

TD 3 Initiation aux graphes

1 Réunion Mondaine

Un couple reçoit chez lui quatre autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois de la soirée, certaines personnes se serrent la main. À la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse, combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que l'on ne serre pas sa propre main ni celle de son conjoint :

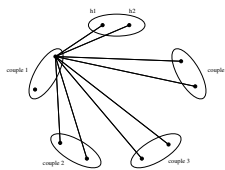
- a - combien l'hôte a-t-il serré de mains,
- b - combien son épouse a-t-elle serrée de mains?

Correction

On modélise la situation par un graphe (dingue ça!) : chaque personne est un sommet du graphe, deux sommets sont reliés par une arête si les personnes correspondantes se sont serrées la main. Puisqu'il y a dix personnes, chacune peut serrer huit mains au plus (pas la sienne ni celle de son conjoint). On a donc $\forall x \in V, 0 \leq d(x) \leq 8$.

Supposons que l'hôtesse ait serré 8 mains, ceci indique qu'elle aurait serré la main à chaque invité et aucun n'aurait pu répondre à l'hôte : «Je n'ai serré la main de personne». C'est donc un invité qui a serré huit mains. Comme la seule personne (autre que lui) à qui il ne serre pas la main est son conjoint, c'est ce conjoint qui n'a serré la main de personne.

On a donc



Continuons le raisonnement. Si l'hôtesse a serré 7 mains, c'est à un des deux conjoints du couple 1 et aux deux conjoints des couples 2,3 et 4. Aucun d'entre eux ne peut alors affirmer avoir serré une seule main. C'est donc l'un des conjoints du couple 2 qui a serré 7 mains, l'autre conjoint n'ayant serré qu'une seule main.

On continue et on obtient $d(\text{hôte})=d(\text{hôtesse})=4$.

2 Quelques propriétés sur les graphes

Exercice 2.1. Montrer que dans tout graphe $G = (V, E)$, il existe deux sommets de même degré.

Correction

Soit $n = |V|$. Nous avons $\forall x \in V, 0 \leq d(x) \leq n-1$, soit n valeurs possibles pour $d(x)$. Si les n valeurs sont différentes alors $\exists x \in V, d(x) = 0$ et $\exists y \in V, d(y) = n-1$. Mais ceci est impossible car alors y est relié à tous les autres sommets donc à x d'où $d(x) > 0$.

Exercice 2.2. A quoi ressemble un graphe dont tous les sommets sont de degré 1 exactement ? de degré 2 exactement ? Si un graphe (non orienté) a n sommets, tous de degré k , que dire de nk ?

Correction

- Degré 1 : constitué de composantes connexes de 2 éléments maximum
- Degré 2 : constitué de composantes connexes sous forme de chaînes cyclique
- Degré d : comptons le nombre d'arêtes : $\frac{nk}{2}$ (chaque arête est comptée 2 fois), donc nk est pair.

Exercice 2.3. Quels sont les nombres entiers qui peuvent être l'ordre (i.e. nombre de sommets) d'un graphe k -régulier ? Construire de tels graphes.

Correction

La condition $\sum_{x \in V} d(x)$ paire ($= 2m$, vraie dans tout graphe) impose :

- si k est pair alors $n > k$;
- si k est impair alors n est pair et $n > k$.

Montrons que ces conditions sont suffisantes :

- si k est pair, on considère le graphe $G = (V, E)$ où $V = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, $n > k$ construit de la manière suivante.

Pour $0 \leq i \leq n-1$, on relie x_i à $x_{i-\frac{k}{2}}, x_{i-\frac{k}{2}+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{i+\frac{k}{2}}$, les indices étant pris modulo n . On obtient bien un graphe k -régulier.

- si k est impair. Si $n = k+1$, on prend le graphe complet. Si n pair et $n > k+1$, on construit le graphe $(k+1)$ -régulier comme pour le cas pair ($k+1$ est pair) ensuite on supprime les arêtes $x_0x_1, x_2x_3, \dots, x_{n-2}x_{n-1}$ et le tour est joué.

3 Petits problèmes...

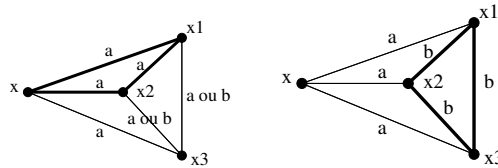
Exercice 3

On colorie les arêtes d'un graphe complet d'ordre n , $n \geq 6$, avec deux couleurs. Montrer qu'il existe nécessairement un triangle monochromatique. Donner un contre-exemple à cette propriété avec $n = 5$.

