réelles : Comparaison avec Fourier

Le module de Fourier n'oscille pas

Le module de Fourier est invariant à la translation

Les fonctions de base de Fourier 2-D sont directionnelles

Paire de Hilbert

Notion de phase

$$S(f) = \int s(t)\cos(2j\pi f t)dt + j\int s(t)\sin(2j\pi f t)dt$$

Fonction réelle oscillante

$$w_{j,k} = \int s(t)\psi_{j,k}(t)dt$$

- Construction d'une paire de Hilbert

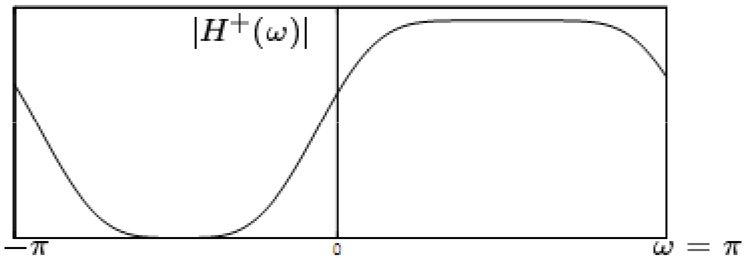
Calcul de la transformée complexe discrète 1-D ?

Solution : calcul du signal analytique avant analyse

⇨ Réponse impulsionelle infinie

Le support des fonctions analysantes devient très grand

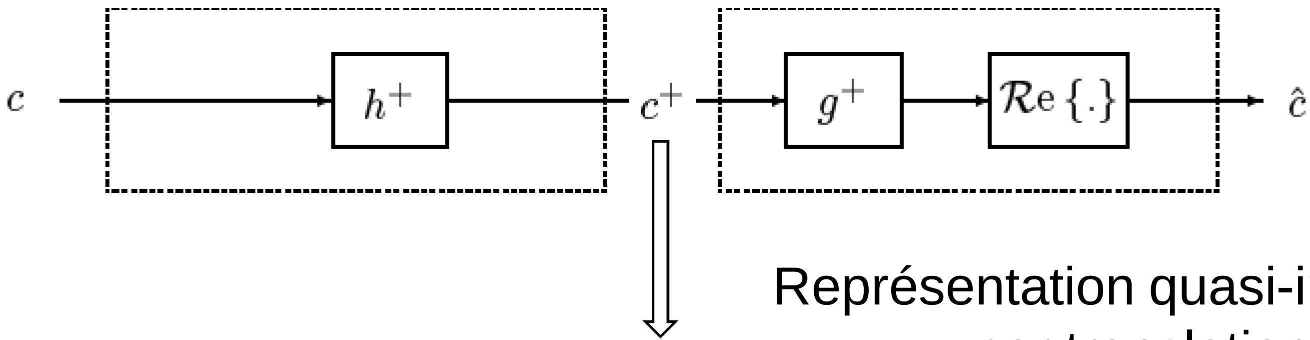
Solution de Fernandes et al. projection dans l'espace « Softy »



Filtre passe-bas : translation fréquentielle

$$H^+(z) = H_0(-jz), \quad \text{Analyse}$$

$$G^+(z) = G_0(-jz). \quad \text{Synthèse}$$



DWT

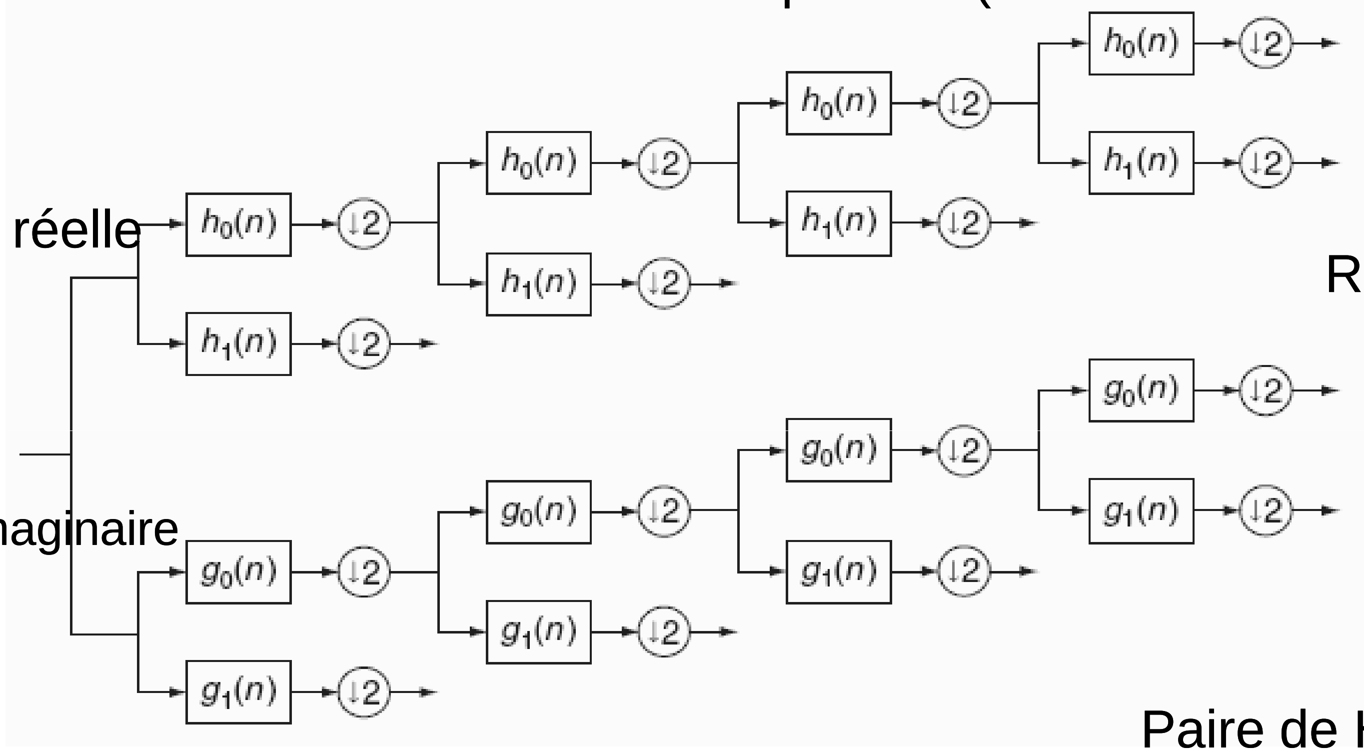
Représentation quasi-invariante par translation
Représentation redondante

Calcul de la transformée complexe 1-D ?

Solution de Kingsbury et al. : calcul par arbre dual

2 bancs de filtres à reconstruction parfaite (et conditions «classiques »)

Partie réelle



Partie imaginaire

Redondance 2

Paire de Hilbert

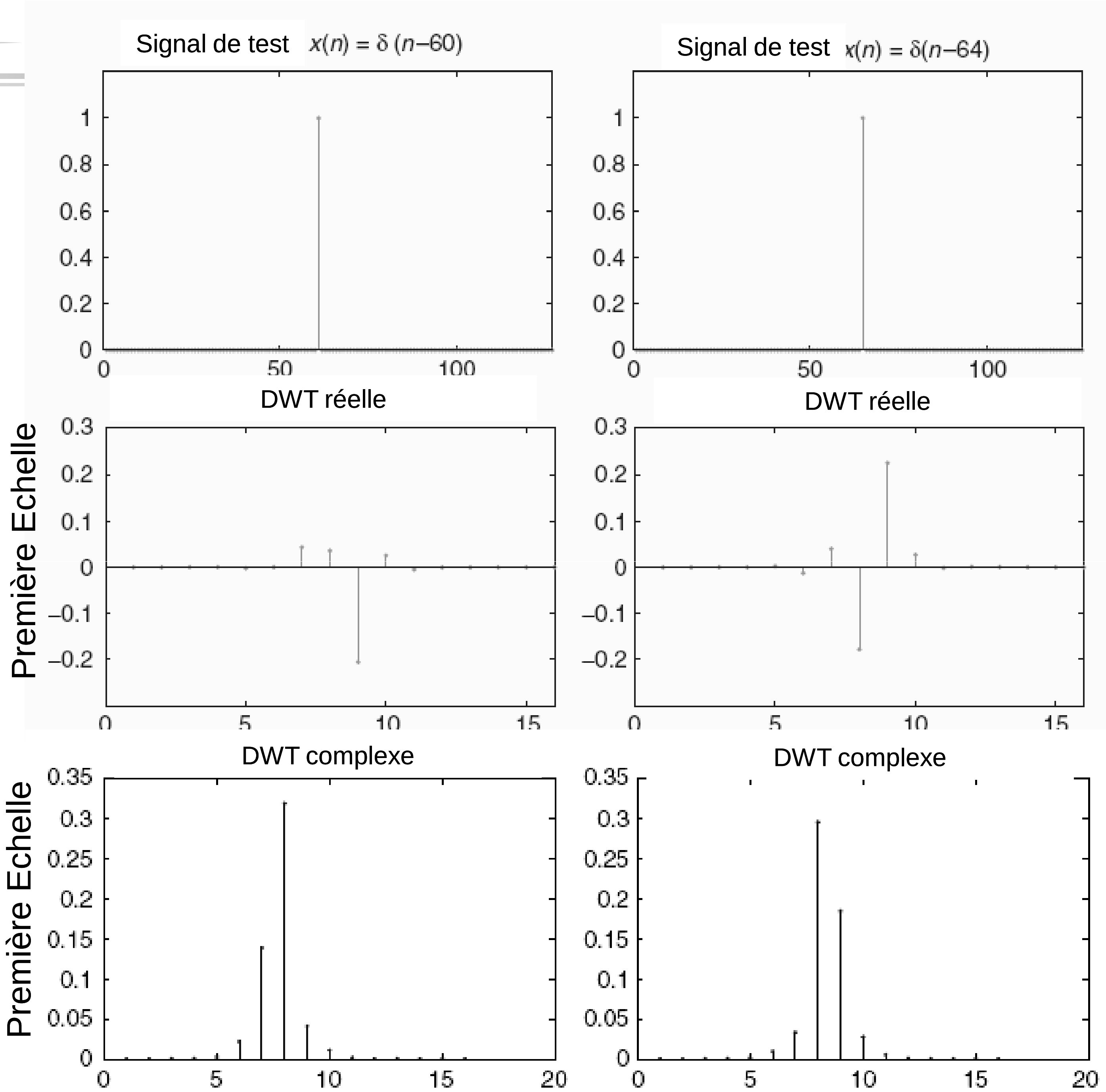
Contrainte : les filtres doivent être définis afin qu'ils vérifient

$$\psi(t) = \psi_h(t) + j\psi_g(t)$$

Mais aussi les autres contraintes de reconstruction parfaite, de support fini.

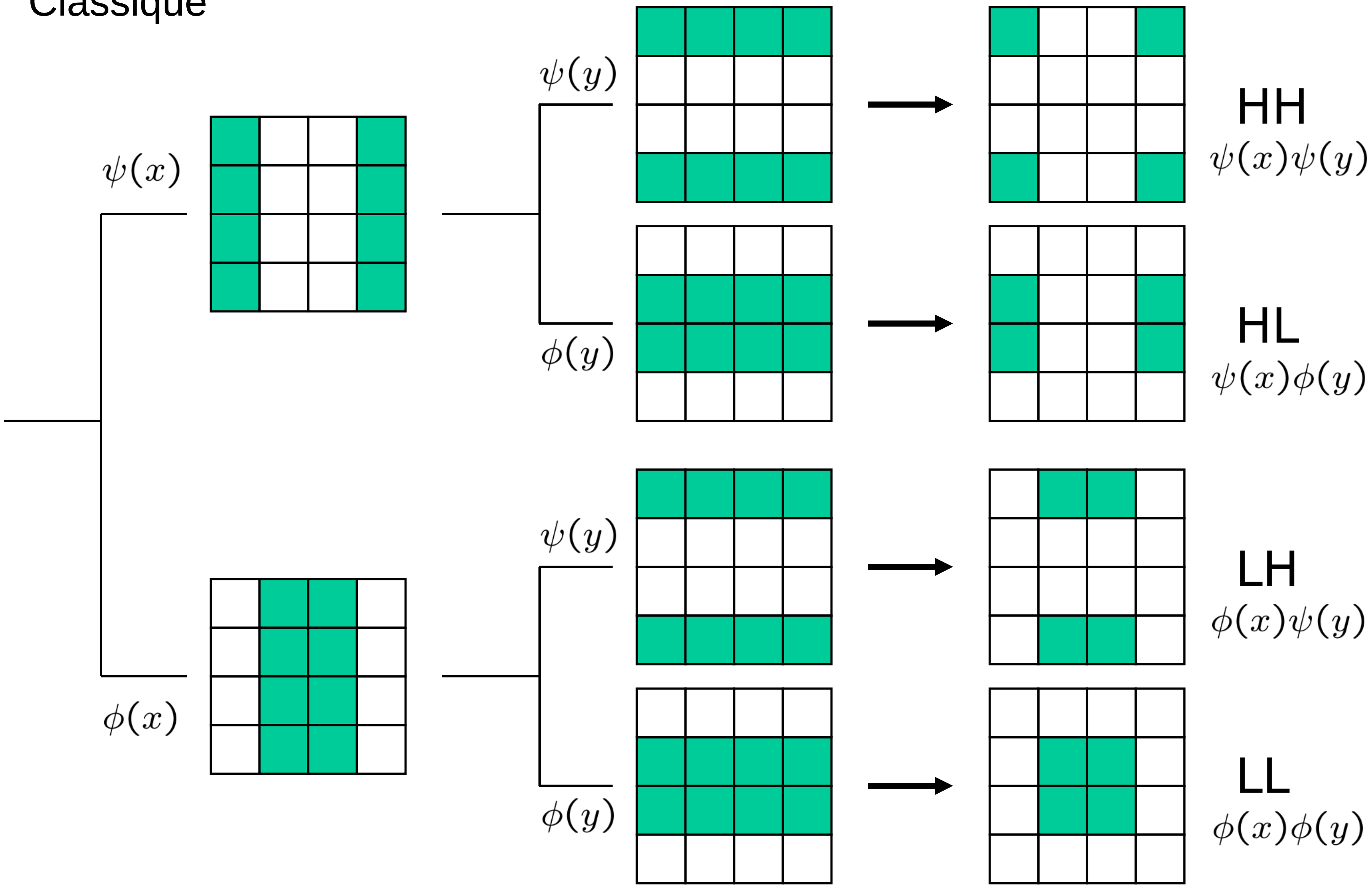
Ces contraintes peuvent être antagonistes

Selesnick

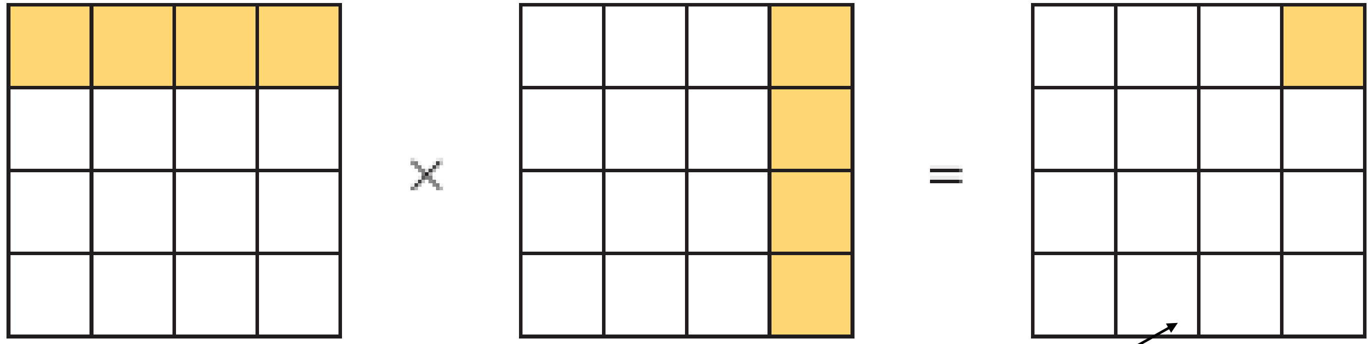

Signal de test $x(n) = \delta(n-60)$
Signal de test $x(n) = \delta(n-64)$
DWT réelle
DWT réelle
Première Echelle
DWT complexe
DWT complexe
Première Echelle

2D ???

