Algorithmique 2
Algorithmes de flots

Scribes: Fabien Givors et Olivier Schwander

25 avril 2007

1 Flot maximum dans les réseaux

1.1 Introduction

Définition 1 (réseau)
Un réseau *est un triplet $R = (V, E, c)$ où $G = (V, E)$ est un graphe orienté et $c : V \times V \to \mathbb{R}_+$ est une fonction nulle en dehors de E ($c(e)$ capacité de l'arc e).*

On distingue ainsi deux sommets s (source) et p (puits).

Définition 2 (flot)
Soit $R = (V, E, c)$ un réseau de source s et de puits p, un flot *φ est une application $V \times V \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

i) pseudosymétrie : $\forall x,\, y \in V,\ \varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$

ii) contraintes de capacité : $\forall x,\, y \in V,\ \varphi(x, y) \leq c(x, y)$

iii) loi de conservation : $\forall x \in X \setminus \{s, p\},\ \varphi(x, V) = \sum_{y \in V} \varphi(x, y) = 0$ (première loi de Kirchoff)

$$\sum_{y \in N^-(x)} \varphi(x, y) \ + \sum_{y \in N^+(x)} \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{y \in N^-(x)} \varphi(y, x) \ = \sum_{y \in N^+(x)} \varphi(x, y)$$

Intuition : fluide, courant, données, passant dans le réseau (tout ce qui rentre ressort)
Remarque : si $(x, y) \notin E$ et $(y, x) \notin E$ alors $\varphi(x, y) = 0$ (car $c(x, y) = c(y, x) = 0$ et i et ii).
Notation : $f(a, b) = \sum_{x \in A,\, y \in B} f(x, y)$

Définition 3 (valeur du flot φ)

$$|\varphi| = \varphi(s, V) = \sum_{x \in V} \varphi(s, x)$$

Problème 1 : existe-t-il un flot compatible avec les contraintes ? Oui : $\varphi = 0$ convient.
Problème 2 : maximiser avec la valeur du flot.
Plein de variantes :
- valeur des capacités et des flots dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$
- la présence d'une source, d'un puits : ce n'est pas toujours le cas.
- contraintes sur les arcs : borne supérieure, bornes supérieures positives, parfois aussi des bornes inférieures $b(x, y) \leq \varphi(x, y) \leq c(x, y)$. Ça peut poser des problèmes dans la recherche de flots compatibles.