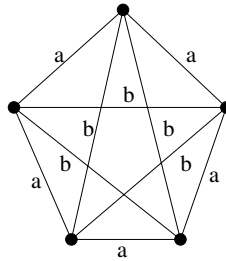
Correction

Soit x un sommet du graphe, il a au moins cinq voisins. Si l'on colorie les arêtes incidentes à x avec deux couleurs a et b , il y aura au moins trois arêtes incidentes à x de la couleur majoritaire (disons a).

Notons x_1, x_2 et x_3 les extrémités (autres que x) de ces arêtes. Si une arête $x_i x_j$ $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ a la couleur a alors $\{x, x_i, x_j\}$ est un triangle de couleur a , sinon $\{x_1, x_2, x_3\}$ est un triangle de couleur b .



Voici un contre-exemple de taille 5 :



Exercice 4

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

- Montrer que deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont un sommet en commun.
- Montrer que si G est un arbre toutes les chaînes de longueur maximum ont un sommet en commun.

Correction

a) Considérons deux chaînes élémentaires disjointes μ_1 et μ_2 de longueur maximale. Puisque G est connexe, il existe une chaîne élémentaire μ reliant un sommet x de μ_1 et un sommet y de μ_2 , on choisit μ n'ayant que x et y en commun avec μ_1 et μ_2 . C'est toujours possible puisqu'il existe une chaîne élémentaire μ' reliant un sommet x_1 de μ_1 à un sommet x_2 de μ_2 ; en notant $\mu' = (x_1, \dots, x, \dots, y, \dots, x_2)$ cette chaîne où x est le dernier sommet de μ_1

apparaissant dans μ' et y le premier sommet de μ_2 après x dans μ' , la sous-chaîne (x, \dots, y) de μ' est la chaîne μ recherchée. Le sommet x partitionne μ_1 en deux sous-chaînes μ'_1 et μ''_1 avec $lg(\mu'_1) \leq lg(\mu''_1)$ tandis que le sommet y partitionne μ_2 en deux sous-chaînes μ'_2 et μ''_2 avec $lg(\mu'_2) \leq lg(\mu''_2)$; on suppose aussi $lg(\mu'_1) \leq lg(\mu'_2)$. Alors $\mu'_2\mu\mu''_1$ est une chaîne élémentaire vérifiant : $lg(\mu'_2\mu\mu''_1) = lg(\mu'_2) + lg(\mu) + lg(\mu''_1) \geq lg(\mu'_1) + 1 + lg(\mu''_1) > lg(\mu_1)$. Une contradiction.

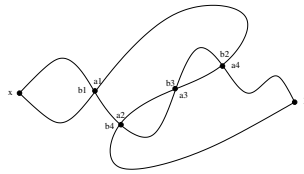
b) La propriété est vraie si G n'admet qu'une ou deux chaînes de longueur maximum d'après le a). Supposons par récurrence que la propriété est vraie pour k chaînes. Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble de $k+1$ chaînes μ_i , $0 \leq i \leq k$ de longueur maximum tel que l'intersection des μ_i soit vide. Alors μ_0 intersecte toutes les autres chaînes en dehors de $\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mu_i$. Soit alors $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} \mu_i$, $y \in \mu_0 \cap \mu_1$. Ces 2 points existent et sont distincts d'après le a) et nos suppositions. De plus, il existe μ_j tel que $y \notin \mu_0 \cap \mu_j$ car sinon l'intersection des μ_i contient y et n'est pas vide. Soit $z \in \mu_0 \cap \mu_j$, on a alors un cycle passant par x, y et z de la manière suivante; on part de x vers y en suivant μ_1 , puis on va de y à z en passant par μ_0 et enfin on retourne à x en passant par μ_j . Encore une contradiction.

Exercice 5

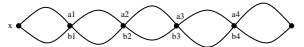
On suppose qu'il existe deux chaînes disjointes (au sens des arêtes) entre deux sommets x et y . Montrer qu'il existe deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 entre x et y qui vérifient la condition suivante. Si on note a_1, a_2, \dots, a_p (resp. b_1, b_2, \dots, b_p) l'ordre sur μ_1 (resp. sur μ_2) en allant de x vers y des sommets de $\mu_1 \cap \mu_2$ alors $a_i = b_i, \forall 1 \leq i \leq p$.