Classique

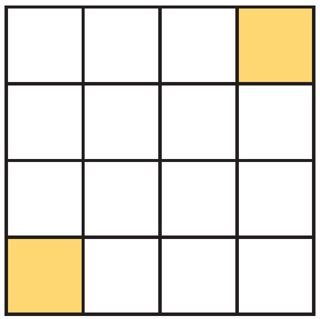


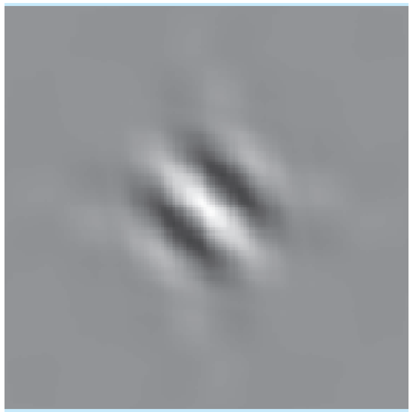
Arbre Double 2D : analyse orientée

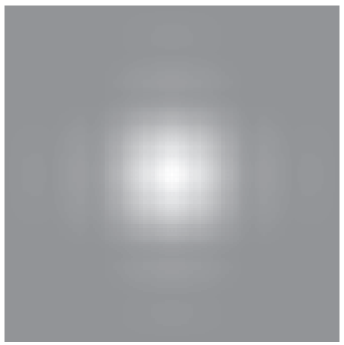


$$\psi(x) = \psi_h(x) + j\psi_g(x) \quad \psi(y) = \psi_h(y) + j\psi_g(y)$$

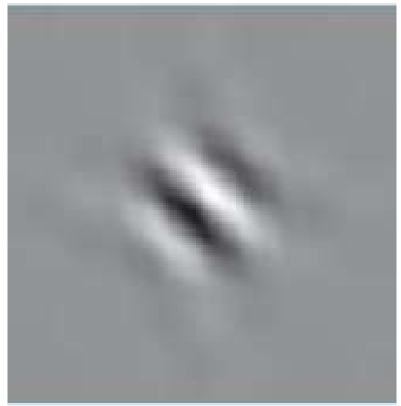
$$\psi(x,y) = \underbrace{\psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y)}_{\text{Partie réelle}} + j\left[\underbrace{\psi_g(x)\psi_h(y) + \psi_h(x)\psi_g(y)}_{\text{Partie imaginaire}}\right]$$





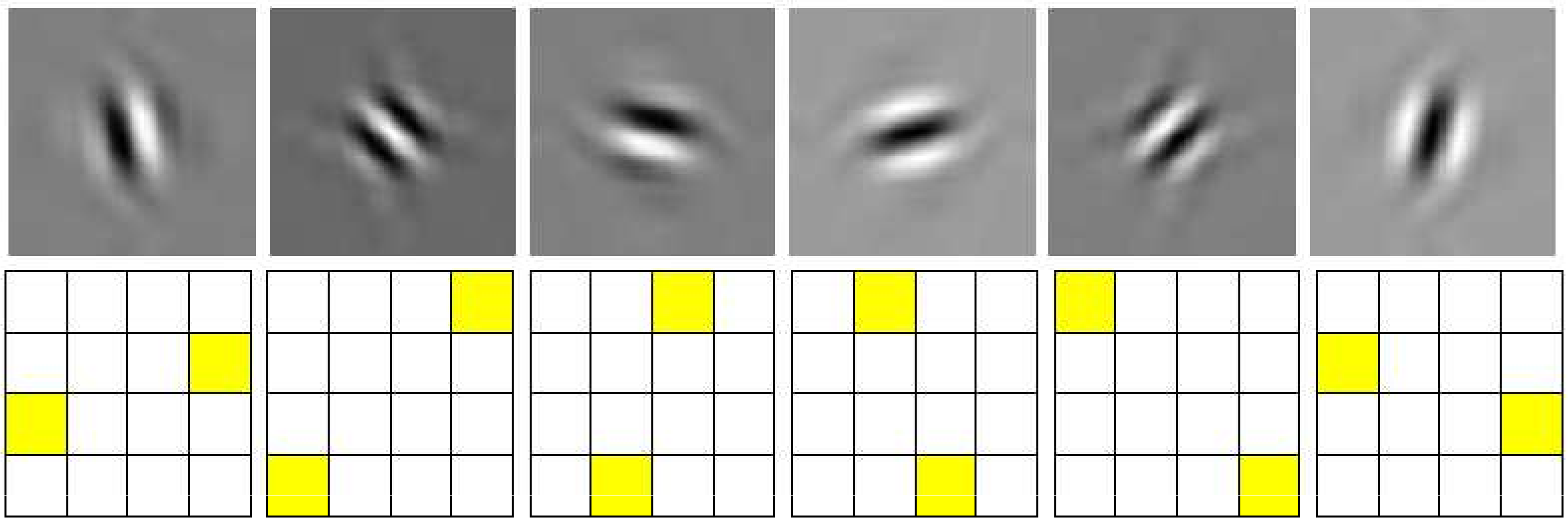


Enveloppe



Fonction analysante réelle et complexe

Construction des 6 différentes combinaisons



Arbre dual 2-D orienté et réel

$$\psi_i(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x,y) - \psi_{2,i}(x,y)),$$

$$\psi_{i+3}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,i}(x,y) + \psi_{2,i}(x,y))$$

$$\psi_{1,1}(x,y) = \phi_h(x)\,\psi_h(y), \quad \psi_{2,1}(x,y) = \phi_g(x)\,\psi_g(y),$$
$$\psi_{1,2}(x,y) = \psi_h(x)\,\phi_h(y), \quad \psi_{2,2}(x,y) = \psi_g(x)\,\phi_g(y),$$
$$\psi_{1,3}(x,y) = \psi_h(x)\,\psi_h(y), \quad \psi_{2,3}(x,y) = \psi_g(x)\,\psi_g(y).$$

i=1,2,3

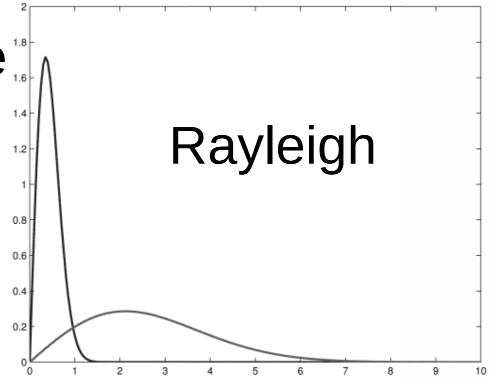
Représentation complexe (« analytique ») : utilisation de la partie réelle et partie imaginaire

Première application

Résout le problème de la variance par translation — Kingsbury

Moins redondante qu'une transformée non-décimée, analyse orientée

Première génération : seuillage selon le module



⇨ Résultat similaire à UWT

Evolution : intégration de la dimension Phase

Utilisation du mélange de Gaussienne

Introduit par Portilla (Steerable pyramid)

Applications des Ondelettes Complexe : débruitage

Noisy image

Standard GSM denoising

Dual model GSM denoising

Introduction de l'information de phase

Classification de texture

Majorité des cas : estimation d'un paramètre selon le module des différentes orientations

Quelques travaux modélisant la phase (par exemple Vo étudie la différence de phase)

Distribution circulaire : Von Mises, Cauchy

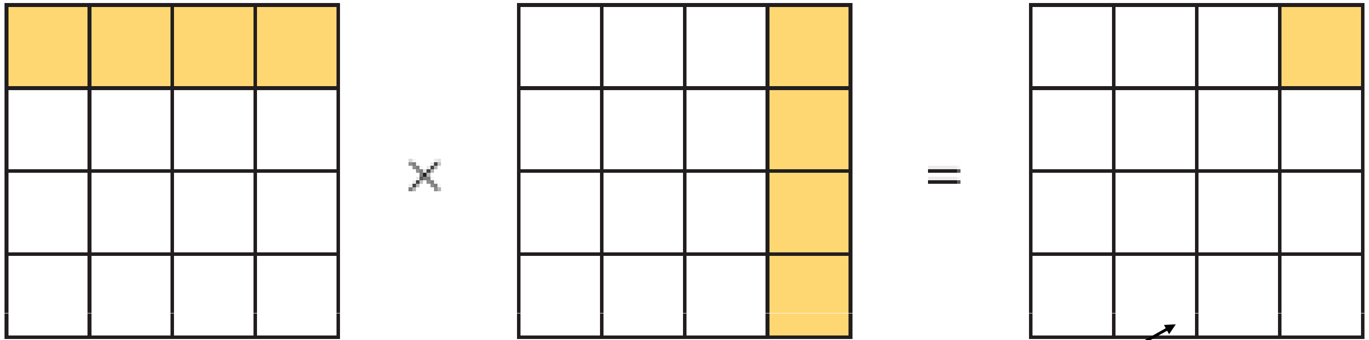
Intégration de mesures sur la phase dans le descripteur

Définition d'une distance sur une mesure angulaire

⇨ Amélioration du taux de classification

Retour à la question d'origine

Et Hilbert (Ondelette analytique 2-D) ?



$\psi(x) = \psi_h(x) + j\psi_g(x)$ $\quad$ $\psi(y) = \psi_h(y) + j\psi_g(y)$

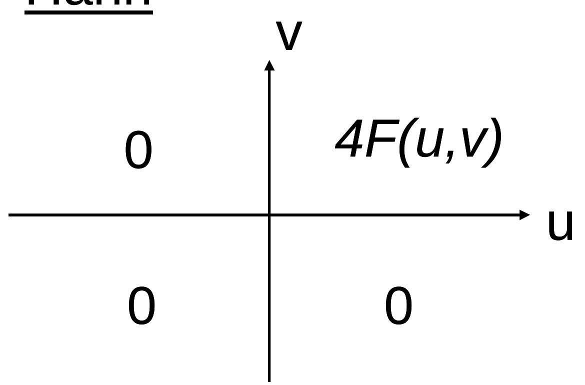
$$\psi(x,y) = \underbrace{\psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y)}_{\text{Partie réelle}} + j\,\underbrace{\left[\psi_g(x)\psi_h(y) + \psi_h(x)\psi_g(y)\right]}_{\text{Partie imaginaire}}$$

Hilbert ?

Ondelettes 2-D ? Interprétation par transformée de Hilbert

Hilbert 2-D : direct extension du 1-D

<u>Hahn</u>



$$S_a(u,v) = (1+\mathrm{sign}(u))(1+\mathrm{sign}(v))S(u,v)$$

$$s_a(x,y) = [s(x,y) - HT_{xy}(s)(x,y)] + j\,[HT_x(s)(x,y) + HT_y(s)(x,y)]$$

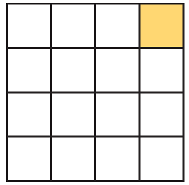
Insuffisant du fait de la symétrie hermitienne

⇨ Introduction d'un deuxième signal analytique

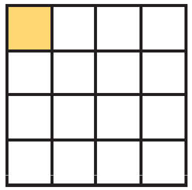
$$s_{a_2}(x,y) = [s(x,y) + HT_{xy}(s)(x,y)] + j\,[HT_x(s)(x,y) - HT_y(s)(x,y)]$$

Permet de couvrir le quadrant en haut à gauche

Lien entre Hahn et Arbre-double 2D complexe



$$\psi(x,y) = \psi_h(x)\psi_h(y) - \psi_g(x)\psi_g(y) + j\left[\psi_g(x)\psi_h(y) + \psi_h(x)\psi_g(y)\right]$$



$$\psi(x,y) = \psi_h(x)\psi_h(y) + \psi_g(x)\psi_g(y) + j\left[\psi_g(x)\psi_h(y) - \psi_h(x)\psi_g(y)\right]$$

Correspond au signal analytique selon Hahn de $\psi(x,y) = \psi_h(x)\psi_h(y)$

2 signaux analytiques donc 2 modules et 2 phases : interprétation difficile

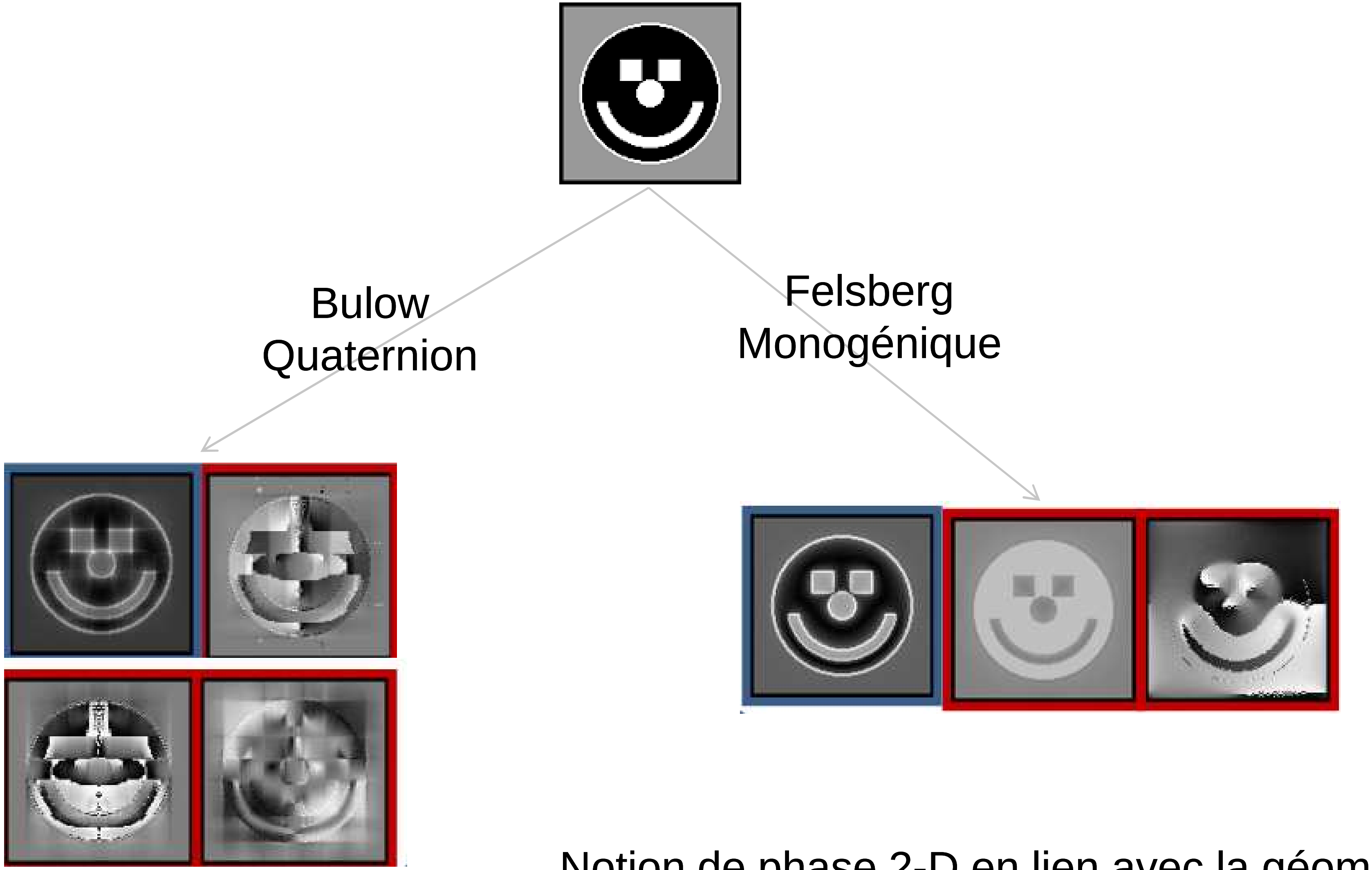
Critique : vision Fourier 2-D (phase)

- Ambiguïté dans la phase

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &\rightarrow f(x-dx, y-dy) \\
F(u,v) &\rightarrow F(u,v)e^{-2j\pi(udx+vdy)}
\end{aligned}
$$

« Extension » des complexes : quaternion

Solution : Ondelette Hypercomplexe



Notion de phase 2-D en lien avec la géométrie

Quaternion

Quaternions : Définition

$$\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$ij = -ji = k \quad et \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Partie réelle : $\Re q = a$

Partie imaginaire $\Im q = ib + jc + kd$

Conjugué : $\overline{q} = \Re q - \Im q$

Norme : $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$

Produit non commutatif : $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$

Quaternions Purs : $\mathbb{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid q = \Im q\}$,

Unitaires : $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$

Représentation

Vectorielle

$$\Re q \qquad \Im q$$

$$q = S(q) + \mathbf{V}(q)$$

scalaire vecteur

Exponentielle

μ quaternion pur unitaire

$$e^{\mu\phi} = \cos\phi + \mu \sin\phi$$

$$\phi = \arctan \frac{|\mathbf{V}(q)|}{S(q)}$$

$$\mu = \frac{\mathbf{V}(q)}{|\mathbf{V}(q)|}$$

Polaire

$$q = |q| e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} \;\; avec \;\; (\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi[\times [-\pi/2, \pi/2[\times [-\pi/4, \pi/4]$$

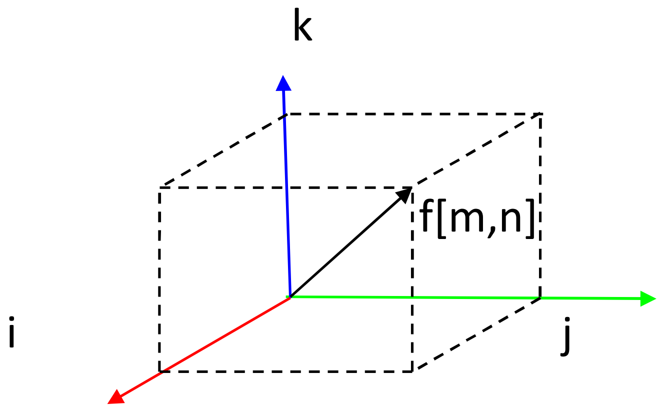
Un vecteur de longueur $|q|$ et de direction (ϕ, θ, ψ)

Une autre utilisation : Couleur

Une couleur = un vecteur de R^3

quaternion sur les 3 parties imaginaires

$$f[m,n] = r[m,n]\, i + v[m,n]\, j + b[m,n]\, \mathrm{k} \text{ [Sangwine]}$$



m et n : coordonnées spatiales

Avant les ondelettes …… Fourier

Fourier Quaternionique

Bülow

Image NvG

$$F^{l-r}(s)[f_1, f_2] = \sum_{n_2=0}^{M-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} e^{-2\pi \underset{i}{\mu} \frac{f_2 n_2}{M}} s[n_1, n_2] e^{-2\pi \underset{j}{\nu} \frac{f_1 n_1}{N}}$$

$$F^q = |F^q| e^{i\theta} e^{j\phi} e^{i\psi}$$

Translation

1. $|F^q|$ est invariant à la translation

2 (θ, ϕ) sont modifiés linéairement par la translation

$$f(x,y) \rightarrow f(x-dx, y-dy) \quad \Rightarrow \quad (\theta, \phi, \psi) \rightarrow (\theta - udx, \phi - vdy, \psi)$$

Notion de signal analytique ?

Symétrie ?

