Devoir à la maison

Dans ce devoir nous allons nous intéresser à divers problèmes liés aux élections. La première partie est consacrée aux ordres qui sont une façon de représenter un ensemble muni d'une relation d'ordre par un graphe orienté. On n'utilisera ici que les bases de cette théorie qui peut faire l'objet d'un cours entier. La deuxième partie est consacrée au théorème de Arrow qui est un thèorème classique concernant les élections. La troisième demande de résoudre par programmation dynamique le problème de gerrymanderisation. La partie 2 reprend des définitions de la partie 1, mais sinon les trois problèmes sont indépendants.

Les ensembles considérés ici sont finis.

Exercice 1. *ordre*

En mathématiques, un ordre est un ensemble muni d'une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Dans la théorie des graphes, un ordre est un graphe (V, E) orienté sans cycles. On définit sur V la relation " $\leq$ " suivante : soient a et b deux éléments de V, a est inférieur à b (noté $a \leq b$) si et seulement si il existe un chemin orienté de a vers b dans le graphe (V, E). Donc soit $b \leq a$, soit $a \leq b$, soit il n'existe ni de chemin de a vers b ni de chemin de b vers a et on dit que les deux éléments ne sont comparables. Un ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments sinon l'ordre est partiel.

1. Montrer qu'étant donné un graphe (V, E) orienté sans cycle, la relation " $\leq$ " est réflexive, antisymétrique et transitive.

Donc le graphe (V, E) représente l'ensemble V muni d'une relation d'ordre.

2. On considère un ensemble V muni d'une relation d'ordre. Montrer l'existence d'un graphe orienté représentant cet ordre et montrer que ce graphe n'est pas forcément unique.

3. Parmi les graphes qui donnent la même relation d'ordre sur V, montrer l'unicité de celui qui à le plus d'arêtes et de celui qui a le moins d'arêtes.

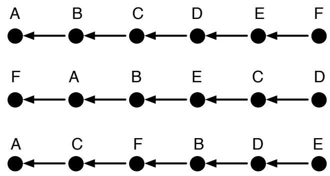
Parmi les graphes représentant la même relation d'ordre, on appelle celui contenant le plus d'arêtes la fermeture transitive de l'ordre et celui contenant le moins d'arêtes la réduction transitive du graphe.

4. Combien y a-t-il d'arêtes dans la fermuture transitive et dans la réduction transitive d'un ordre total ?

5. Donner un ordre dont la réduction transitive compte plus de $|V|$ arêtes.

On considère un ensemble V d'alternatives et N individus votant pour départager les alternatives. A chaque votant correspond une "préférence" qui est un ordre total défini sur V (donné sous la forme d'une liste classée par ordre décroissant de préférence). Un profil est un N-tuple de préférences. Soit a et b deux alternatives et Π un profil, a fait l'unanimité par rapport à b si et seulement si $a > b$ dans toutes les préférences de Π. La préférence unanime d'un profil Π est un ordre sur V pour la relation d'unanimité. Dans les questions suivantes, donnez n'importe quel graphe représentant l'ordre qui réponde à la question.

6. Calculer la préférence unanime du profil Π suivant :



7. Donner un algorithme calculant la préférence unanime d'un profil Π en $O(|V|^2N)$.

Un élément maximal est un élément du graphe tel qu'il n'existe pas d'élément plus grand que lui. Si pour un profil Π, un "vainqueur" devait être désigné il est logique que ce vainqueur soit choisi parmi les éléments maximaux de la préférence unanime de Π. L'algorithme précédent permet de calculer ces éléments en $O(|V|^2N)$.

8. Dans le cas où $N = 2$ donner un algorithme en $O(|V|)$ qui calcule les éléments maximaux de la préférence unanime d'un profil Π.

Exercice 2. *théorème de Arrow*

On considère un ensemble V fini contenant au moins trois alternatives et une société faite de N individus. Une constitution est une fonction qui associe à chaque profil une préférence appelée préférence sociale (rappel : une préférence est un ordre total).
Une constitution respecte l'indépendance aux alternatives non pertinentes si pour deux alternatives a et b de V, le classement entre a et b dans la préférence sociale ne dépend que du classement entre a et b dans chaque préférence du profil.
Une constitution est une dictature pour l'individu n, si pour chaque pair d'alternatives a et b de V, $a > b$ dans la préférence sociale quand dans la préférence de n, on a $a > b$.
Le but de cette partie est de prouver le théorème de Arrow : si une constitution respecte l'unanimité et l'indépendance aux alternatives non pertinentes alors c'est une dictature.