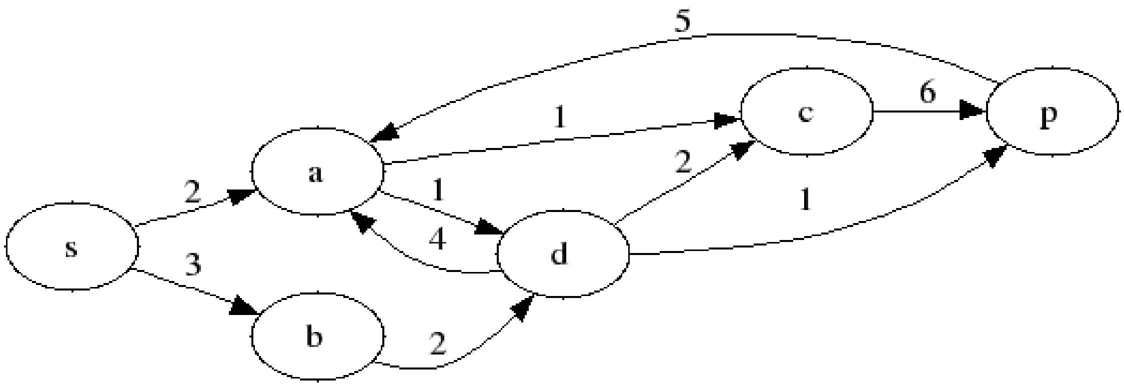

FIG. 1 – Graphe d'un réseau

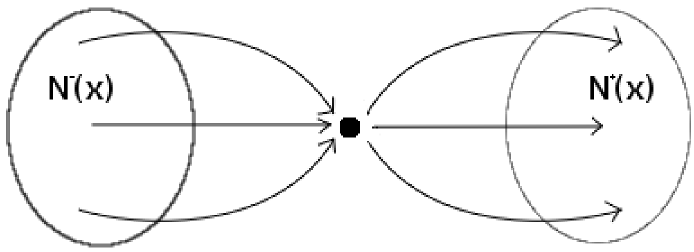

FIG. 2 – Problèmes de voisinages

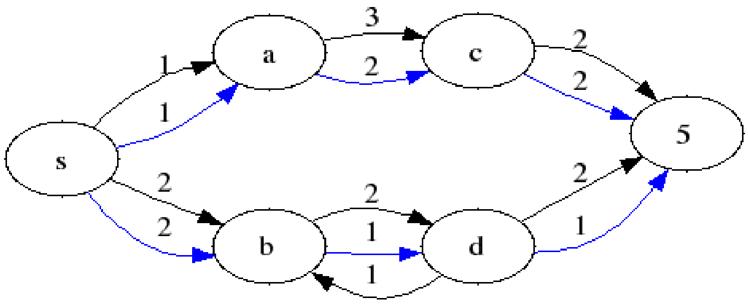

FIG. 3 – Graph du flot

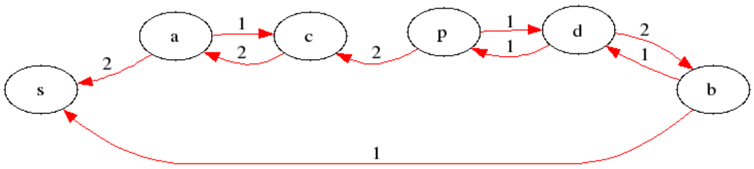

FIG. 4 – Graph des écarts

2 Méthode de Ford-Fulkerson

2.1 Graphe des écarts (ou réseau des écarts)

Définition 4 (capacité résiduelle)
$R = (V, E, c)$ réseau avec sources s et puits p, φ flot sur $\mathbb{R}$. Pour tout arc $e \in E$, la capacité résiduelle *de e est*

$$c_\varphi(e) = c(e) - \varphi(e) \leq 0$$

Définition 5 (réseau des écarts)
Le réseau des écarts *est le réseau $R_\varphi = (V, E_\varphi, c_\varphi)$ où $E_\varphi = \{(x, y) \in V \times V \mid c_\varphi(x, y) < 0\}$.*

Propriété 1
Soit φ flot sur $R = (V, E, c)$ et φ' flot sur $R = (V, E, c)$. Alors $\varphi + \varphi'$ est un flot de R de valeur $|\varphi + \varphi'| = |\varphi| + |\varphi'|$.

2.2 Chemin améliorant

Définition 6 (chemin améliorant)
Pour un réseau $R = (V, E, c)$ et un flot φ, un chemin améliorant *μ pour φ est un chemin de s à p dans le graphe de R_φ.*

Définition 7 (capacité résiduelle)
La capacité résiduelle *de μ est $c_\varphi = \min_{e \text{ arc de } \mu} c_\varphi(e)$.*

Propriété 2
Pour $R=(V,E,c)$ réseau et φ flot de R, soit μ chemin améliorant pour φ, alors

$$\varphi_\mu(e) = \begin{cases} c_\varphi(\mu) & \textit{si } e \in \mu \\ -c_\varphi(\mu) & \textit{si } \bar{e} \in \mu \textit{ flot de } R_\varphi \textit{ de valeur } c_\varphi(\mu) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 1
Avec les mêmes notations, $\varphi' = \varphi + \varphi_\mu$ est un flot de R de valeur $|\varphi| + |\varphi_\mu| > |\varphi|$

2.3 Coupes dans les réseaux

Définition 8 (coupe)
Une coupe *de $R=(V,E,c)$ est une partition de V en Y et $\bar{Y}$ avec $s \in Y$ et $p \in \bar{Y}$.*

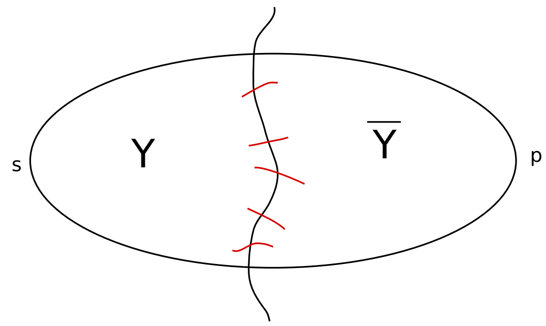

FIG. 5 – Pour bien comprendre la coupe

Définition 9 (capacité)
La capacité *de la coupe* $(Y,\bar{Y}) = c(Y,\bar{Y}) = \sum_{y\in Y,\, z\in\bar{Y}} c(y,z)$