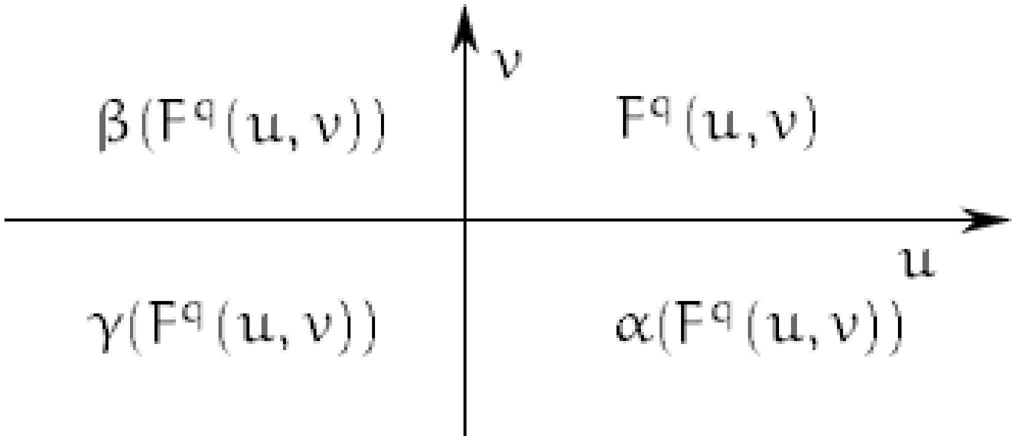
$$\begin{aligned}\alpha(q) &= -iqi = q_0 + iq_1 - jq_2 - kq_3, \qquad & \gamma(q) &= -kqk = q_0 - iq_1 - jq_2 + kq_3,\\ \beta(q) &= -jqj = q_0 - iq_1 + jq_2 - kq_3,\end{aligned}$$

Notion de conjugaison

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$ est hermitienne au sens des quaternions (Bülow) si

$$f(x,-y) = \alpha(f(x,y)) \qquad f(-x,-y) = \gamma(f(x,y)) \qquad f(-x,y) = \beta(f(x,y))$$

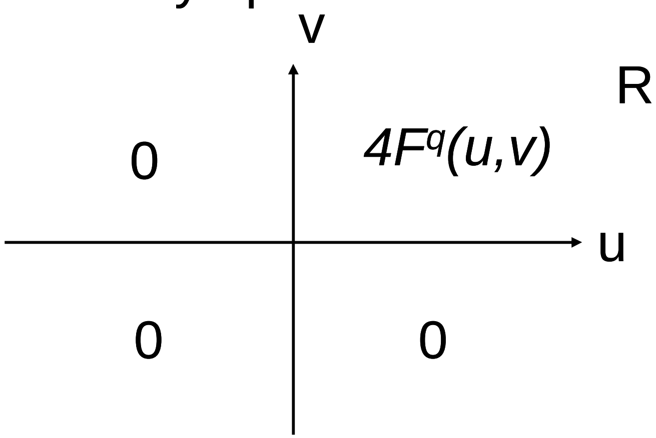
La transformée QFT d’un signal réel est hermitienne au sens des quaternions



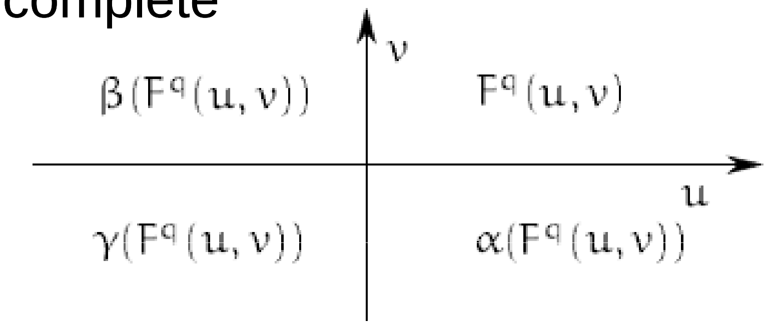
Signal analytique quaternionique

La transformée QFT d'un signal réel est hermitienne au sens des quaternions

Signal analytique selon Hahn



Représentation complète

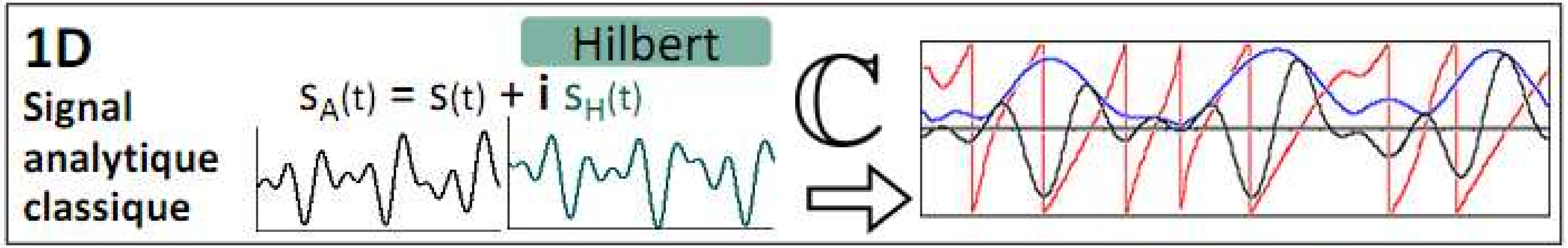


$$S_a^q(u,v) = (1+\text{sign}(u))(1+\text{sign}(v))S^q(u,v)$$

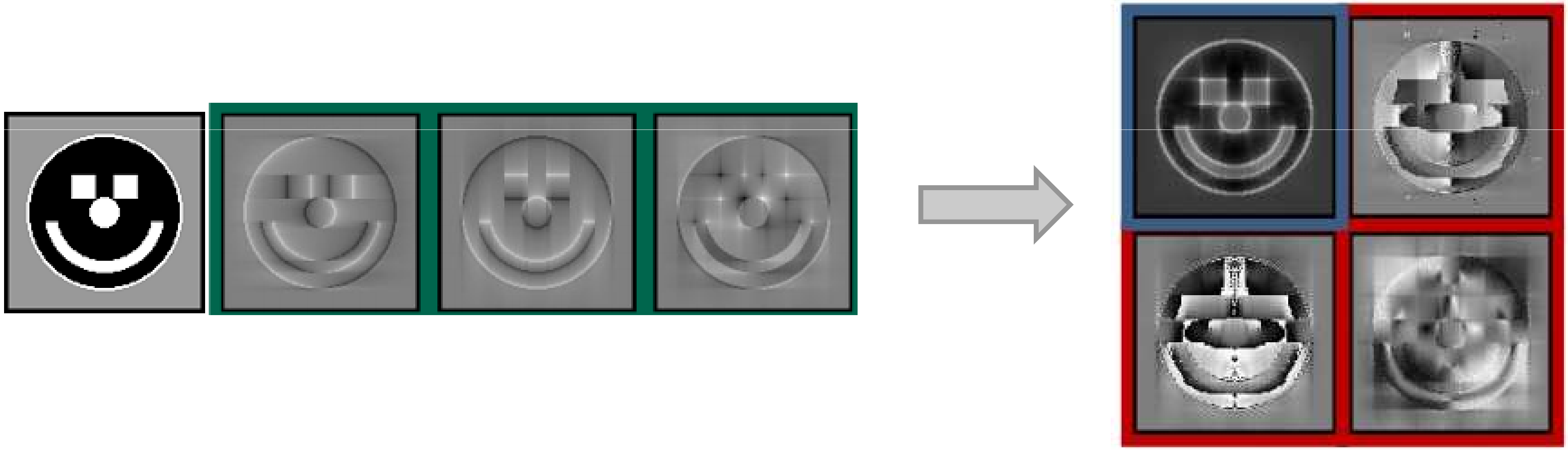
$$\Updownarrow$$

$$s_a^q(x,y) = s(x,y) + iHT_x(s)(x,y) + jHT_y(s)(x,y) + kHT_{xy}(s)(x,y)$$

Phase quaternionique



$$s_A^q(x,y) = s(x,y) + \mathbf{HT}_x[s](x,y)i + \mathbf{HT}_y[s](x,y)j + \mathbf{HT}_{xy}[s](x,y)k$$



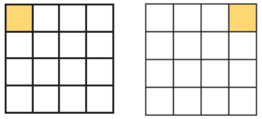
Extension « complexe » réellement 2D

$$F^q = \left|F^q\right| e^{i\theta} e^{j\phi} e^{i\psi}$$

⇒ Ondelettes Quaternioniques : adaptation du DT

Baraniuk et al

Transformée en ondelettes quaternionique

Rappel  Signal analytique selon Hahn de $\psi(x,y)=\psi_h(x)\psi_h(y)$

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(x,y) &= \psi_h(x)\psi_h(y)-\psi_g(x)\psi_g(y)+j\left[\psi_g(x)\psi_h(y)+\psi_h(x)\psi_g(y)\right]\\ \psi(x,y) &= \psi_h(x)\psi_h(y)+\psi_g(x)\psi_g(y)+j\left[\psi_g(x)\psi_h(y)-\psi_h(x)\psi_g(y)\right]\end{aligned}}$$

Rappel Signal quaternionique analytique

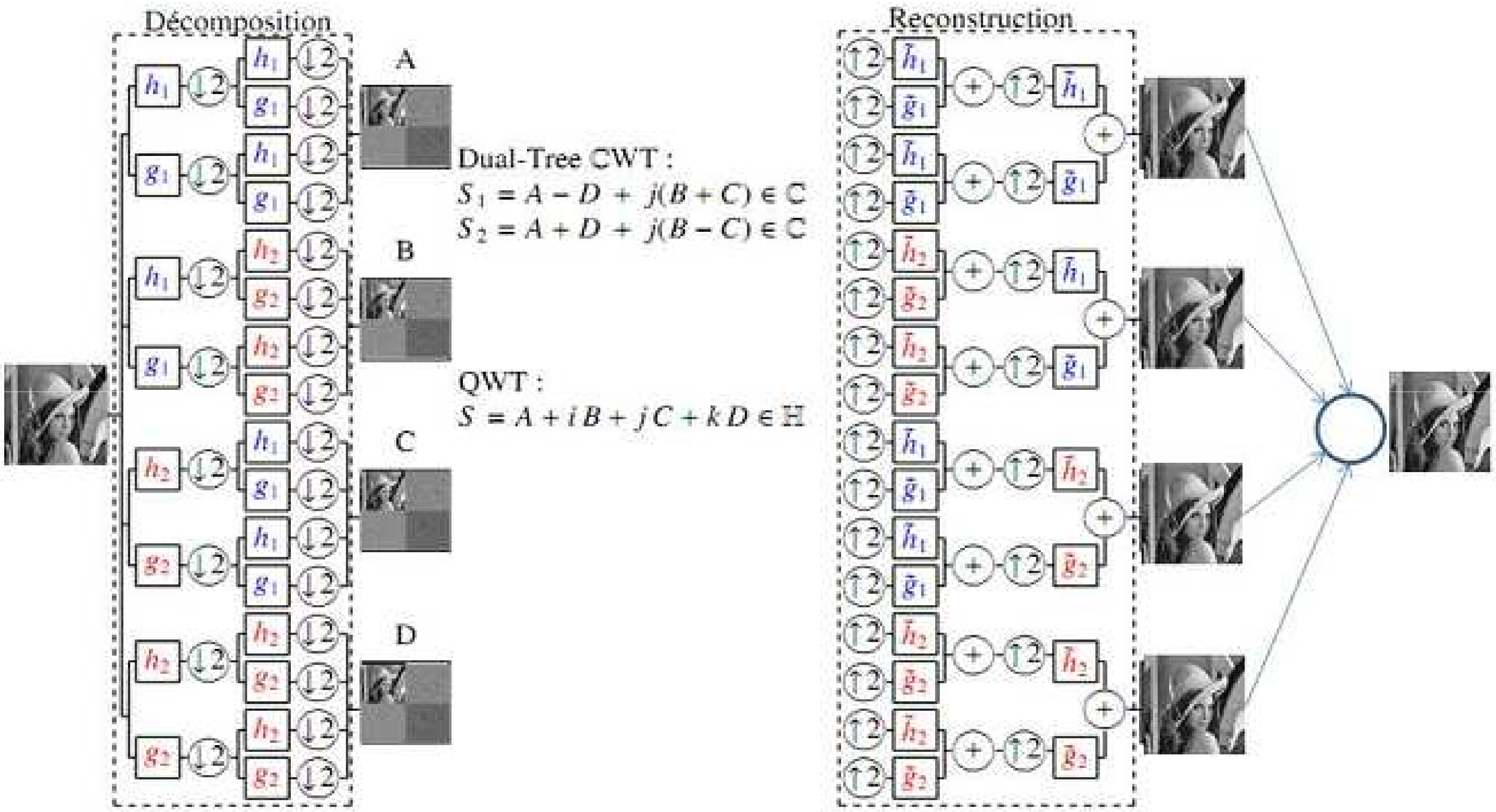
$$s_A^q(x,y)=s(x,y)+\mathbf{HT}_x[s](x,y)i+\mathbf{HT}_y[s](x,y)j+\mathbf{HT}_{xy}[s](x,y)k$$

Extention « complexe » réellement 2D

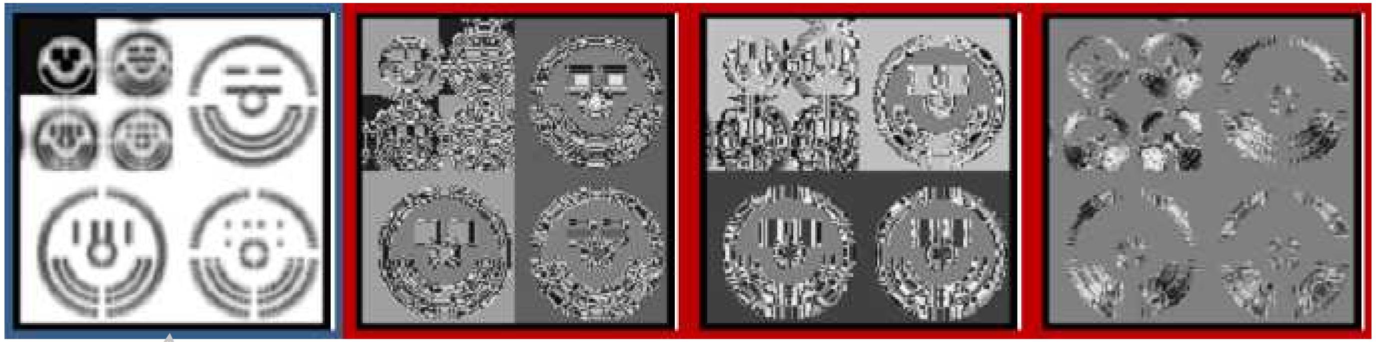
Signal quaternionique analytique de $\psi(x,y)=\psi_h(x)\psi_h(y)$

$$\psi^q(x,y)=\psi_h(x)\psi_h(y)+i\psi_g(x)\psi_h(y)+j\psi_h(x)\psi_g(y)+k\psi_g(x)\psi_g(y)$$

Transformée en ondelettes quaternionique



Transformée en ondelettes quaternionique



Présence d'information

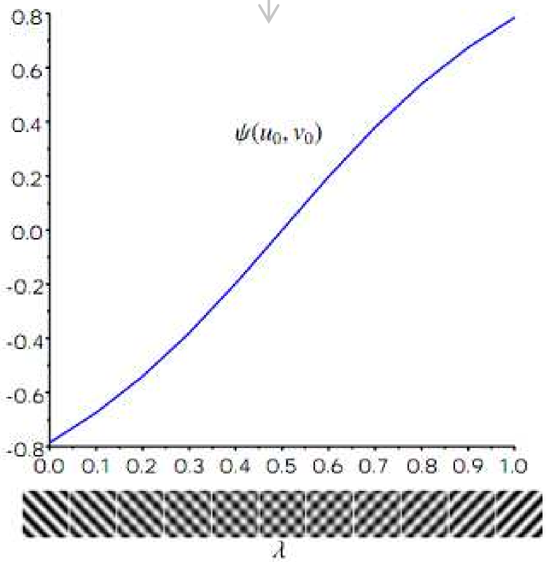
Décalage spatial

Texture

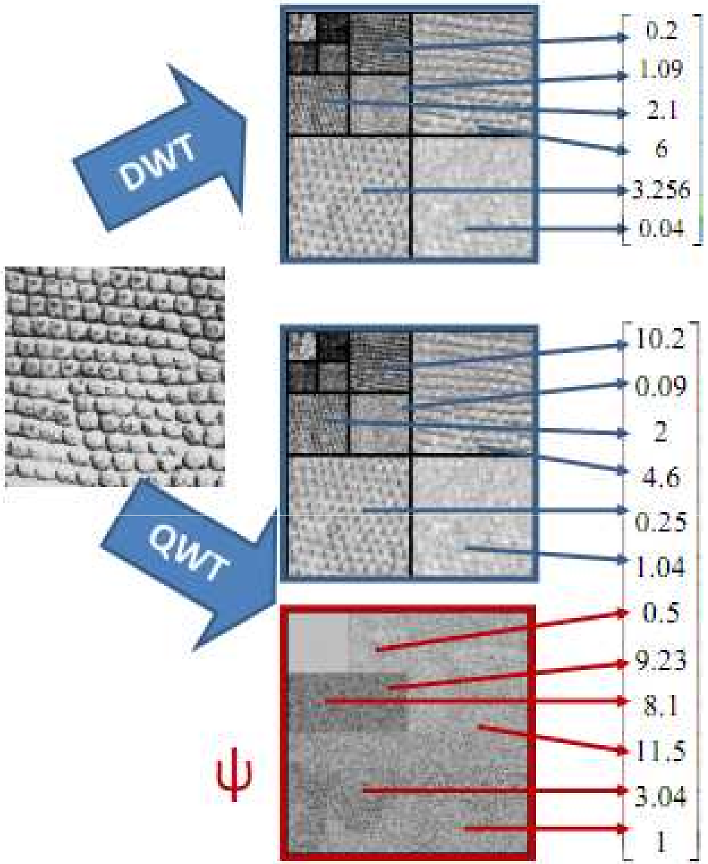
$$f_2(x, y) = f_1(x - r_x, y - r_y)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_2(u, v) \\ \theta_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) - 2\pi u r_x \\ \theta_1(u, v) - 2\pi v r_y \end{pmatrix}$$



