
TD05 - Partiel 2005

Exercice 1.*Tri de fusion aux 2/3*

On considère un algorithme de tri qui fonctionne exactement comme le tri fusion, sauf que le tableau est coupé aux 2/3 au lieu d'être coupé à la moitié comme dans le tri usuel.

1. Ecrire l'algorithme `tri-2/3`. Expliquer succinctement la fonction de fusion utilisée.
2. Quelle est la complexité de ce tri ? Comparer avec les algorithmes de tri usuels.

Exercice 2.*Algorithme de la collection complète*

Pour promouvoir un article, une société offre des albums d'images à compléter. La collection complète est formée de N images différentes. Une image est fournie en cadeau avec chaque article acheté. On suppose que les images sont aléatoirement uniformément distribuées sur les articles, et les articles sont en stock illimité.

1. Proposer un algorithme pour obtenir une collection complète. On utilisera la procédure $x \leftarrow \text{achat}()$ qui retourne l'image x .

2. Combien d'achats faudra-t-il faire en moyenne pour avoir une collection complète ?

Indication : On utilisera la variable $A_{i,N}$ correspondant au nombre moyen d'achats nécessaires à l'étape i pour obtenir une image x qui n'est pas déjà dans la collection. $A_{i,N}$ peut s'exprimer comme $\sum_j p_{i,j}$, où $p_{i,j}$ est la probabilité pour que le coût soit au moins j à l'étape i . Les $p_{i,j}$ pourront être calculés par récurrence sur j .

Exercice 3.*Problème des cageots de fraises*

Nous nous intéressons à la distribution de n cageots de fraises dans p magasins. Les bénéfices que l'on peut retirer de chaque magasin est fonction du nombre de cageots fourni. Ainsi, $b_j(i)$ représente le bénéfice que tire le magasin j de la vente de i cageots ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$).

Nous appelons *gains marginaux* les gains supplémentaires obtenus par cageots :

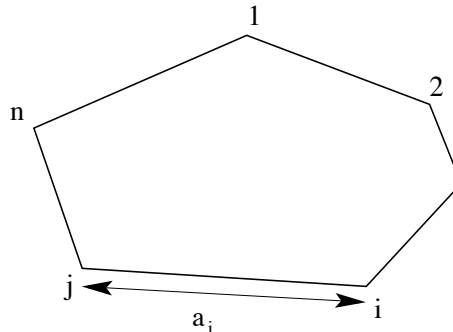
$g_j(i) = b_j(i) - b_j(i - 1)$, avec $b_j(0) = 0$ (aucun bénéfice pour la vente de 0 cageots).

1. Si, pour chaque magasin j , la fonction de gains marginaux g_j est décroissante, proposer un algorithme optimal. Donner un contre-exemple si les gains marginaux ne sont pas décroissants.
2. Combien de solutions au problème existent dans le cas général ?
3. Proposer un algorithme qui calcule le coût optimal pour répartir les cageots de fraises dans les magasins pour le cas général. Quelle est sa complexité ?

Tourner la page...

Exercice 4.*Division du périmètre d'un polygone*

On considère un polygone à n sommets, numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre de 0 à $n - 1$. La suite des longueurs des côtés est $\{a_0, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, comme représenté dans la figure ci-dessous.



1. On cherche tout d'abord à déterminer les deux indices i, j qui minimisent la valeur absolue de la différence entre les deux portions de périmètre qu'ils déterminent, i.e., qui minimisent (sommations modulo n) :

$$\left| \left(\sum_{l=i}^{j-1} a_l \right) - \left(\sum_{l=j}^{i-1} a_l \right) \right|$$

- (a) Donner un algorithme naïf et calculer sa complexité.
(b) Proposer une solution en temps linéaire.

2. *Bonus* : Trouver en temps linéaire trois indices i, j, k qui minimisent la différence entre le plus grand "tiers" et le plus petit "tiers" qu'ils déterminent. Pouvez vous généraliser pour la découpe en k portions ?