Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°10

Recherche de coloriage planaire (enfin, quelque chose comme ça)

1 Coloriage de carte

Un ancien L3IF (que voulez-vous, c'est le fil conducteur...) s'est reconverti dans la Géographie. Il doit mettre au point une carte de l'Europe, avec pour chaque pays une couleur propre, tel que 2 pays voisins n'aient pas la même couleur.

Le problème, c'est qu'il n'a que 6 couleurs à sa disposition.

Il espère pouvoir se sortir d'affaires en utilisant ces vieilles connaissances d'algo. Il imagine chaque pays représenté par un sommet, avec des arêtes entre deux pays frontaliers.

Exercice 1 Avant cela, il a l'intuition de devoir d'abord montrer la formule suivante, due à Euler pour les graphes planaires à n sommets, e arêtes, f faces et k composantes connexes, qui s'exprime :

$$n - e + f = k + 1$$

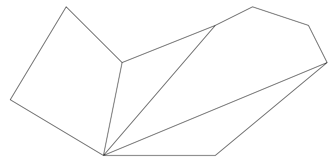
Exercice 2

1. Notre L3IF veut compter le nombre frontière communes. D'après lui, il doit en trouver moins de $3n-6$ (n le nombre de pays, $n \geq 3$). A-t'il raison ?
   Nostalgiquement, il se souvient que s'il n'y avait pas de triangle dans son graphe des frontières, il y aurait alors moins de $2n-4$ frontières communes. Savez-vous pourquoi ?
2. En déduire qu'il y a au moins un pays entouré par moins de 5 voisins.
3. Sur ce, il saute de joie, sachant qu'il peut maintenant colorier l'Europe avec ses 6 couleurs différentes. Savez-vous comment ?
4. Au moment de colorier le premier pays, notre L3IF casse son crayon. Ce dernier est perdu, irrécupérable. Tout est-il foutu pour notre L3IF, sa carrière de géographe aux oubliettes, ou reste-t'il un mince espoir pour colorier l'Europe avec seulement 5 couleurs ?

2 Galerie d'Art

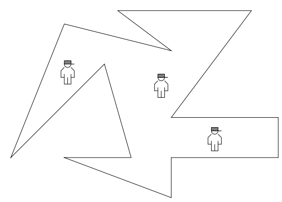
N'ayant pas résolu de lui-même la dernière question, notre L3IF arrête ses études de géographie, et se retrouve guide dans une galerie d'art. Il ne peut cependant s'empêcher de remarquer que le plan de la galerie d'art est *extérieur*, c'est à dire que l'une de ses représentations planaires est telle que tous ses sommets sont sur la face externe (voyez vous-même ci-après l'exemple de l'annexe du musée).

Exercice 3 Montrer que tout graphe planaire extérieur est 3-coloriable.



Exercice 4 La galerie en elle-même forme un polygone simple à n côtés. Pendant les visites, elle est surveillée par $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens. Montrer que si les gardiens sont judicieusement placés, tout point de la galerie est visible par au moins un des gardiens.

Montrer aussi qu'un architecte vicieux peut toujours construire un batiment nécessitant au moins $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens pour le surveiller.



3 Recherche de suspect

Horreur, la galerie a été dévalisée pendant la nuit. Le seul témoin, un gardien, a reconnu le voleur. Malheureusement, il est bègue, et ne parle pas la langue (dommage, hein !!). Pouvez-vous aider ses collègues à retrouvez le coupable ?

Exercice 5 Mettez au point un algorithme naïf afin de réduire le bégaiement.

Exercice 6 Cependant, le bégaiement n'est pas aussi simple qu'une répétition de caractère. Si on veut pouvoir retrouver le nom du principal suspect dans la déposition du gardien, il va falloir faire abstraction d'une chaîne de caractère arbitraire entre les caractères recherchés.

Essayez de retrouver le nom du principal suspect, *abbac*, dans la phrase bredouillée par le gardien :

$$cabccbacbacab$$

Pouvez-vous construire un algorithme pour généraliser cette recherche ?

Exercice 7 On a essayé de donner un café bien serré au gardien afin de calmer le bégaiement. La réussite était totale, sauf que maintenant on ne peut plus l'empêcher de débiter une série de chiffres.

On recherche le numéro de matricule du suspect, 31415, parmi les chiffres débités par le gardien :

$$235902314152673992314256415$$

Quelle est la complexité de recherche d'un algorithme naïf ?

Vous qui avez fait un TD sur les tables de hachage, pouvez-vous trouver un algorithme meilleur en moyenne ? Appliquez-le au problème.