QWT : classification



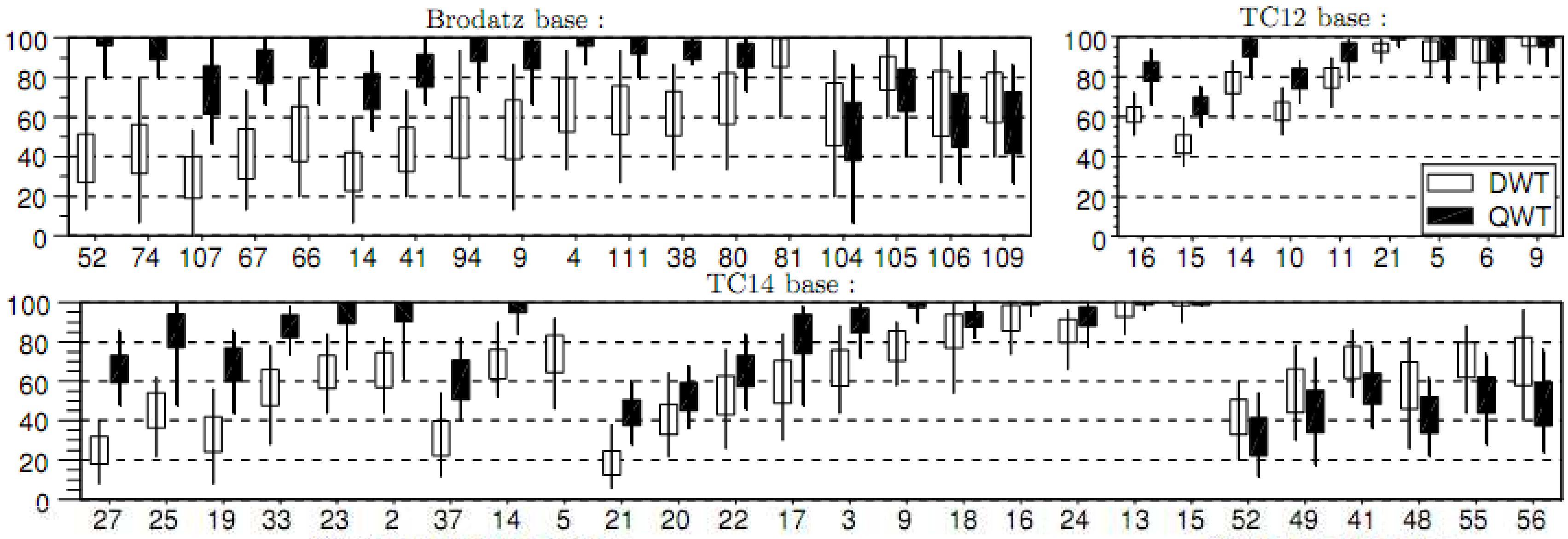
[Soulard 10]

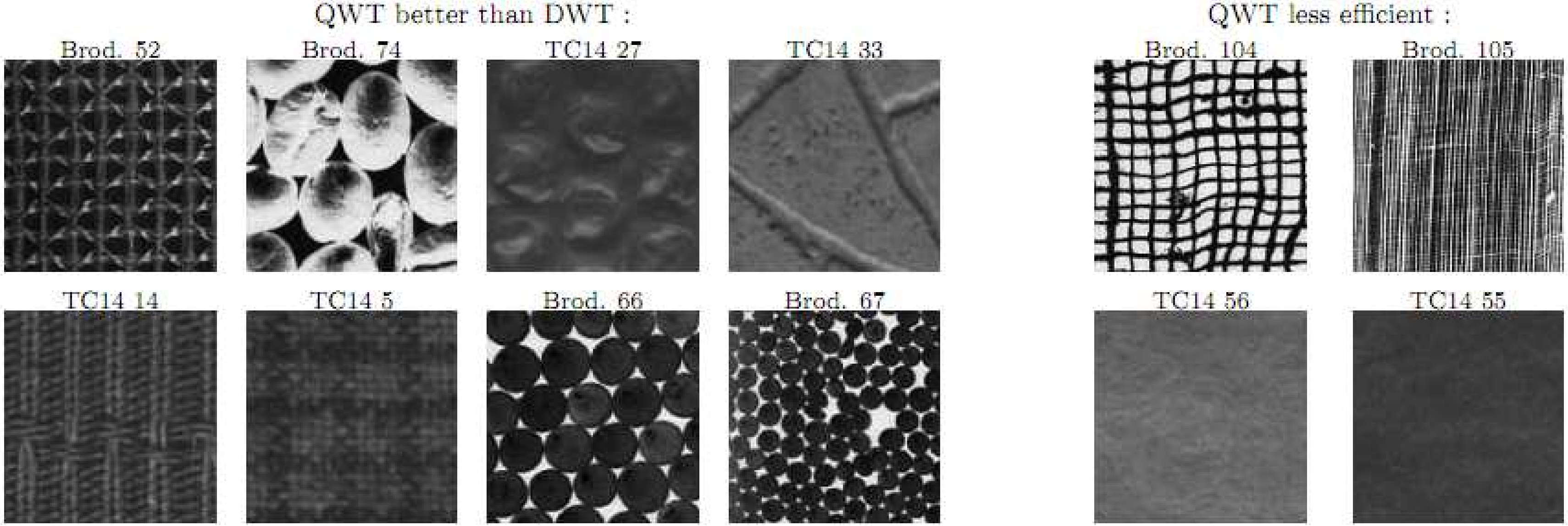
$$m = \sqrt{\frac{1}{NM}\sum_{i,j}(M_{ij}-\mu)^2}$$ Std Norme

$$m = \sqrt{\sum_{i,j} W_{ij}(\psi_{ij}-\mu_W)^2}$$ Std Phase

	Brodatz		TC12		TC14	
	Moy	Std	Moy	Std	Moy	Std
DWT Mod.	64%	9	83%	4	56%	8
QWT Mod.	64%	9	82%	4	51%	8
QWT Phase	65%	8	79%	4	58%	6
QWT Comb.	**76%**	**7**	**91%**	**4**	**63%**	**6**
CWT Mod.	65%	8	87%	4	62%	7

QWT : classification

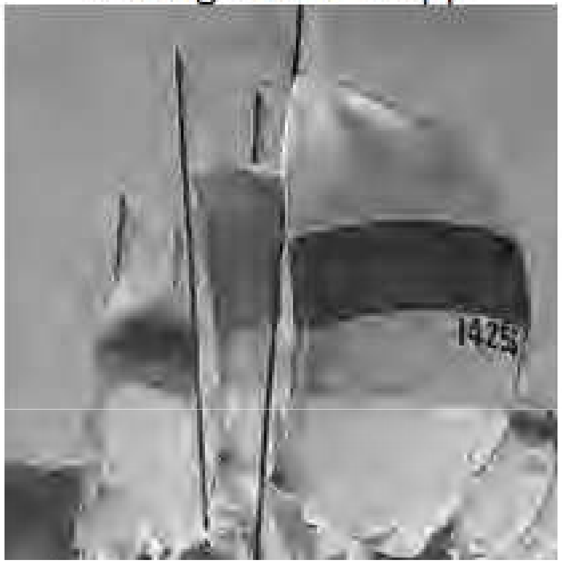




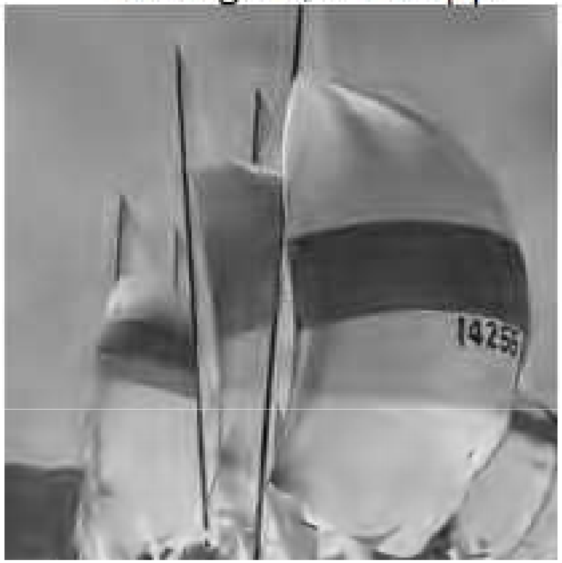
Transformée en ondelettes quaternionique

Original

Codage DWT 5 bpp



Codage QWT 5 bpp



QWT : Bilan

Vraie définition 2-D

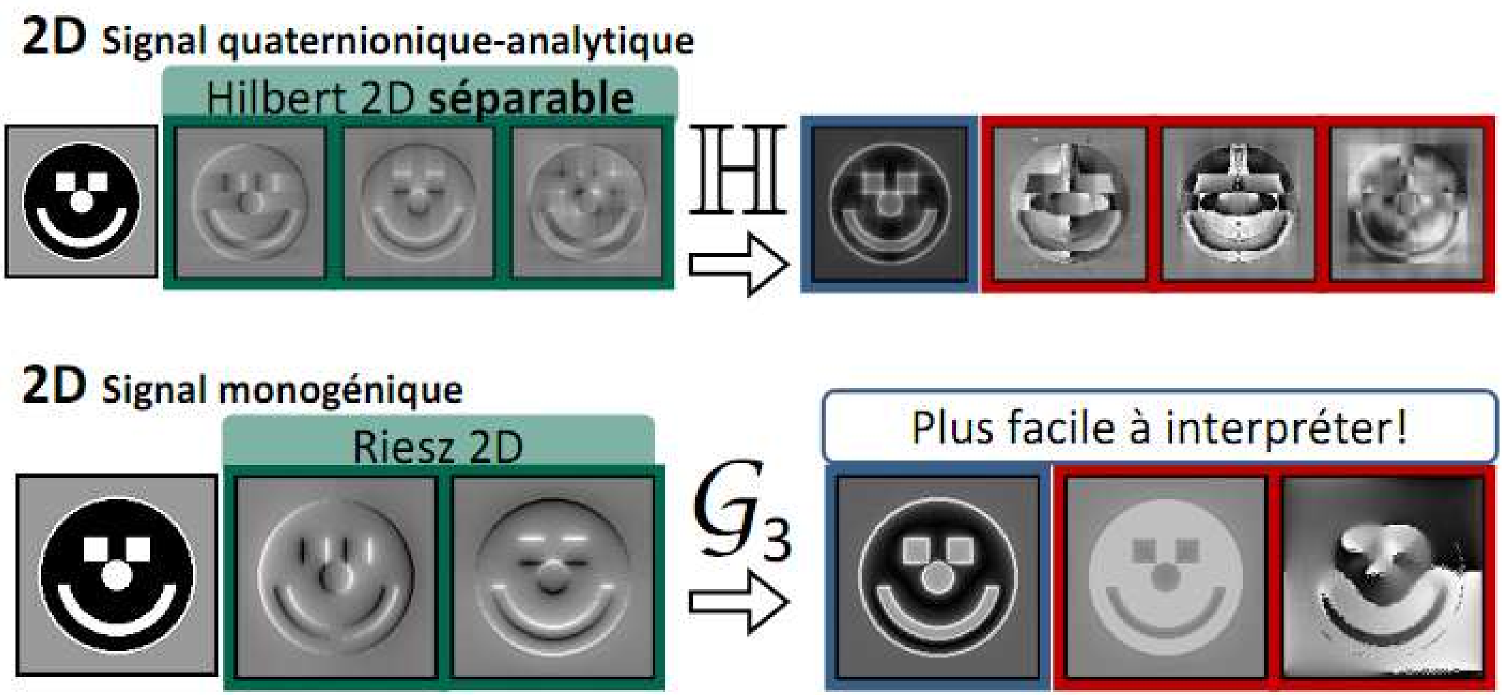
Domaine applicatif prometteur

Algorithme de Calcul

Phase difficile à interpréter

Variance à la rotation

Approche séparable



Extension : analyse complexe (Feslberg)

Signal analytique : peut être défini comme la restriction à l'axe réel d'une fonction holomorphe

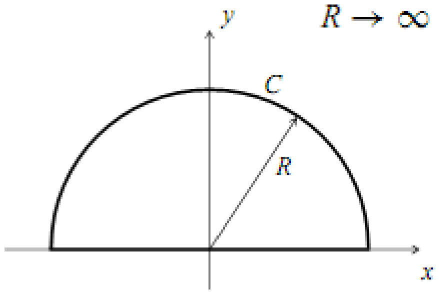
Fonction complexe $F(\chi) = u(x,y) + jv(x,y)$

Holomorphe : dérivable en tout point du domaine $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Fonction réelle harmonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$$

Signal analytique ?



u : une fonction réelle harmonique

Il existe une fonction réelle harmonique *v* telle

$F(\chi) = u(x,y) + jv(x,y)$ est holomorphe

Cauchy

$$v(x_0, y_0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x_0)u(x)\mathrm{d}x}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \quad \xrightarrow{y \to 0+} \quad v(x_0) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)\mathrm{d}x}{x_0 - x}$$

Noyau de Poisson

Notion de base : Transformée de Riesz

Définition

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} TR_1[s](\mathbf{x}) \\ TR_2[s](\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x * s(\mathbf{x}) \\ h_y * s(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

avec $H_x(\mathbf{f}) = -j\dfrac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$ et $H_y(\mathbf{f}) = -j\dfrac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$

Déphasage pur isotropique

Riesz 1-D : Hilbert

$$H_x(f) = -j\frac{f}{|f|} = -j\mathrm{sign}(f)$$ Déphasage 1-D

Notion de Steerability

$$h_{\mathbf{TR}}(R_\theta \mathbf{x}) = e^{-j\theta} h_{\mathbf{TR}}(\mathbf{x})$$

Rotation Invariance par rotation

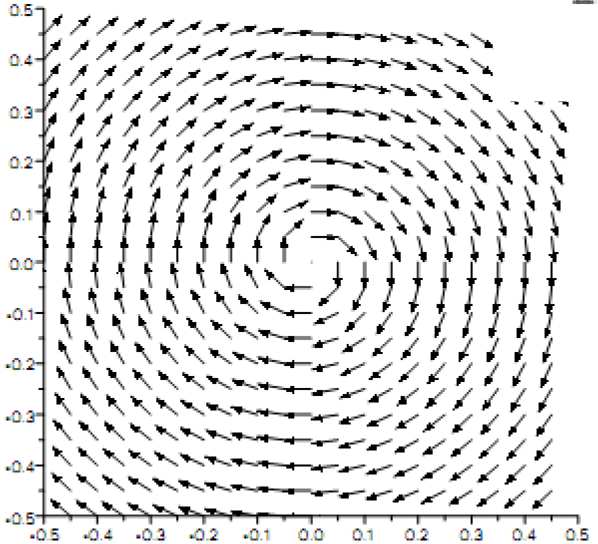
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

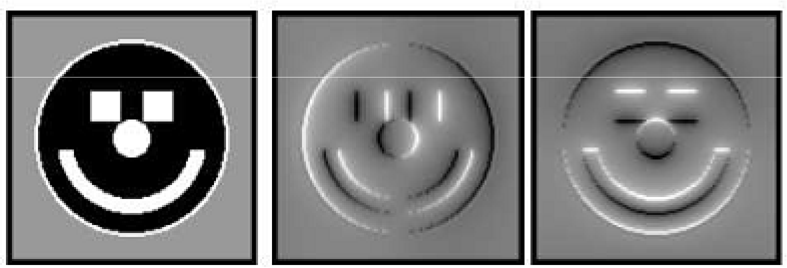
Isotropie du signal Monogène

Ecriture complexe de Riesz

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = TR_1[s](\mathbf{x}) + jTR_2[s](\mathbf{x})$$

$$\mathbb{F}\left[\mathbf{TR}[s]\right](\mathbf{f}) = \frac{-jf_1 + f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} S(\mathbf{f})$$





$\mathbf{TR}_1[s]$ $\mathbf{TR}_2$

Nouveau signal analytique 2-D
signal Monogène

$$s_M(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}) \\ \mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Signal Monogène : coordonnées sphériques

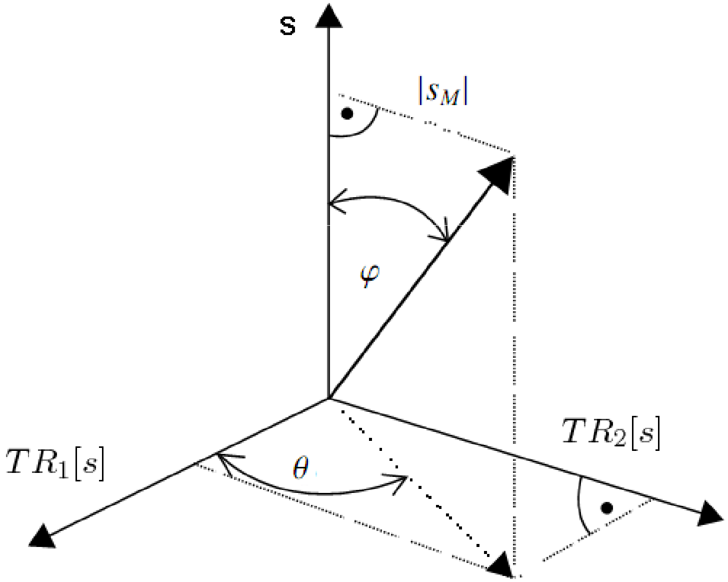
$$|s_M(\mathbf{x})| = \sqrt{s(\mathbf{x})^2 + (\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}))^2 + (TR_2[s](\mathbf{x}))^2}$$

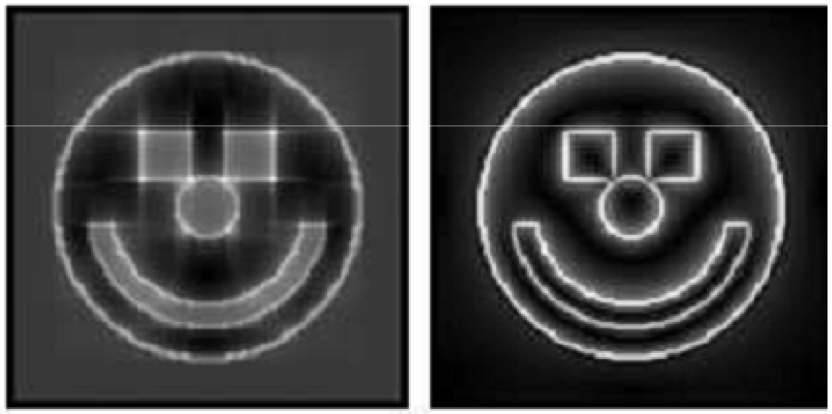
$$\theta(\mathbf{x})) = \left(\frac{\mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x})}{\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x})}\right)$$

Direction

$$\varphi(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{TR}_1[s]^2(\mathbf{x}) + \mathbf{TR}_2[s]^2(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})}\right)$$

Phase





Module du signal analytique quaternionique et du signal monogène

Interprétation : Caractérisation de structures locales

Gradient $$\nabla s(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial s(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \quad \frac{\partial s(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathcal{N}_\nabla = \|\nabla s\| \qquad\qquad \theta_\nabla = \arg\left\{\frac{\partial s(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial s(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\right\}$$

Recherche de la direction dominante de *s* selon les moindres carrés.
Introduction d'un lissage local

$$T(s) = \begin{bmatrix} h * s_x^2 & h * s_x s_y \\ h * s_x s_y & h * s_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Orientation $$\theta_\perp = \frac{1}{2}\arg\{T_{11} - T_{22} + \boldsymbol{j}2T_{12}\}$$

$$\mathbf{u}_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Direction selon laquelle la transformée de Hilbert directionnelle donne sur le voisinage une énergie maximale

Cohérence $$\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Le degré de directonnalité du signal sur le voisinage (=1, la structure est 1-D).