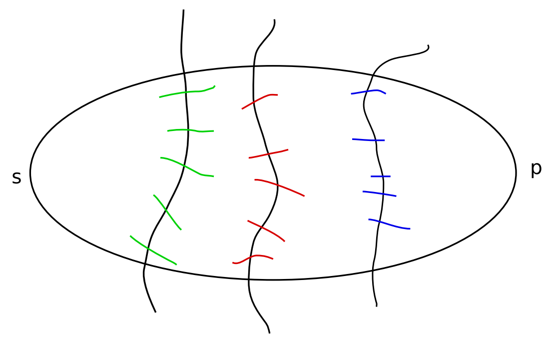

FIG. 6 – Pour bien comprendre les coupes

Propriété 3
Pour toute coupe $(Y, \bar{Y})$ de R, $\varphi(Y, \bar{Y}) = |\varphi|$

Preuve :

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(Y, \bar{Y}) & = & \varphi(Y, V) - \underbrace{\varphi(Y, Y)}_{=0 \text{ (cas (i))}} \\
& = & \varphi(Y, V) \\
& = & \varphi(S, V) + \varphi(Y \setminus \{s\}, V) \\
& = & \varphi(S, V) + \sum_{y \in Y \setminus \{s\}} \underbrace{\varphi(y, V)}_{=0 \text{ (cas (iii))}} \\
& = & |\varphi|
\end{array}$$

Corollaire 2
Pour toute coupe $(Y, \bar{Y})$ de R, $|\varphi| \leq c(Y, \bar{Y})$.

Preuve : 1 cf avant et $\varphi(Y, \bar{Y}) \leq c(Y, \bar{Y})$ avec (ii)

Théorème 1
(Ford-Fulkerson) Soit φ flot de $R = (V, E, c)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) φ flot de valeur maximum,
ii) il n'existe pas de chemin améliorant,
iii) il existe une coupe $(Y, \bar{Y})$ telle que $|\varphi| = c(Y, \bar{Y})$.

Preuve :

(i)	$\Rightarrow$	(ii)	Oui : la contraposée a été vue en corollaire.
(iii)	$\Rightarrow$	(i)	Oui : avec le corollaire $\forall\ \varphi\ \forall\ (Y, \bar{Y}) \vert\varphi\vert \leq c(Y, \bar{Y})$
(ii)	$\Rightarrow$	(iii)	Prendre $Y = \{x \in V \vert \exists$ un chemin de sx dans $R_\varphi\}$

En particulier, $s \in Y$ et $p \notin Y$ (car il n'existe pas de chemin améliorant). Soit $(y, z) \in X \times \bar{Y}$. Si $\varphi(y, z) < c(y, z)$, alors $(y, z) \in E_\varphi$ et $z \in Y$ d'où une contradiction.

Donc $\varphi(y, z) = c(y, z)$. Donc $|\varphi| = \varphi(Y, \bar{y})$.

Autre formulation (max-flow, min-cut) :

$$max_{\varphi \text{ flot de } R} |\varphi| = min_{(Y, \bar{Y}) \text{ coupe de } R}\ c(Y, \bar{Y})$$

C'est le théorème min-max.

Idée d'algorithme :
– partir de $\varphi = 0$,
– chercher un chemin améliorant de R_φ pour φ au fur et à mesure.

Remarque : avec des valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, on est sûr que ça termine. Dans $\mathbb{R}$, ce n'est pas gagné.

Sans plus de détails, l'algorithme est potentiellement exponentiel.

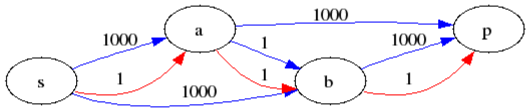

FIG. 7 – Comment planter son algo...

