

## TD n°7

### 1 Du pétrole et des idées

Le professeur Robert Ive est consultant pour une compagnie pétrolière qui projette de construire un grand oléoduc en ligne droite d'Est en Ouest à travers un champ pétrolier. À partir de chaque puits un raccordement doit être connecté directement sur l'oléoduc principal suivant le plus court chemin. Connaissant les coordonnées des puits, comment le professeur trouvera-t'il l'emplacement idéal de l'oléoduc principal qui minimise la longueur totale des raccordements ?

### 2 Médian pondéré

Soient  $n$  éléments distincts  $x_1, \dots, x_n$  de poids positifs  $p_1, \dots, p_n$  tels que

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Le *médian pondéré (inférieur)* est l'élément  $x_k$  satisfaisant :

$$\sum_{x_i < x_k} p_i < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{x_i > x_k} p_i \leq \frac{1}{2}$$

**Question 2.1** Démontrer que le médian de  $x_1, \dots, x_n$  est le médian pondéré des  $x_i$  affectés des poids  $p_i = 1/n$  pour  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

**Question 2.2** Comment calculer *simplement* le médian pondéré de  $n$  éléments. Donner la complexité en comparaisons et en additions.

**Question 2.3** Comment calculer le médian pondéré en temps linéaire dans le pire des cas.

### 3 Le problème de l'emplacement du bureau de poste

Considérons un espace métrique  $(E, d)$ . Soient  $n$  éléments distincts  $x_1, \dots, x_n$  de poids respectifs  $p_1, \dots, p_n$  tels que

$$\forall i, p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

On souhaite trouver un point  $x$  (qui n'est pas nécessairement un des  $x_i$ ) qui minimise  $\sum_{i=1}^n p_i d(x, x_i)$ .

**Question 3.1 Cas de la dimension 1 :**  $(E, d)$  est l'ensemble des réels muni de la distance usuelle. Montrer que le médian pondéré est une des solutions optimales.

**Question 3.2 Cas de la dimension 2 :**  $(E, d)$  est le plan muni de la distance 1, ou *distance Manhattan*, c'est à dire :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Résoudre l'énoncé qui s'appelle dans ce cas «problème du bureau de poste».

## 4 Tri par tas

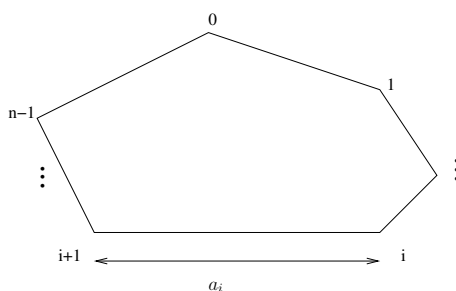
Le tri par tas est réalisé en deux étapes : insertion des  $n$  éléments dans le tas, puis déconstruction du tas en extrayant à chaque fois le plus petit élément.

La construction du tas se fait en  $O(n \log n)$ , et la suppression des éléments du tas se fait également en  $O(n \log n)$ .

Il est possible d'améliorer la complexité de la construction du tas, elle peut se faire en  $O(n)$  (cependant la suppression des  $n$  éléments du tas reste en  $O(n \log n)$ ). Proposez un algorithme pour construire le tas en temps linéaire.

## 5 Division du périmètre d'un polygone

On considère un polygone à  $n$  sommets, numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre de 0 à  $n - 1$ . La suite des longueurs des côtés est  $\{a_0, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ , comme représenté dans la figure ci-dessous.



**Question 5.1** On cherche tout d'abord à déterminer les deux indices  $i, j$  qui minimisent la valeur absolue de la différence entre les deux portions de périmètre qu'ils déterminent, i.e., qui minimisent (sommmations modulo  $n$ ) :

$$\left| \left( \sum_{l=i}^{j-1} a_l \right) - \left( \sum_{l=j}^{i-1} a_l \right) \right|$$

**5.1.1** Donner un algorithme naïf et calculer sa complexité.

**5.1.2** Proposer une solution en temps linéaire.

**Question 5.2** Trouver en temps linéaire trois indices  $i, j, k$  qui minimisent la différence entre le plus grand "tiers" et le plus petit "tiers" qu'ils déterminent ( $\max(\sum_{l=i}^{j-1} a_l, \sum_{l=j}^{k-1} a_l, \sum_{l=k}^{i-1} a_l) - \min(\sum_{l=i}^{j-1} a_l, \sum_{l=j}^{k-1} a_l, \sum_{l=k}^{i-1} a_l)$ ). Pouvez vous généraliser pour la découpe en  $k$  portions ?