Interprétation du Monogénique

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = (-1)(\underset{\frac{1}{||\boldsymbol{\omega}||}}{\underbrace{-\Delta}})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\nabla}[s](\mathbf{x})$$

Version lissée du gradient

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_1}(-\Delta)^{-1/2}[s])(\mathbf{x}) - j\frac{\partial}{\partial x_2}(-\Delta)^{-1/2}[s])(\mathbf{x}).$$

Lissage isotrope

$$|\mathcal{R}s| = \mathcal{N}_{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{N}_{\nabla} \qquad \arg\{\mathcal{R}s\} = \theta_{\mathcal{R}} \equiv \theta_{\nabla}$$

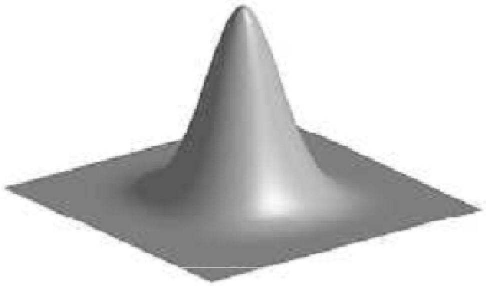
Transformée en ondelettes Monogènes

⇨ Ondelettes Monogéniques

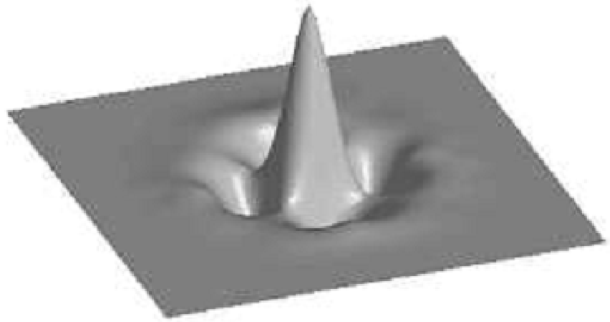
$$\psi_A^M(x,y) = \left(\psi(x,y) \quad \mathbf{TR}_1[\psi] \quad \mathbf{TR}_2[\psi]\right)$$

1) Des solutions continues (Olhede et al)

2) Une solution numérique (Unser et al)



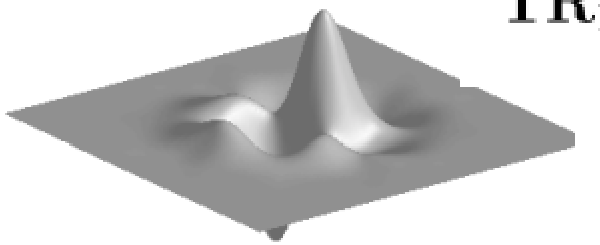
Une fonction d'échelle de lissage isotropique approximant la fonction Gaussienne

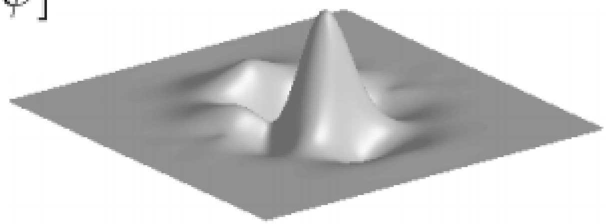


Opérateur Laplacien

⇨ Monogénique

$\mathbf{TR}_1[\psi] \quad \mathbf{TR}_2[\psi]$





La suite ?

Monogénique : généralisation 2-D satisfaisante

Interprétation des coefficients ?

Couleur ?

Schéma numérique ?

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \mathbf{Ra}^{-1}\left[\mathbf{TH}[\mathbf{Ra}\,(.,\theta)\,[s]]n_\theta\right]$$

Analyse complexe : une piste pour l'extension couleur

Signal analytique 1D,
Défini dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathcal{G}_2$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{if } y > 0 \\ e_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Signal monogène 2D,
Défini dans $\mathcal{G}_3$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{si } z > 0 \\ e_3 \dfrac{\partial u}{\partial z} = f(x, y) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_5^2} = 0 \\ e_3 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + e_4 \dfrac{\partial u}{\partial x_4} + e_5 \dfrac{\partial u}{\partial x_5} = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

Signal monogène 2D couleur ($\mathcal{G}_5$)

Pour résoudre le système est scindé en 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 & \text{si } x_i > 0 \\ e_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f_i(x_1, x_2) e_i & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

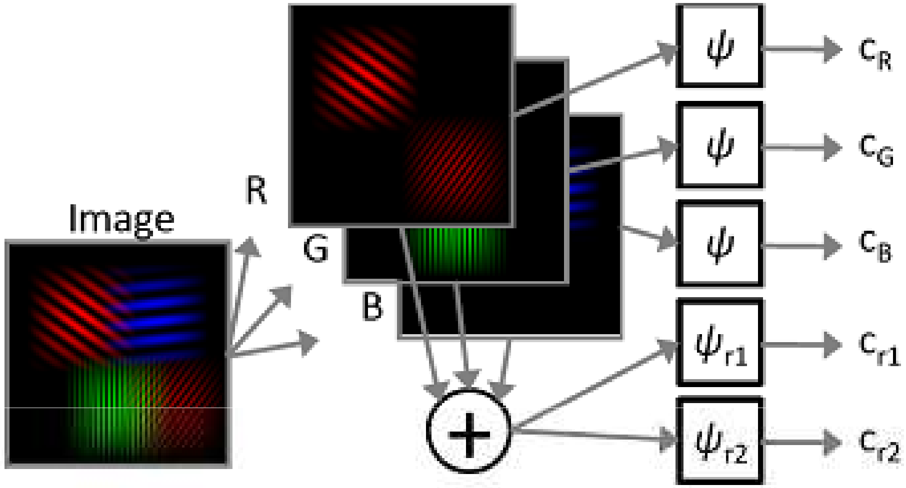
[Demarcq 2009]

Transformée en ondelettes Monogènes Couleur

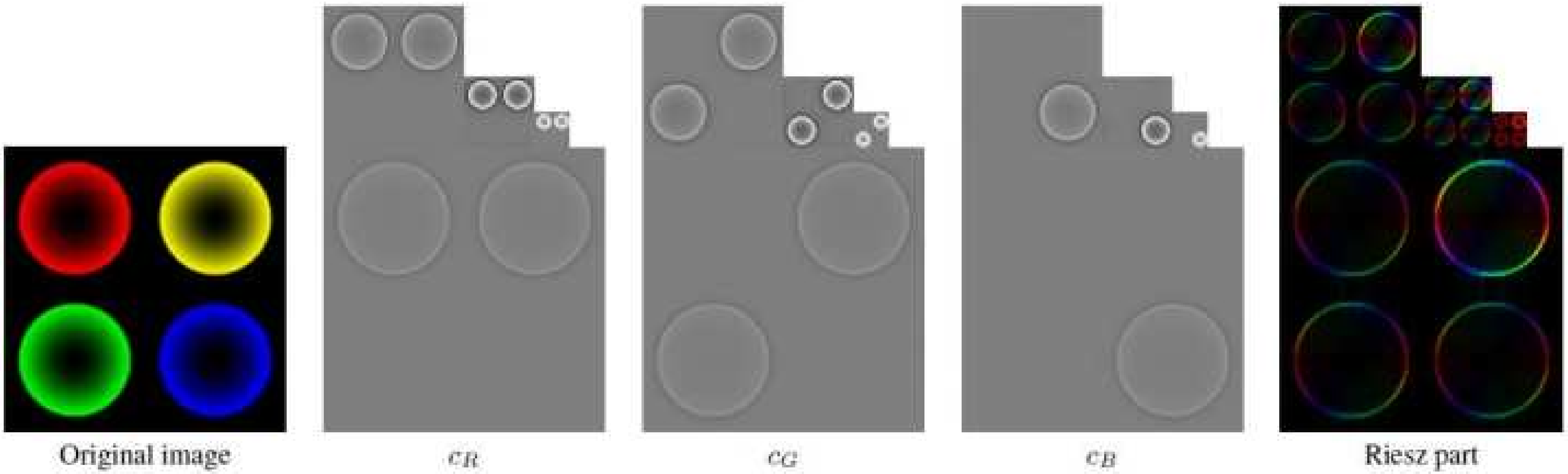
$$(c_R, c_G, c_B, c_{r1}, c_{r2})$$

$$c_{r2} = \frac{y}{2\pi\|\boldsymbol{x}\|^3} * (c_R + c_G + c_B)$$

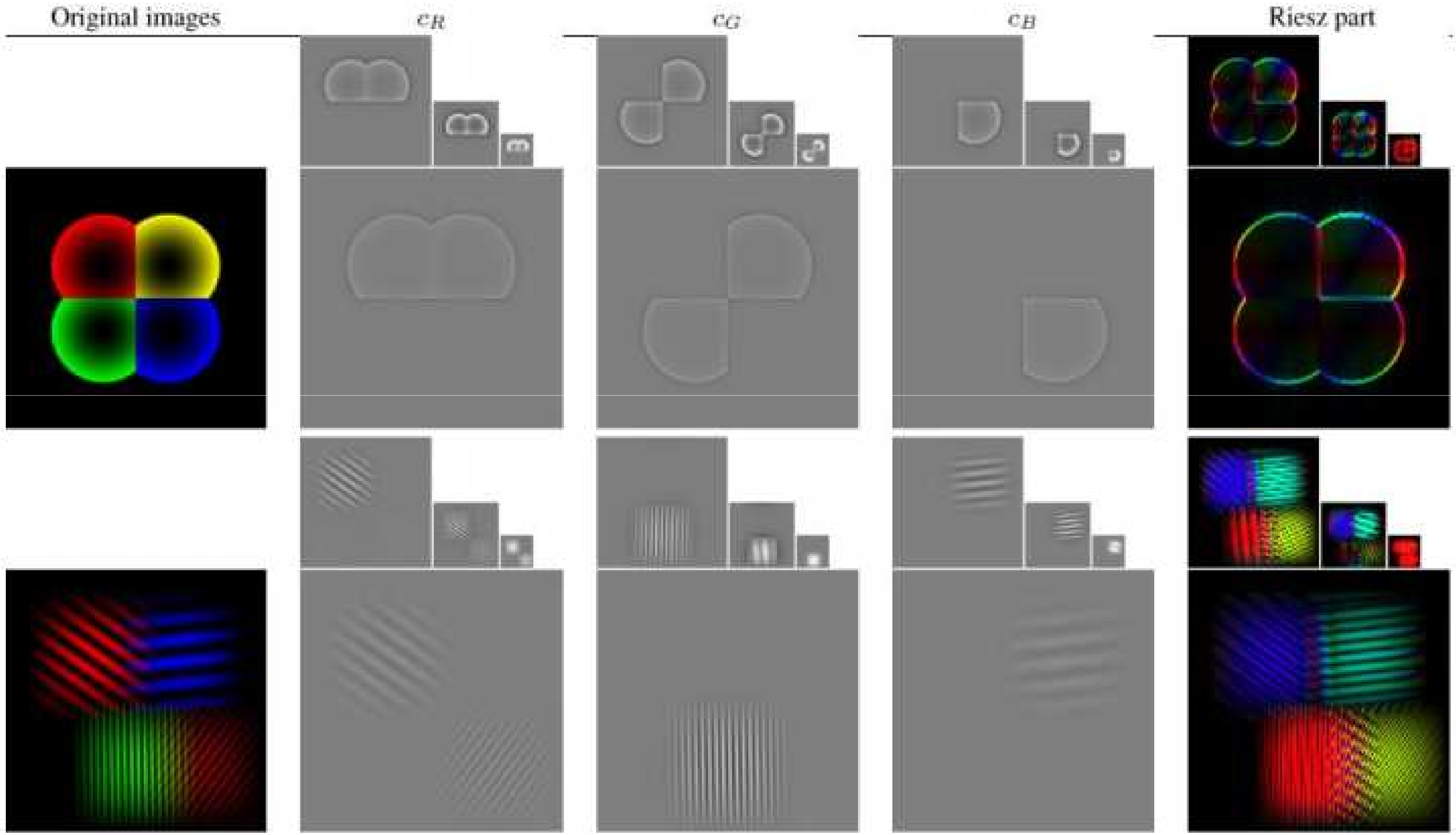
$$c_{r1} = \frac{x}{2\pi\|\boldsymbol{x}\|^3} * (c_R + c_G + c_B)$$



- Non-marginal (pas strictement…)
- Redondance 20:9 (~2.2)
- Analyse directionelle



Transformée en ondelettes Monogènes Couleur



Transformée en ondelettes Monogènes Couleur

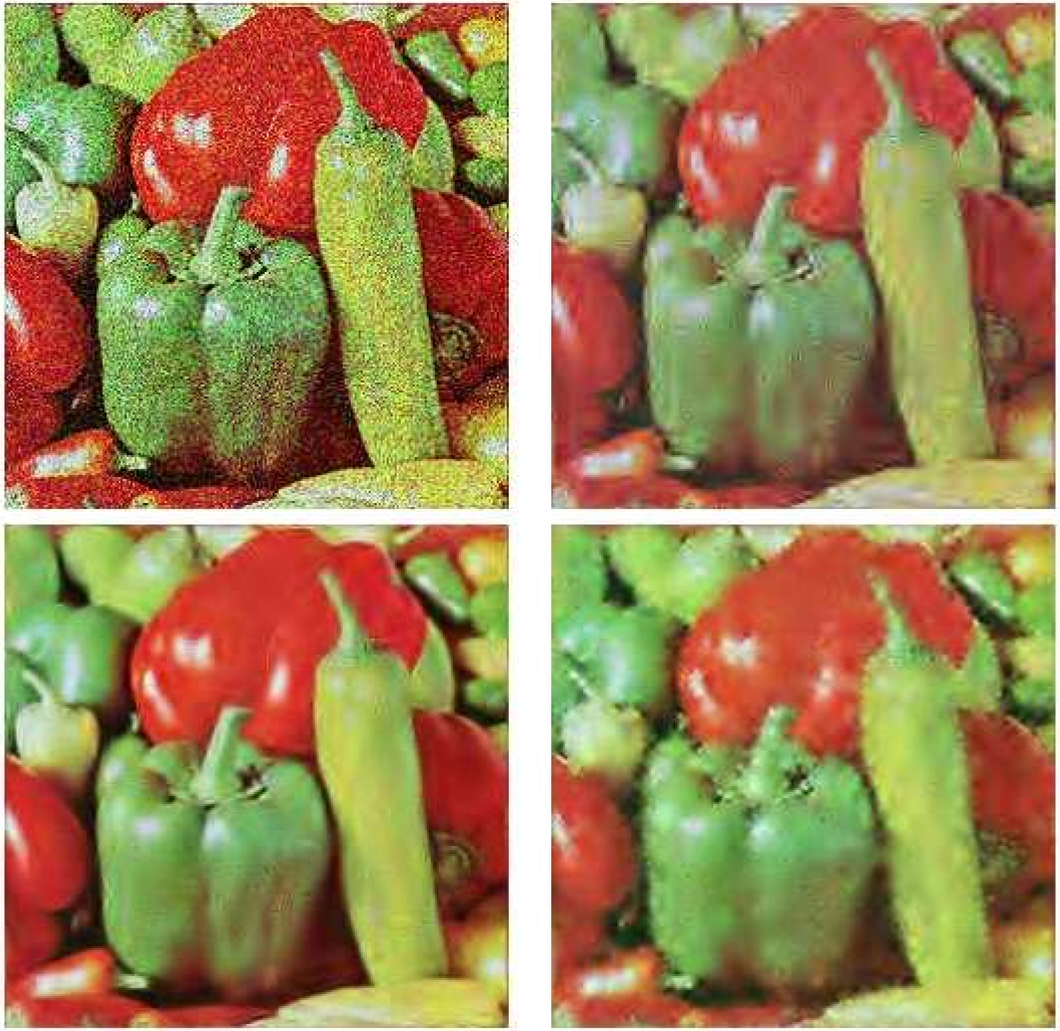


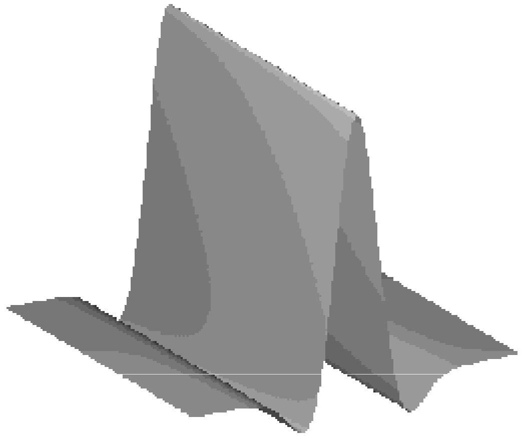
Schéma numérique ?