1. On considère la constitution suivante : pour chaque préférence, on associe $|A| - 1$ points au premier de la préférence, $|A| - 2$ au deuxième , ... , 0 au dernier. Dans la préférence sociale, $a > b$ si la somme des points de a est strictement supérieure à la somme des points de b. En cas d'égalité, on départage les candidats selon un ordre $a > b > \ldots > c$ défini à l'avance. Montrer que cette constitution respecte la transitivité, l'unanimité mais pas l'indépendance aux alternatives non pertinentes.

Maintenant on suppose que la constitution respecte l'unanimité et l'indépendance aux alternatives non pertinentes.

2. Soit β une alternative choisie arbitrairement. Montrer que si dans un profil Π, toutes les préférences des N individus classent β soit en première position soit en dernière position alors β est classée soit en première position soit en dernière position dans la préférence sociale.

3. Construire un profil Π_1 tel qu'il existe un individu n^* qui possède les propriétés suivantes. Toutes les préférences des individus différents de n^* classent β soit en première, soit en dernière position. Si n^* classe β en premier de sa préférence alors β est premier de la préférence sociale. Si n^* classe β en dernier de sa préférence alors β est dernier de la préférence sociale.

4. Prouver que pour toutes alternatives a et c différentes de β, si dans la préférence de l'individu n^* on a $a > c$ alors dans la préférence sociale $a > c$ et si dans la préférence de l'individu n^* on a $a < c$ alors dans la préférence sociale $a < c$

5. Prouver que pour toutes alternatives a différentes de β, si dans la préférence transitive de l'individu n^* on a $a > \beta$ alors dans la préférence sociale $a > \beta$ et si dans la préférence transitive de l'individu n^* on a $a < \beta$ alors dans la préférence sociale $a < \beta$

6. Conclure

Exercice 3. *gerrymanderisation*

On considère une élection où l'on a le choix entre deux alternatives A et B. Les votants doivent aller voter dans un bureau de vote. Chaque bureau de vote a m votants inscrits sur ces listes. Un district regroupe n bureaux de vote. Pour savoir quelle alternative est choisie dans un district, on fait la somme des votes des différents bureaux de vote du district et l'alternative ayant le plus de voix remporte l'élection dans le district. Dans notre cas, il y a deux districts et donc $2n$ bureaux de votes. Les bureaux de votes sont numérotés de 1 à $2n$ et A_i désigne le nombre de votes pour A dans le bureau de vote i.
La gerrymanderisation consiste à obtenir une évaluation des votants pour chaque bureau de vote et de modifier leur répartition dans les districts de façon à favoriser un candidat par rapport à un autre.
On suppose maintenant que le candidat A a obtenu plus de voix que le candidat B en faisant le compte des voix sur les $2n$ districts. Donc A remporte forcément un des deux districts. On cherche une méthode pour que A remporte les deux districts.

1. Prenons l'exemple suivant avec 6 bureaux de vote comprenant chacun 100 votants. On veut répartir ces 6 bureaux dans deux districts comprenant 3 bureaux de votes chacun. Faites un premier découpage tel que les candidats A et B remportent chacun un district. Faites un second découpage tel que le candidat A remporte les deux districts.

bureau de vote	voix pour A	voix pour B
v_1	61	39
v_2	42	58
v_3	38	62
v_4	63	37
v_5	58	42
v_6	48	52

2. Prouver que si A remporte les deux districts D_1 et D_2 alors

$$(m/2)n < \sum_{j \in D_1} A_j < \sum_{i=1}^{2n} A_i - (m/2)n$$

3. Soient $2n$ bureaux de vote recevant chacun m votants. Connaissant les résultats des élections dans chaque bureau de vote, donner un algorithme polynomial en n et m utilisant la programmation dynamique qui renvoie si possible deux districts de n bureaux de vote tels que le candidat A gagne dans les deux districts.