# TD07 – NP-complétude

**Exercice 1.** *Les potes de 3-SAT*

**1.** Montrer la $\mathcal{NP}$-complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :
- **3-SAT NAE** (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas toutes à la même valeur
- **3-SAT OIT** (*one in three*), où l'on impose qu'exactement un littéral soit à VRAI dans chaque clause.

On appelle SAT-$n$ le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de $n$ occurences de la même variable.

**2.** Montrer que SAT-3 est au moins aussi dur que SAT. En déduire que pour tout $n \geq 3$, SAT-$n$ est $\mathcal{NP}$-complet.

**3.** Soit $x$ une variable apparaissant dans une formule $F$ de SAT-2. Trouver une formule équivalente à $F$ et dans laquelle la variable $x$ n'apparaisse plus. En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

**Exercice 2.** *Complexité de SUBSET-SUM*

On définit le problème **SUBSET-SUM** de la manière suivante :
Entrée : un ensemble fini $S$ d'entiers positifs et un entier objectif $t$.
Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$ ?

**1.** Montrer qu'il est $\mathcal{NP}$-complet.

*Indication :* vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, ..., C_{m-1}$ sur les variables $x_0, ..., x_{n-1}$, considérer $S$ l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où $b_{ij}$ (resp. $b'_{ij}$) vaut 1 si le littéral $x_i$ (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans $C_j$ et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif $t$ tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme $t$ si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

**Exercice 3.** *Sous-chaîne transitive*

Dans un graphe orienté, on dit que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ est une chaîne transitive de longueur $k$ si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq k$, $x_i x_j \in E$. On définit le problème **Sous-chaîne transitive** comme suit :
*Instance :* Un graphe orienté $D = (V, E)$.
*Question :* $D$ contient-il une sous-chaîne transitive de longueur au moins $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ ?

**1.** Montrer que ce problème est $\mathcal{NP}$-complet.

*Indication :* Vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_1, ..., C_k$, avec $C_i = (x_i^1 \vee x_i^2 \vee x_i^3)$, construisez un graphe orienté sur l'ensemble de sommets $V = \{C_0\} \bigcup_{1 \leq i \leq k} \{C_i, x_i^1, x_i^2, x_i^3\}$ de façon à ce que les arcs orientés entre une même variable dans différentes clauses aient une signification vis-à-vis de la consistance.