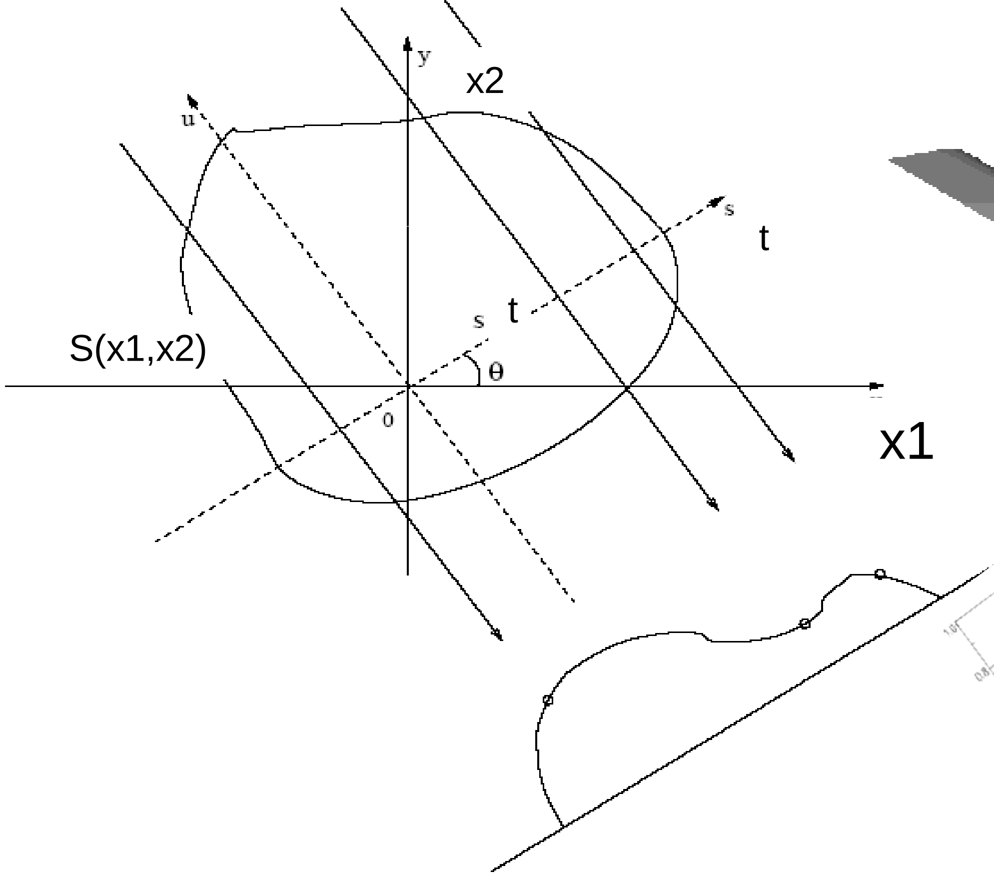
$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \mathbf{Ra}^{-1}\left[\mathbf{TH}[\mathbf{Ra}\left(.,\theta\right)[s]]n_\theta\right]$$

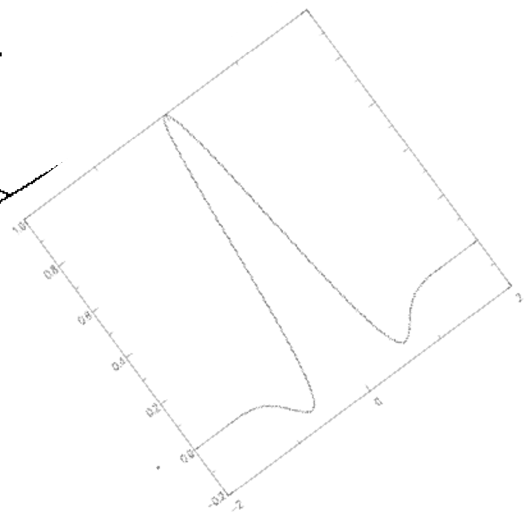
Une autre analyse directionnelle : Radon

$$r\left(a,b,\theta\right)=\int_{\mathbb{R}}\psi_{a,b}\left(t\right)R_s\left(t,\theta\right)dt$$

Intégration de l'intensité selon une direction

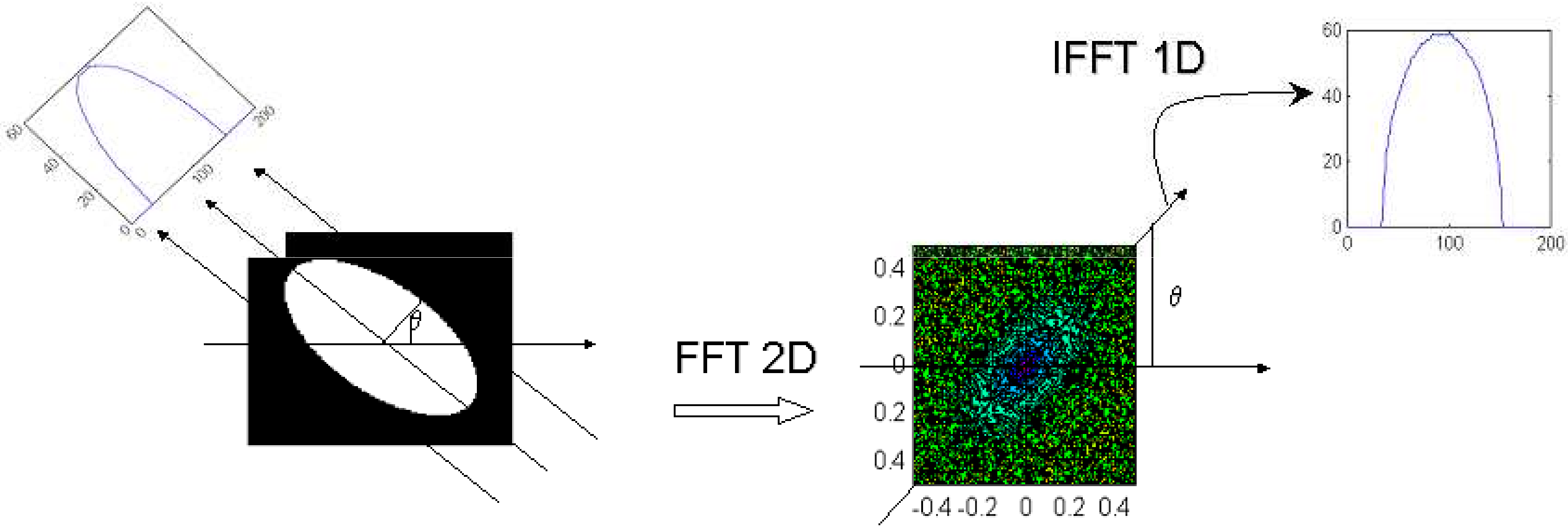






Théorème de projection de Radon

$$R_s(t,\theta)=\int_{\mathbb{R}}\hat{R}_s(w,\theta)\,e^{2j\pi wt}dw=\int_{\mathbb{R}}\left[\overbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} s(x_1,x_2)e^{-2j\pi(x_2\sin\theta+x_1\cos\theta)w}dx_1dx_2}^{\hat{s}(w\cos\theta,\,w\sin\theta)}\right]e^{2j\pi wt}dw$$



Somme des pixels le long d'un ensemble de lignes

Transformée de Fourier 2D de l'image → Définir les lignes radiales passant par l'origine de l'image → Transformée de Fourier 1D inverse le long des lignes

Stratégie classique

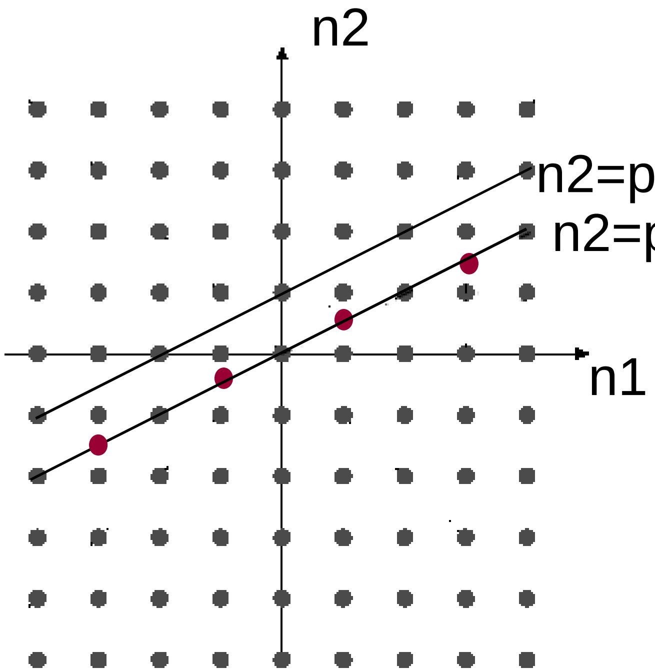
Décomposition de Radon discrète : Slant Stack

Discrétisation des paramètres

$$\begin{aligned} t_d &= k_1 \Delta_t \text{ avec } k_1 \in Z \\ p_d &= k_2 \Delta_p \text{ avec } k_2 \in Z \end{aligned}$$

Image échantillonnée $s[n_1, n_2] = s(n_1 \Delta_{x_1}, n_2 \Delta_{x_2})$ avec $n_1, n_2 \in Z$

$$R_s[t_d, p_d] = \int_{\mathbb{R}} s(x_1, p_d x_1 + t_d) dx_1 \approx \Delta_{x_1} \sum_{n_1=0}^{N-1} s[n_1, p_d n_1 + t_d]$$



Pas toujours défini

$$R_s[t, p] = \sum_{n_1=0}^{N-1} s[n_1, \lceil p n_1 + t \rfloor]$$

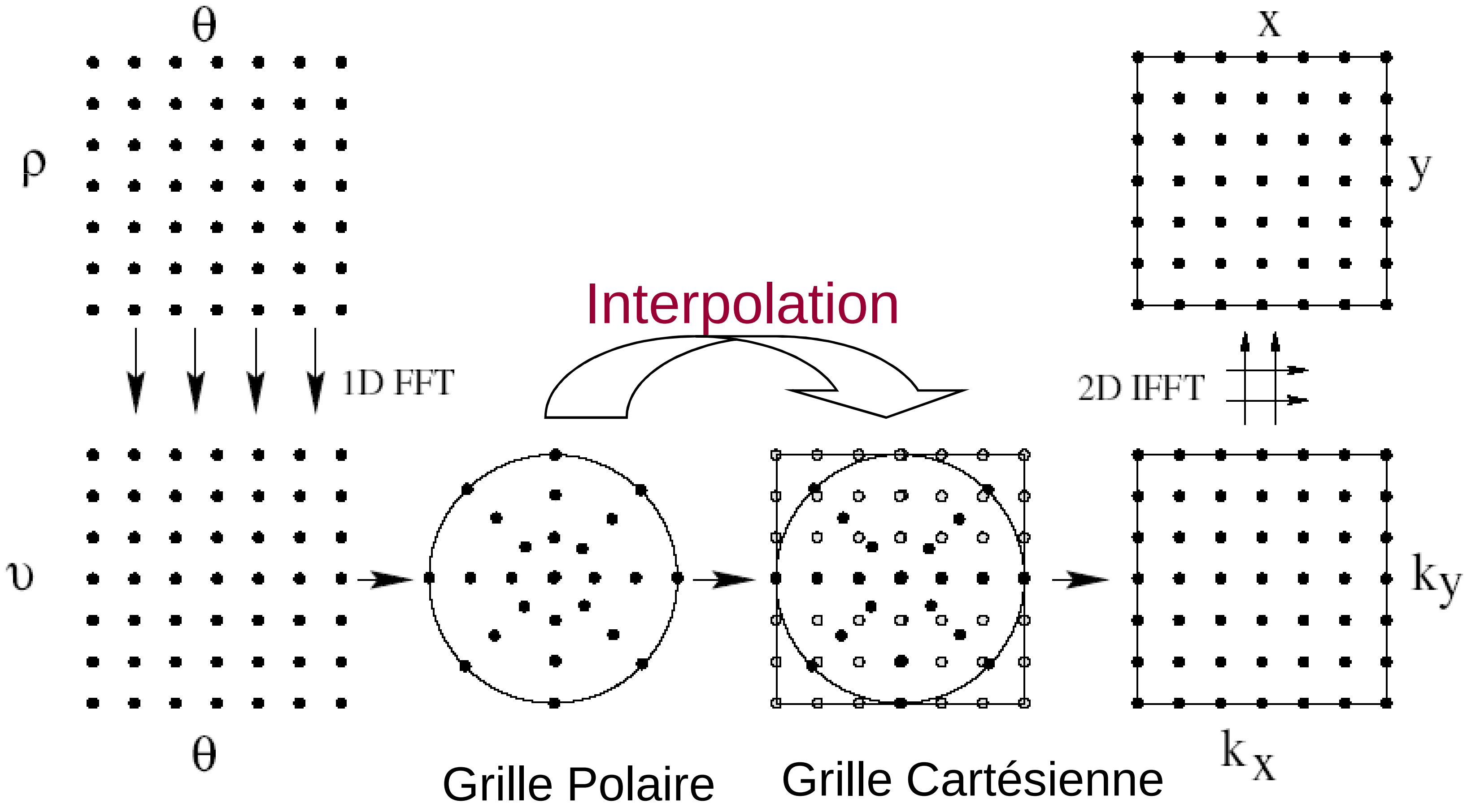
Entier le plus proche

Problème d'inversion

Inversion : utilisation du théorème de projection

$$\hat{s}(v\cos\theta, v\sin\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_s(t,\theta)e^{-2j\pi tv}dt$$

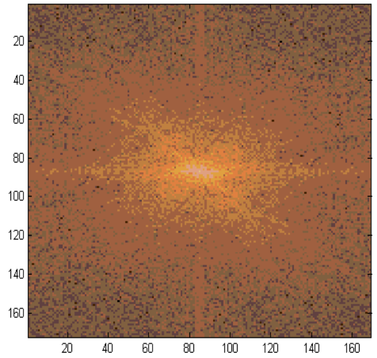
$$s(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\xi_1,\xi_2)e^{-2j\pi(\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)}d\xi_1 d\xi_2$$



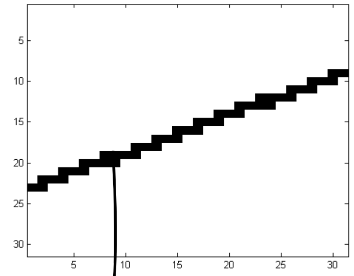
Radon analytique

Stratégie de calcul de Radon analytique 2D :

FFT 2D



Définition des droites discrètes

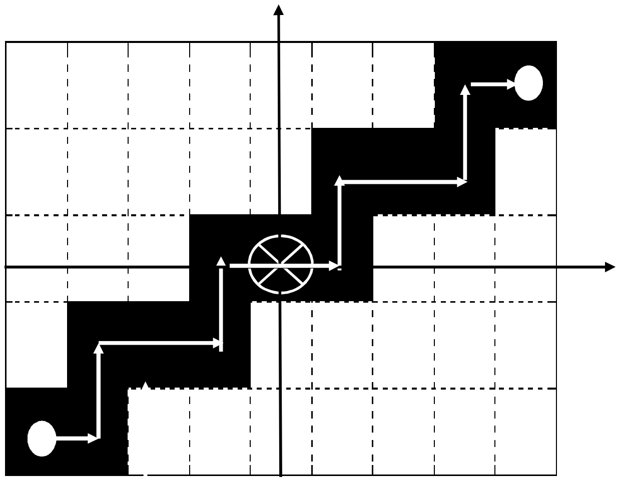


Extraction des coefficients de Fourier

Coefficients de Fourier

iFFT

Projection de l'image

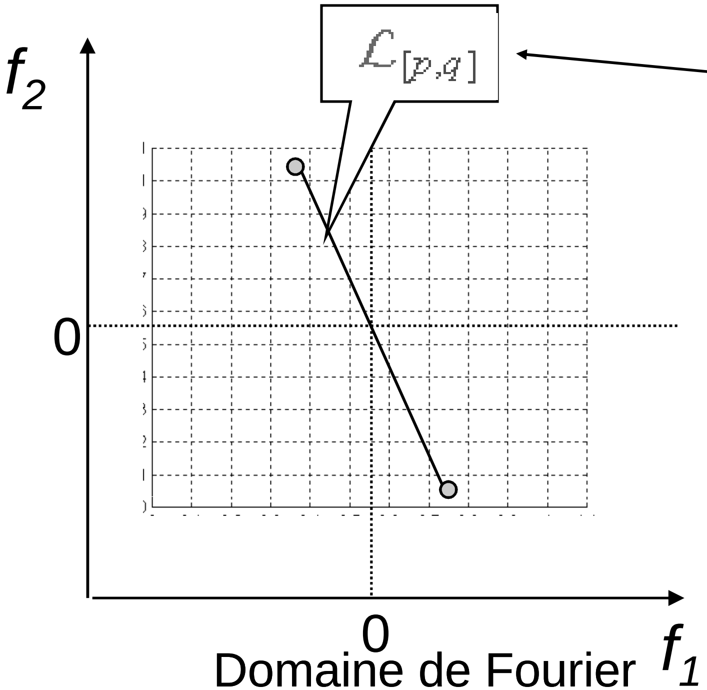


Extraction des coefficients de Fourier

[Carré&Andres2002]

Transformation de Radon analytique discrète

Stratégie de Fourier pour la transformation de Radon



Domaine de Fourier

Droites $L_{[p,q]}$ sont définies à l'aide de géométrie analytique discrète

Nous avons besoin d'une droite discrète avec :

- une symétrie centrale,
- formant une « bonne » approximation de la droite euclidienne.