Correction

On veut montrer que si



alors il existe



Considérons deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 connectant x à y et telles que $lg(\mu_1) + lg(\mu_2)$ soit minimal, alors μ_1 et μ_2 vérifient la propriété demandée.

Supposons le contraire. Soit k le plus petit indice tel que $a_k \neq b_k$, $\exists l > k$ tel que $a_l = b_k$ et $\exists m > k$ tel que $b_m = a_k$.

$$\mu_1 : x \dots a_1 \dots a_2 \dots a_{k-1} \dots a_k \dots a_l \dots y$$

$$\mu_2 : x \dots b_1 \dots b_2 \dots b_{k-1} \dots b_k \dots b_m \dots y$$

On considère $\mu'_1 = x \dots a_k = b_m \dots y$ et $\mu'_2 = x \dots b_k = a_l \dots y$. μ'_1 et μ'_2 connectent x à y et n'ont pas d'arêtes communes. D'autre part $lg(\mu'_1) + lg(\mu'_2) < lg(\mu_1) + lg(\mu_2)$ car la portion de μ_1 entre a_k et a_l contient au moins une arête et n'apparaît pas dans $\mu'_1 \cup \mu'_2$. On a une contradiction avec $lg(\mu_1) + lg(\mu_2)$ minimum.

Exercice 6

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| = 2n$ et $|E| = m$. Montrer que si G ne contient pas de cycle de longueur 3 alors $m \leq n^2$.

Correction

Preuve par récurrence sur n . La propriété est vraie si $n = 1$.

Si $n > 1$.

- Si G n'a pas d'arêtes, la propriété est vérifiée.
- Si G a au moins une arête xy , considérons le sous-graphe G' de G engendré par $V \setminus \{x, y\}$. On a $m(G) = m(G') + |N(x) \setminus \{y\}| + |N(y) \setminus \{x\}| + 1$.
Or $(N(x) \setminus \{y\}) \cap (N(y) \setminus \{x\}) = \emptyset$ car il n'y a pas de triangle.
Donc $|N(x) \setminus \{y\}| + |N(y) \setminus \{x\}| = |(N(x) \setminus \{y\}) \cup (N(y) \setminus \{x\})| \leq |G'| = 2(n-1)$.
Par hypothèse de récurrence, $m(G') \leq (n-1)^2$ donc on obtient $m(G) \leq (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = n^2$. CQFD

Exercice 7

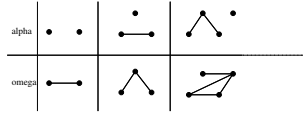
Pour $n \geq 2$, montrer qu'il existe exactement deux graphes à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré. On donnera un procédé de construction.

Correction

Preuve par récurrence. Soit G un graphe de taille n . Les degrés de ses sommets sont répartis entre 0 et $n-1$. Mais on ne peut pas avoir en même temps un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$. Hypothèse de récurrence : il existe un unique graphe $\alpha(n)$ à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[0, \dots, n-2]$ et il existe un unique graphe $\omega(n)$ à n sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[1, \dots, n-1]$.

La propriété est vraie pour $n = 2$.

Comme la propriété d'avoir un unique couple de sommets de même degré est stable par passage au complémentaire, on se restreint à l'étude du cas où les



degrés des sommets sont répartis entre 1 et $n - 1$. On a alors $n - 1$ tiroirs pour n chaussettes et un unique couple de chaussettes dans le même tiroir donc aucun des tiroirs n'est vide. De plus, il ne peut pas y avoir deux sommets de degré $n - 1$ sinon il n'y aurait pas de sommet de degré 1. On retire ce sommet de degré $n - 1$ et on obtient un graphe de taille $n - 1$ dont les degrés varient entre 0 et $n - 3$ (le sommet de degré $n - 1$ a disparu, le ou les sommets de degré $n - 2$ sont devenus des sommets de degré $n - 3$). On applique alors l'hypothèse de récurrence qui nous affirme qu'il existe un unique graphe à $n - 1$ sommets ayant un unique couple de sommets de même degré dont les degrés varient dans l'intervalle $[0, \dots, n - 3]$. En raisonnant de même sur le complémentaire, on prouve que la propriété est vérifiée.

On déduit directement de la preuve le procédé de construction suivant. On obtient $\alpha(n+1)$ en ajoutant un sommet relié à rien au graphe $\omega(n)$ et on obtient $\omega(n+1)$ en ajoutant un sommet relié à tous les autres au graphe $\alpha(n)$.