Algorithmique II
Année 2006-2007

Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD 3
Initiation aux graphes

1 Réunion Mondaine

Un couple reçoit chez lui quatre autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois de la soirée, certaines personnes se serrent la main. À la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse, combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que l'on ne serre pas sa propre main ni celle de son conjoint :

a - combien l'hôte a-t-il serré de mains,

b - combien son épouse a-t-elle serrée de mains ?

2 Quelques propriétés sur les graphes

Exercice 2.1. Montrer que dans tout graphe $G = (V, E)$, il existe deux sommets de même degré.

Exercice 2.2. A quoi ressemble un graphe dont tous les sommets sont de degré 1 exactement ? de degré 2 exactement ? Si un graphe (non orienté) a n sommets, tous de degré k, que dire de nk ?

Exercice 2.3. Quels sont les nombres entiers qui peuvent être l'ordre (i.e. nombre de sommets) d'un graphe k-régulier ? Construire de tels graphes.

3 Petits problèmes...

Exercice 3

On colorie les arêtes d'un graphe complet d'ordre n, $n \geq 6$, avec deux couleurs. Montrer qu'il existe nécessairement un triangle monochromatique. Donner un contre-exemple à cette propriété avec $n = 5$.

Exercice 4

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.
- Montrer que deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont un sommet en commun.

– Montrer que si G est un arbre toutes les chaînes de longueur maximum ont un sommet en commun.

Exercice 5

On suppose qu'il existe deux chaînes disjointes (au sens des arêtes) entre deux sommets x et y. Montrer qu'il existe deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 entre x et y qui vérifient la condition suivante. Si on note $a_1, a_2, \dots, a_p$ (resp. $b_1, b_2, \dots, b_p$) l'ordre sur μ_1 (resp. sur μ_2) en allant de x vers y des sommets de $\mu_1 \cap \mu_2$ alors $a_i = b_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq p$.

Exercice 6

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| = 2n$ et $|E| = m$. Montrer que si G ne contient pas de cycle de longueur 3 alors $m \leq n^2$.

Exercice 7

Pour $n \geq 2$, montrer qu'il existe exactement deux graphes à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré. On donnera un procédé de construction.