Definition 1 *Soit L(q,p,c,w) la droite discrète 2-D de Réveilles définie par*

$$0 \leq qx_1 + px_2 + c < w$$

avec

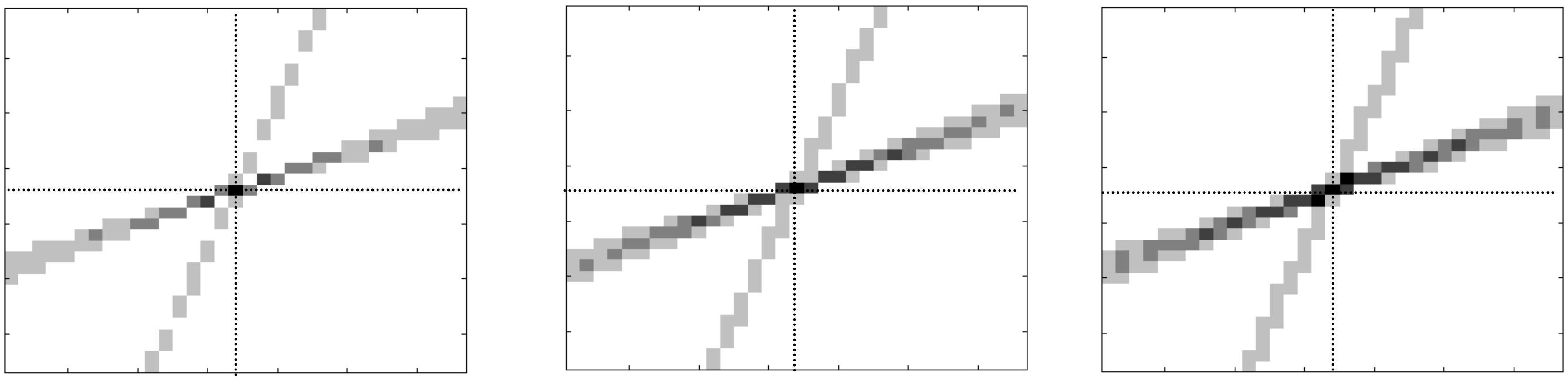
- $(q,p) \in Z$ *le coefficient de la droite*
- $c \in Z$ *le coefficent de translation*
- $w \in Z^{*+}$ *l'épaisseur arithmétique*

Type de droites

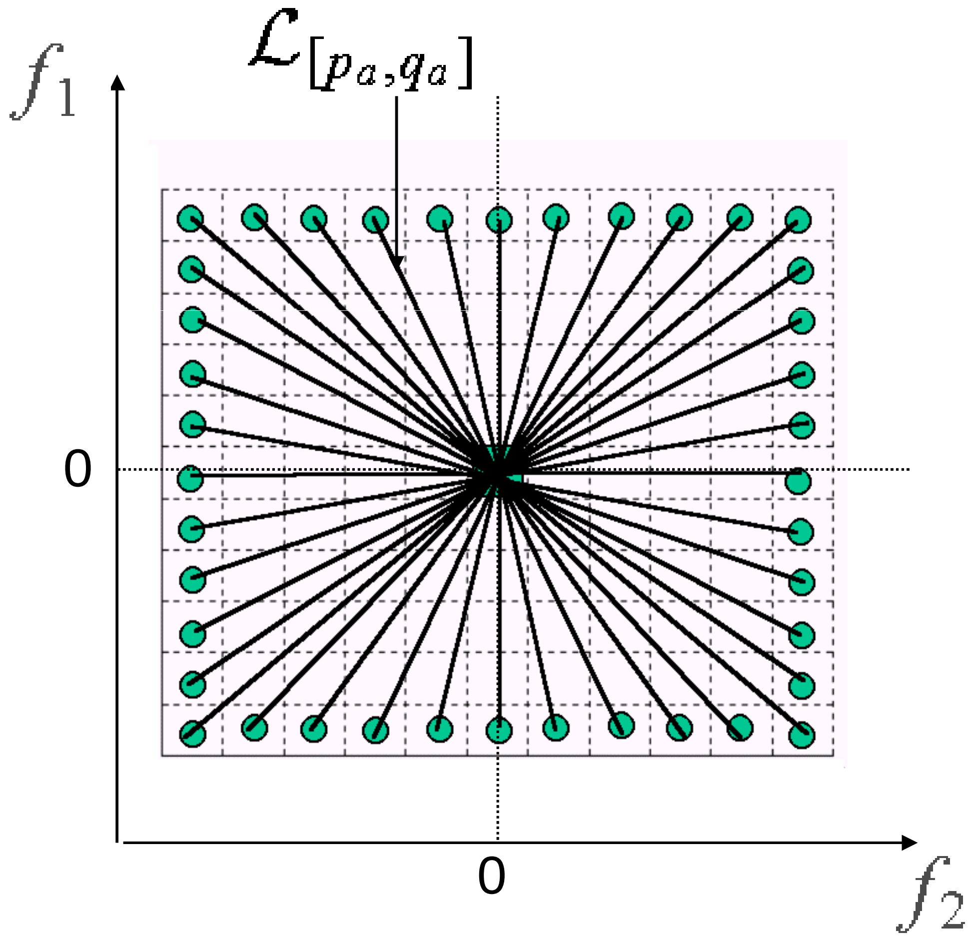
$\Rightarrow$ $L_{[p,q]}^{\sup(|p|,|q|)}$ **Droites naïves fermées (8-connexes)**

$\Rightarrow$ $L_{[p,q]}^{|p|+|q|}$ **Droites supercouvertures (4-connexes)**

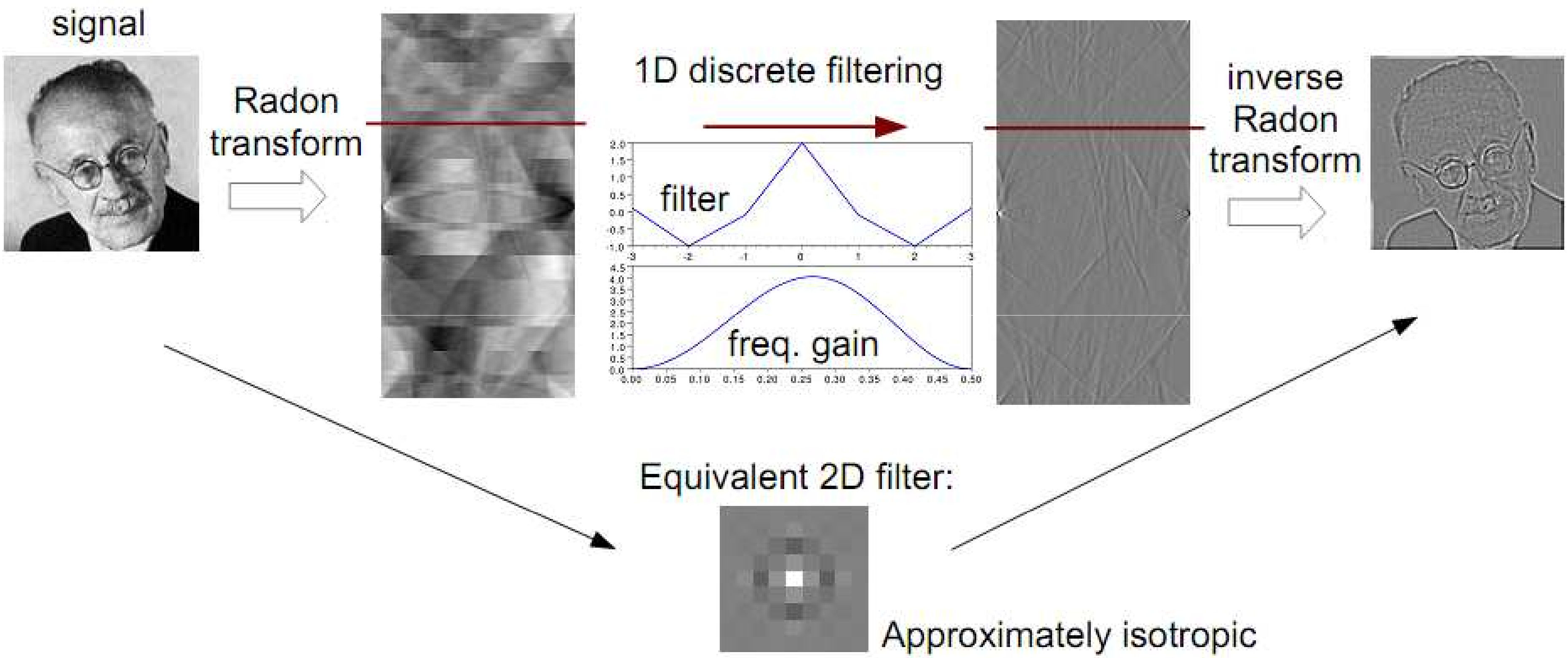
$\Rightarrow$ $L_{[p,q]}^{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}$ **Droites pythagoriciennes fermées (8-connexes)**



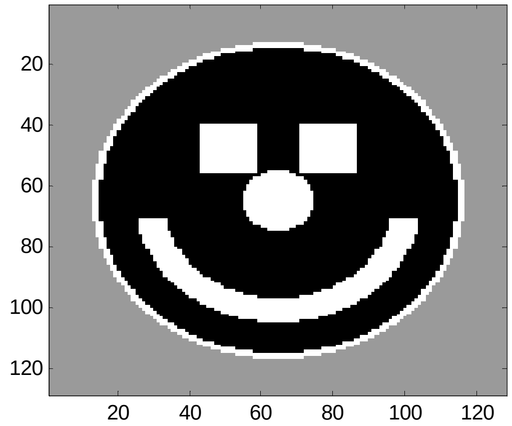
Transformée complète inversible



Utilisation de Radon pour du filtrage isotropique

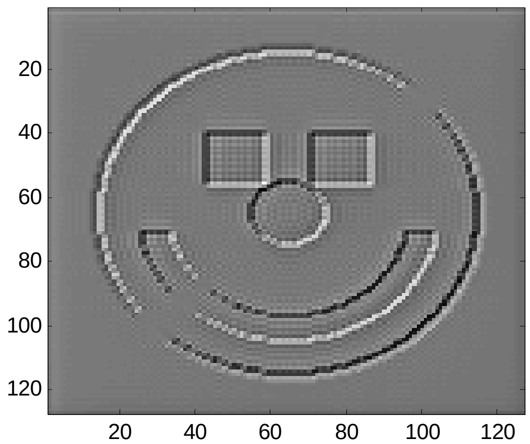


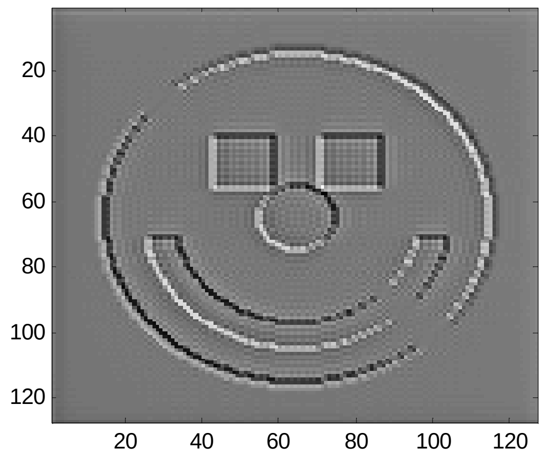
Définition numérique d’un signal monogène



Passe-bande

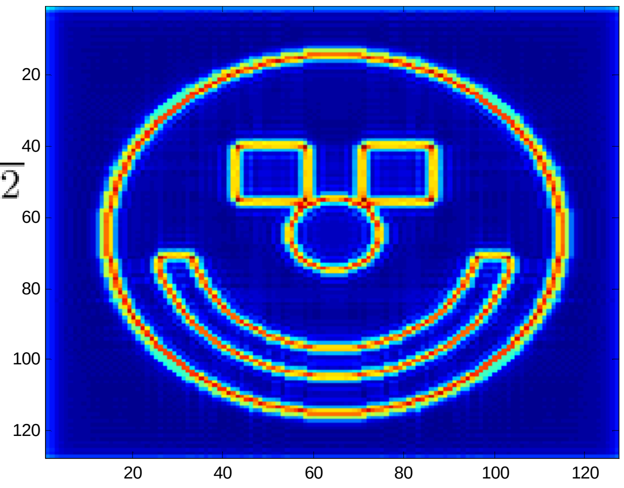
$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \mathbf{Ra}^{-1}\left[\mathbf{TH}[\mathbf{Ra}\,(.,\theta)\,[s]]n_\theta\right]$$





Caractéristique monogénique

$$|s_M(\mathbf{x})| = \sqrt{s(\mathbf{x})^2 + (\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x}))^2 + (TR_2[s](\mathbf{x}))^2}$$



$$\varphi(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{TR}_1[s]^2(\mathbf{x}) + \mathbf{TR}_2[s]^2(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})} \right)$$

Phase

$$\theta(\mathbf{x})) = \left(\frac{\mathbf{TR}_2[s](\mathbf{x})}{\mathbf{TR}_1[s](\mathbf{x})} \right)$$ Direction : paramètre sensible

$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = (-1)(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\nabla}[s](\mathbf{x})$$

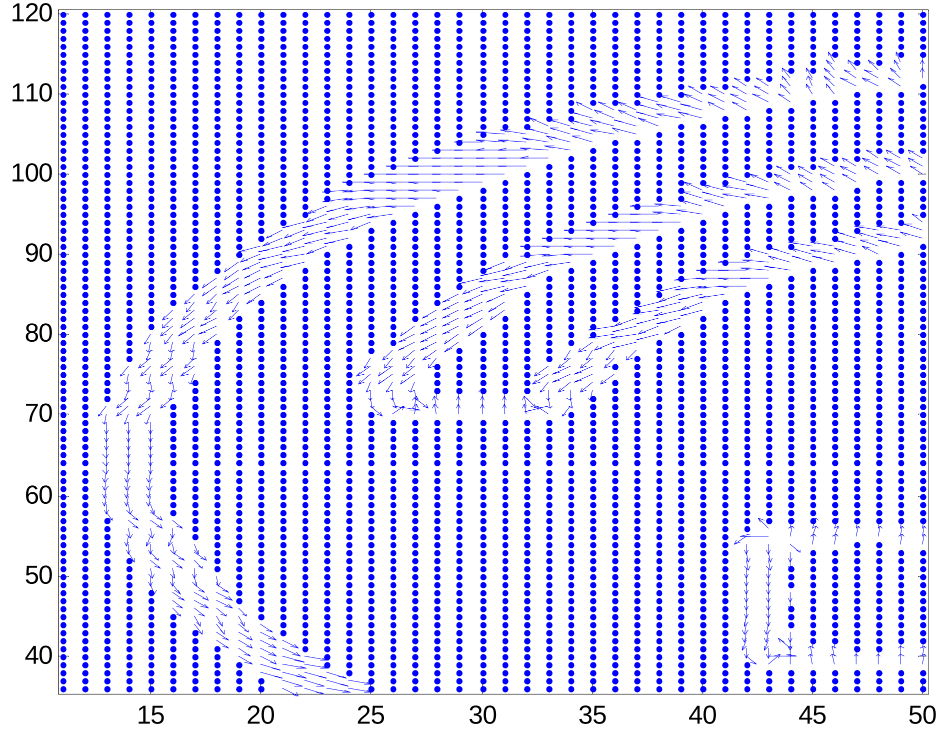
⇨ Utilisation de la notion de tenseur

Direction

$$T_{\mathrm{rz}}(s) = h * [\Re\{\mathcal{R}s\} \;\; \Im\{\mathcal{R}s\}]^{\mathsf{T}} [\Re\{\mathcal{R}s\} \;\; \Im\{\mathcal{R}s\}]$$

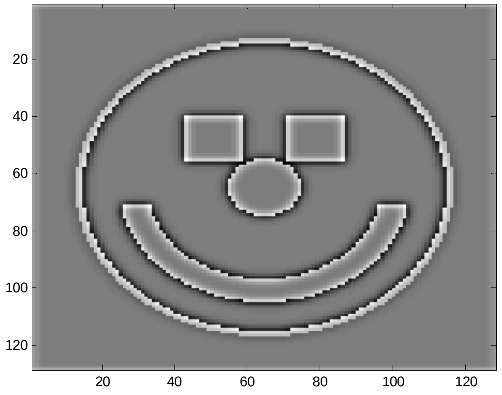
$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix}$$

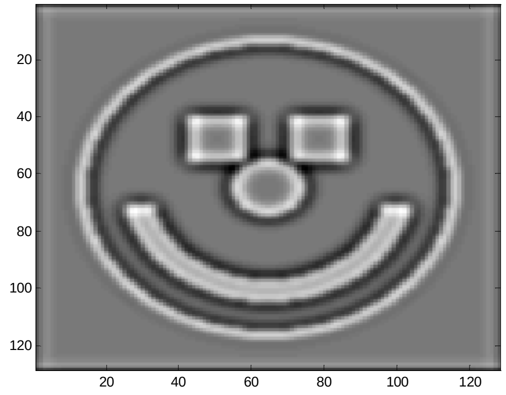
$$\theta_{+} = \frac{1}{2} \arg\{T_{11} - T_{22} + j2T_{12}\}$$

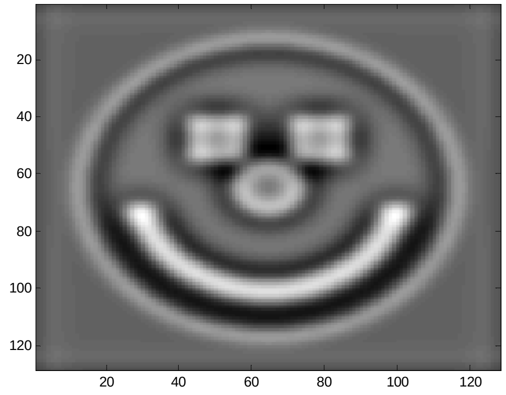


Extension Multiéchelle : notion de passe-bande

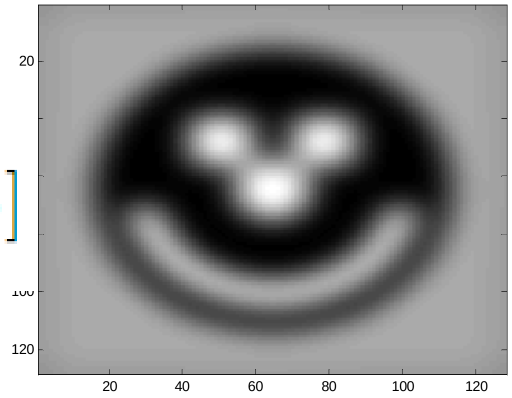
Algorithme à trous







$$\mathbf{TR}[s](\mathbf{x}) = \mathbf{Ra}^{-1}\left[\mathbf{TH}[\mathbf{Ra}\left(.,\theta\right)[s]]n_\theta\right]$$



Intégration de la couleur

Structure locale couleur

Thèse R. Soulard

Structure locale couleur

Une norme et une orientation basées sur un modèle vectoriel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix}}_{T}$$

