Algorithmique II
Année 2006-2007

Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°4
Graphes à part (ou l'inverse)

1 Du côté d'Escher

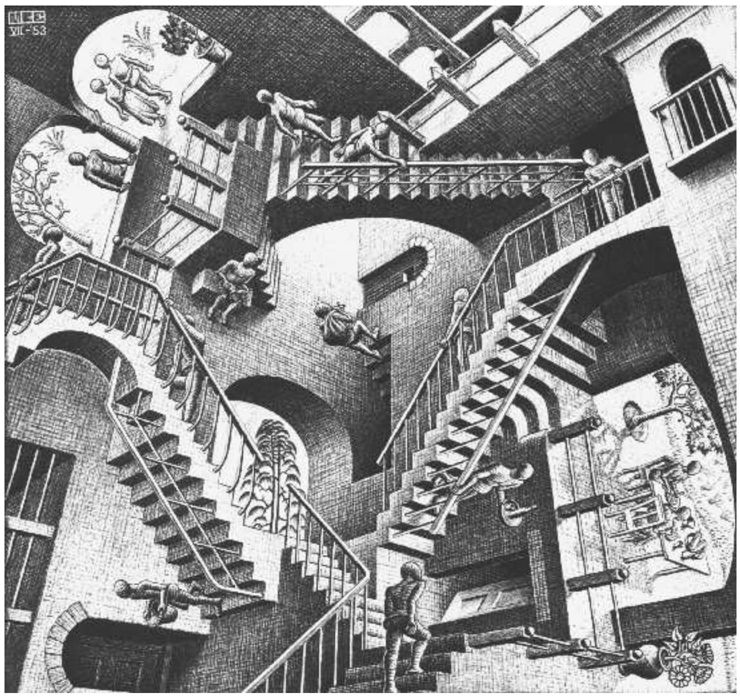

FIG. 1 – Relativity, 1953

Nous sommes dans la maison de Maurits Cornelis Escher. On y trouve des escaliers qu'on ne peut que descendre[1] qui relient entre elles des plates-formes.

Si en prenant une suite d'escaliers (au moins un), on arrive à retourner sur la plate-forme de départ (balèze hein !), c'est qu'on a trouvé un circuit d'escaliers d'Escher.

Un ensemble de plates-formes où l'on peut librement aller et revenir (en suivant des circuits d'Escher) est appelé une plate-forme d'Escher.

Exercice 1

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher si et seulement si chaque plate-forme d'Escher ne contient qu'une plate-forme.
2. On suppose qu'il existe au moins un circuit d'Escher. Écrire un algorithme en temps $O(n+m)$ qui renvoie un circuit élémentaire d'Escher.

[1] Si ça vous pose problème, imaginez que ce sont des escalators très très rapides.

Exercice 2 On note $P_i, 1 \leq i \leq k$, les plates-formes d'Escher. On considère la maison du voisin d'Escher qui possède k plates-formes notées p_i. Il y a un escalier (descendant) entre deux plates-formes p_i et p_j si et seulement si il existe un escalier entre une plate-forme de P_i et une de P_j, $i \neq j$.

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher dans la maison du voisin.
2. Donner un algorithme de construction de la maison du voisin en temps linéaire.

Exercice 3 Une maison est à deux étages si on peut partitionner l'ensemble des plates-formes en deux parties de telle manière qu'il n'existe des escaliers (qu'on peut monter et descendre cette fois) qu'entre un étage et l'autre.

1. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) la maison est à deux étages ;
   (b) il n'y a pas de cycle d'Escher de longueur impaire ;
   (c) il n'y a pas de cycle élémentaire d'Escher de longueur impaire.
2. Écrire un algorithme de reconnaissance des maisons à deux étages. Évaluer la complexité de cet algorithme.

2 Prenez des claques (les vôtres)

Exercice 4 On considère un graphe $G = (X, E)$ non orienté et sans boucles. Une *clique* de G est un sous-graphe complet. Une clique K est maximale si elle est maximale par inclusion : $\forall x \in X - K, K \cup \{x\}$ n'est pas une clique. Ne pas confondre clique maximale et clique de taille maximale.

1. Donner un algorithme de calcul d'une clique maximale. Quelle est sa complexité ? Pouvez-vous faire en $O(n + m)$?
2. Modifier l'algorithme précédent pour chercher deux sommets à distance 2 dans un graphe connexe non complet.
3. Proposer une méthode différente pour rechercher deux sommets à distance 2.

Notes de fin de TD

Dans la vraie vie, un circuit [élémentaire] d'Escher est un *circuit [élémentaire]* dans un *graphe orienté*, une plate-forme d'Escher est une *composante fortement connexe* et une maison à deux étages est un *graphe biparti*.