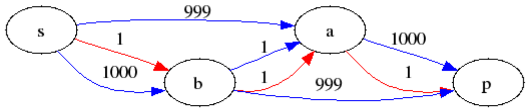

FIG. 8 – ... en douceur

2.4 Algorithme de Edmonds-Karp

ENTRÉES: $R = (V, E, c)$ avec source s et puits p
SORTIES: flot φ de R de valeur max
  PourTout $(x, y) \in V \times V, \varphi(x, y) \leftarrow \varphi(y, x) \leftarrow 0$ **Faire**
    TantQue Il existe un chemin de s à p dans R_φ **Faire**
      Prendre μ un *plus court chemin* (au sens du nombre d'arcs) de s à p dans R_φ. $c_\varphi = \min\{c_\varphi(x, y) | (x, y) \in \mu\}$
      PourTout $(x, y) \in \mu$ **Faire**
        $\varphi(x, y) = \varphi(x, y) + c_\varphi(\mu)$
        $\varphi(x, y) \leftarrow -\varphi(x, y)$
      FinPour
    FinTantQue
  FinPour

Lemme
Au cours du déroulement de l'algorithme on a :

$$\forall x,\ dist_\varphi(s, x) = \ distance\ de\ r\ à\ x\ dans\ R_\varphi$$

Preuve :
Par récurrence sur $\mathrm{dist}_\varphi(s, x)$ Soit ν le plus court chemin de s à x dans $R_{\varphi'}$ et y le prédécesseur de x dans ν.

$$\mathrm{dist}_{\varphi'}(s, y) \geq \mathrm{dist}_\varphi(s, y) \text{ (hypothèse de récurrence)}$$

Si $(y, x) \in E_\varphi$, $\mathrm{dist}_\varphi(s, x) < \mathrm{dist}_\varphi(s, y) + 1$ Donc $\mathrm{dist}_\varphi(s, x) \geq \mathrm{dist}_{\varphi'}(s, y) + 1 = \mathrm{dist}_{\varphi'}(s, x)$
Si $(y, x) \notin E_\varphi$
Si (y, x) absent dans R_φ, il apparaît dans $R_{\varphi'}$. On a fait passer du flot de x vers y c'est-à-dire $(x, y) \in \mu$.
Si μ est le plus court chemin alors $\mathrm{dist}_\varphi(s, y) = \mathrm{dist}_\varphi(s, x) + 1$.

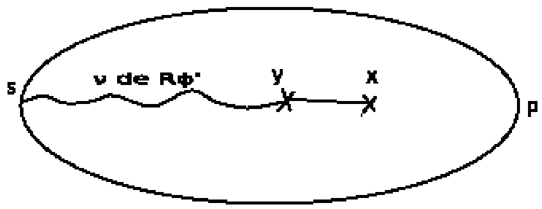

FIG. 9 – En chemin, j'ai rencontré...

De plus :

$$\begin{cases} \text{dist}_{\varphi'}(s,x) & = & \text{dist}_{\varphi'}(s,y)+1 \\ \text{dist}_{\varphi}(s,y) & = & \text{dist}_{\varphi}(s,x)+1 \\ \text{dist}_{\varphi'}(s,y) & \geq & \text{dist}_{\varphi}(s,y) \text{ par hypothèse de récurrence} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \text{dist}_{\varphi'}(s,x) & = & \text{dist}_{\varphi'}(s,y)+1 \\ & \geq & \text{dist}_{\varphi'}(s,y)+1 \\ & \geq & \text{dist}_{\varphi}(s,y)+1 \\ & \geq & \text{dist}_{\varphi}(s,x)+1+1 \\ & = & \text{dist}_{\varphi}(s,x)+2 \end{array}$$

Théorème 2
La boucle de l'algorithme est effectuée au plus $O(nm)$ fois.

Preuve :
Regarder l' évolution des arcs critiques : ce sont les arcs (x,y) tels que pour φ et μ le plus court chemin dans R_φ on ait :

$$c_\varphi(x,y) = c_\varphi(\mu)$$

Sur μ il existe au moins un arc critique. La boucle fait disparaître au moins un arc critique. Notons le (x,y) Après sa disparition, quand il réapparaît, on a :

$$n > \text{dist}_{\varphi'}(s,x) \geq \text{dist}_{\varphi}(s,x)+2$$

Donc le nombre de réapparition est d'au plus $\frac{n}{2}$

D'où une complexité en $O(nm^2)$