Combinaison des expressions marginales

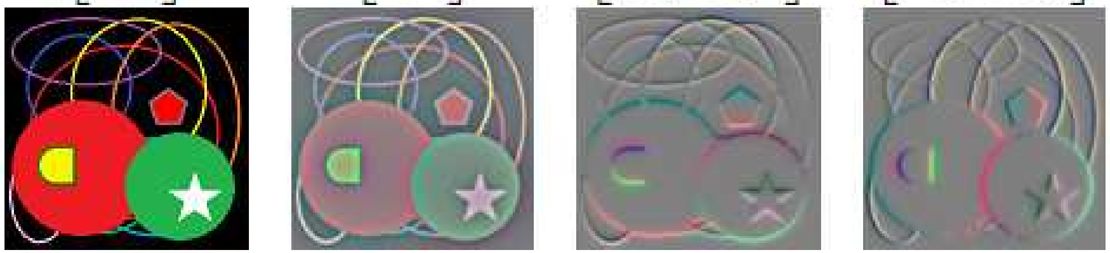
$$\begin{aligned}
T_{11} &= \left(\frac{\partial s^{\mathsf{R}}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s^{\mathsf{G}}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s^{\mathsf{B}}}{\partial x_1}\right)^2 \\
T_{12} &= \frac{\partial s^{\mathsf{R}}}{\partial x_1}\frac{\partial s^{\mathsf{R}}}{\partial x_2} + \frac{\partial s^{\mathsf{G}}}{\partial x_1}\frac{\partial s^{\mathsf{G}}}{\partial x_2} + \frac{\partial s^{\mathsf{B}}}{\partial x_1}\frac{\partial s^{\mathsf{B}}}{\partial x_2} \\
T_{22} &= \left(\frac{\partial s^{\mathsf{R}}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial s^{\mathsf{G}}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial s^{\mathsf{B}}}{\partial x_2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_{\nabla} = \sqrt{\lambda_+ + \lambda_-} = \sqrt{T_{11} + T_{22}} \qquad \theta_{\nabla} = \frac{1}{2}\arg\{T_{11} - T_{22} + j2T_{12}\}$$

Extension par l'approche « Tenseur de structure »

Image — Subband — Marginal Riesz transform

$$\begin{bmatrix} I^{\mathrm{R}} \\ I^{\mathrm{G}} \\ I^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^{\mathrm{R}} \\ s^{\mathrm{G}} \\ s^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Re\{\mathcal{R}s^{\mathrm{R}}\} \\ \Re\{\mathcal{R}s^{\mathrm{G}}\} \\ \Re\{\mathcal{R}s^{\mathrm{B}}\} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \Im\{\mathcal{R}s^{\mathrm{R}}\} \\ \Im\{\mathcal{R}s^{\mathrm{G}}\} \\ \Im\{\mathcal{R}s^{\mathrm{B}}\} \end{bmatrix}$$



Gradient lissé

$$T_{\mathrm{rz}}(s) = h * [\Re\{\mathcal{R}s\} \;\; \Im\{\mathcal{R}s\}]^{\mathsf{T}}[\Re\{\mathcal{R}s\} \;\; \Im\{\mathcal{R}s\}] \quad \Rightarrow \quad M(s) = T(s^{\mathrm{R}}) + T(s^{\mathrm{G}}) + T(s^{\mathrm{B}})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \sqrt{|\mathcal{R}s^{\mathrm{R}}|^2 + |\mathcal{R}s^{\mathrm{G}}|^2 + |\mathcal{R}s^{\mathrm{B}}|^2} \\ \theta_+ &= \frac{1}{2}\arg\left\{ \sum_{\mathrm{c}\in\{\mathrm{R,G,B}\}} \Re\{\mathcal{R}s^{\mathrm{c}}\}^2 - \Im\{\mathcal{R}s^{\mathrm{c}}\}^2 \right. \\ &\qquad \left. + j \sum_{\mathrm{c}\in\{\mathrm{R,G,B}\}} 2\Re\{\mathcal{R}s^{\mathrm{c}}\}\Im\{\mathcal{R}s^{\mathrm{c}}\} \right\} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}$ — θ_+

Caractéristique de Riesz couleur

Signal monogénique : notion de phase en couleur ?

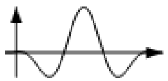
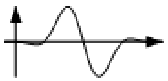
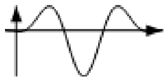
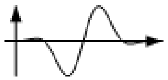
Phase

$$\varphi(\mathbf{x})) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{TR}_1[s]^2(\mathbf{x}) + \mathbf{TR}_2[s]^2(\mathbf{x})}}{s(\mathbf{x})} \right)$$

En couleur ? Utilisation de normes

$$\varphi_2(x) = \arg\{\|s(x)\| + \boldsymbol{j}\,\|\mathcal{H}s(x)\|\}$$

En scalaire, introduction de la valeur absolue

sign / φ_2	0	$\frac{\pi}{2}$
+		
-		

$$\begin{aligned} s &= \underbrace{\sqrt{s^2+\mathcal{N}^2}}_{A} \cos\big(\underbrace{\arg\{s+\boldsymbol{j}\mathcal{N}\}}_{\varphi\in[0;\pi[} \big) \\ &= \underbrace{\sqrt{|s|^2+\mathcal{N}^2}}_{A} \cos\big(\underbrace{\arg\{|s|+\boldsymbol{j}\mathcal{N}\}}_{\varphi_2\in[0;\frac{\pi}{2}[} \big) \underbrace{s/|s|}_{\text{“sign”}} \end{aligned}$$

Signal monogénique : notion de phase en couleur ?

$$s = \underbrace{\sqrt{||s||^2 + \mathcal{N}^2}}_{A} \cos\left(\underbrace{\arg\{||s|| + \boldsymbol{j}\mathcal{N}\}}_{\varphi_2}\right) \underbrace{\vec{u}}_{\text{`axis'}}$$

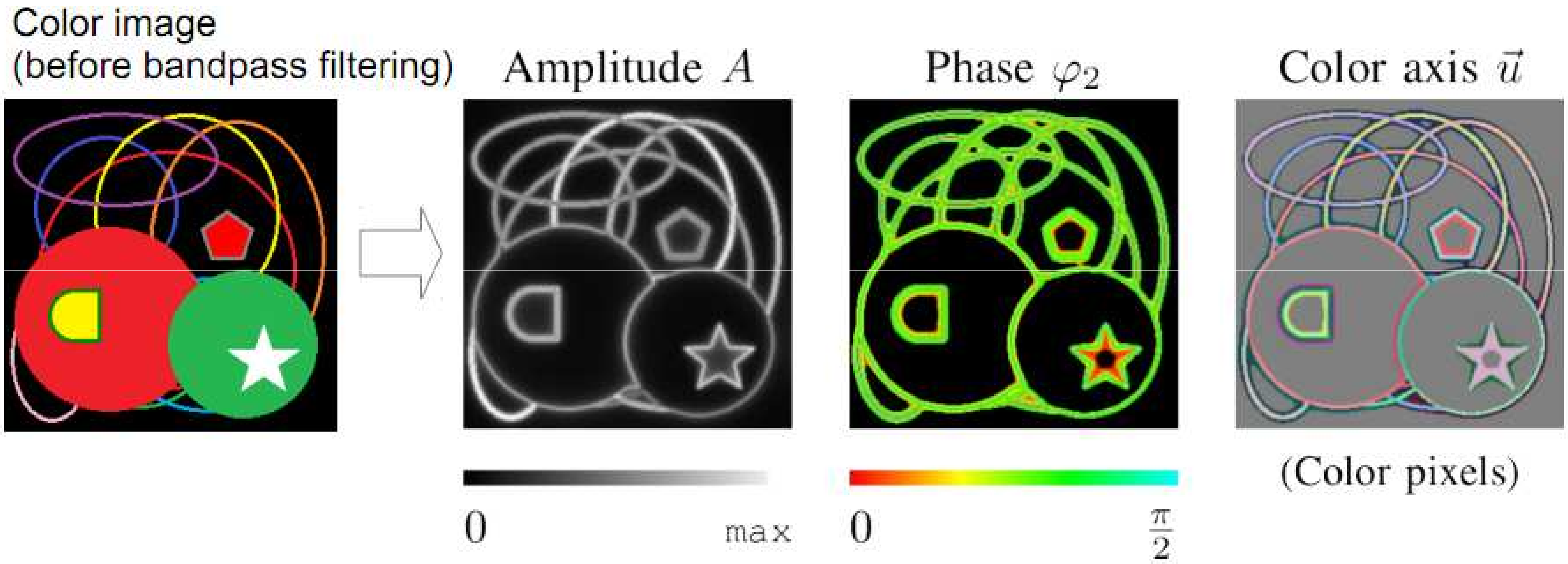
$$s_M^{\text{color}} = [\ s^{\mathsf{R}}\ \ s^{\mathsf{G}}\ \ s^{\mathsf{B}}\ \ \mathcal{N}_{\mathcal{R}}\ ]^{\mathsf{T}}$$

Amplitude : $A = \sqrt{||s||^2 + \mathcal{N}_{\mathcal{R}}^2} \in [0; +\infty[$

Phase : $\varphi_2 = \arg\{||s|| + \boldsymbol{j}\mathcal{N}_{\mathcal{R}}\} \in [0; \frac{\pi}{2}[$

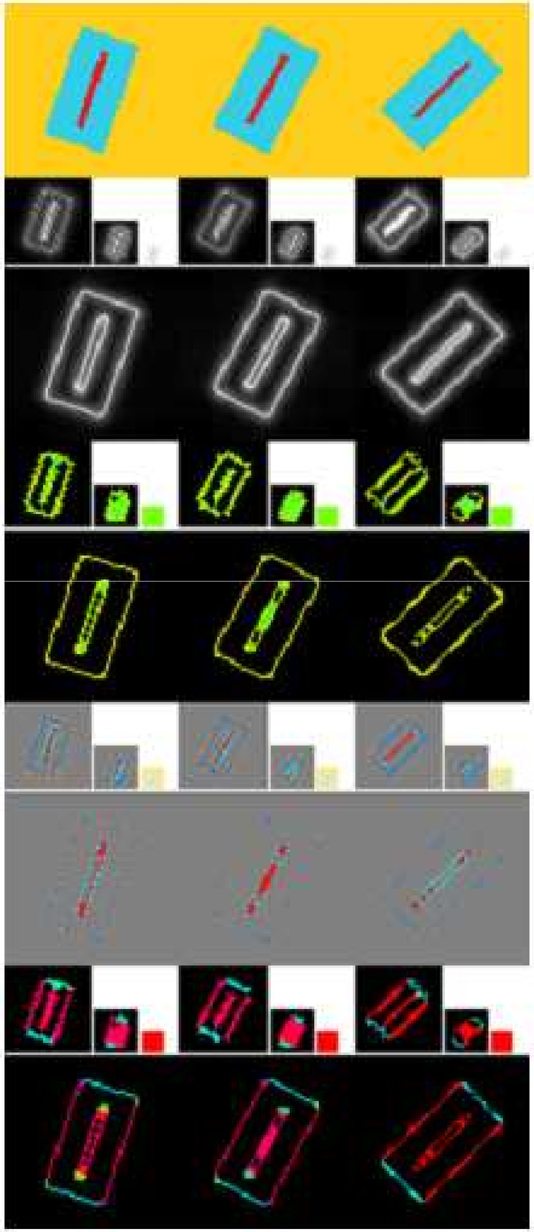
Axe couleur : $\begin{cases} \alpha = \arg\{s^{\mathsf{R}} + \boldsymbol{j}\sqrt{(s^{\mathsf{G}})^2 + (s^{\mathsf{B}})^2}\} \in [0; \pi[\\ \beta = \arg\{s^{\mathsf{G}} + \boldsymbol{j}s^{\mathsf{B}}\} \in [-\pi; \pi[\end{cases}$

Phase en couleur : angle + axe



Extension par l'approche « Tenseur de structure »

Descripteur couleur
Multiéchelle
Invariant



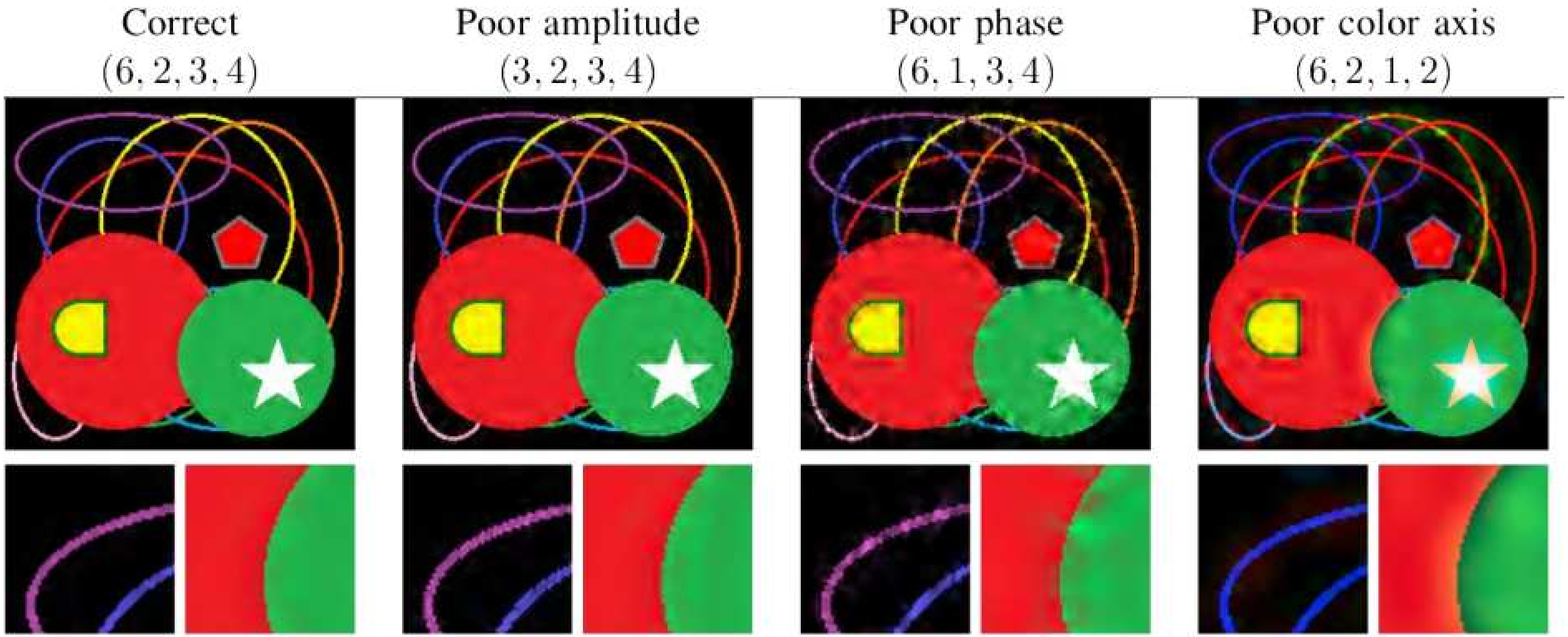
Amplitudes pour 3 échelles

Phase

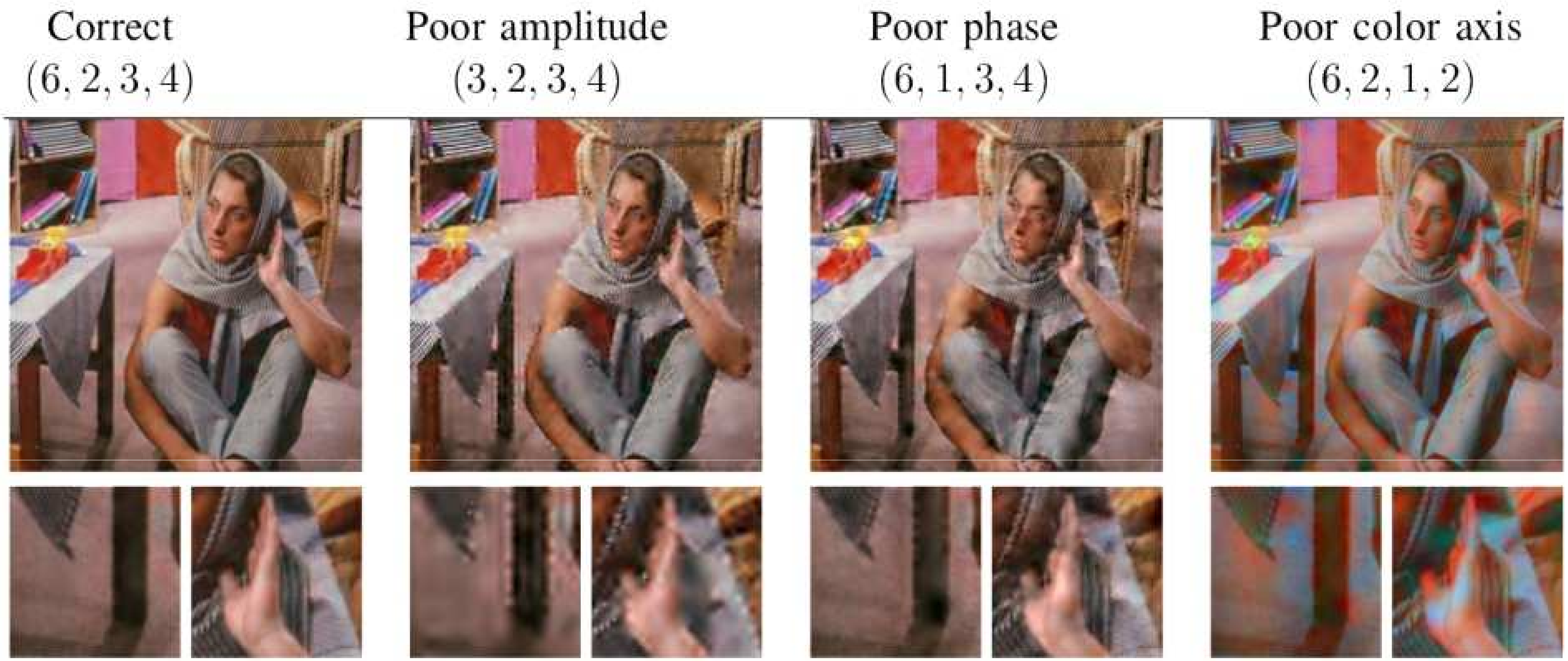
Axe couleur

Orientation

Test par reconstruction partielle



Test par reconstruction partielle



Conclusion ?

Représentation monogénique : analyse locale avec l'information de phase

Importance de la transformée de Radon

Extension aux images « multibandes » à travers le lien avec les tenseurs de structures

Schéma numérique et information couleur