Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°4
Graphes à part (ou l'inverse)

1 Du côté d'Escher

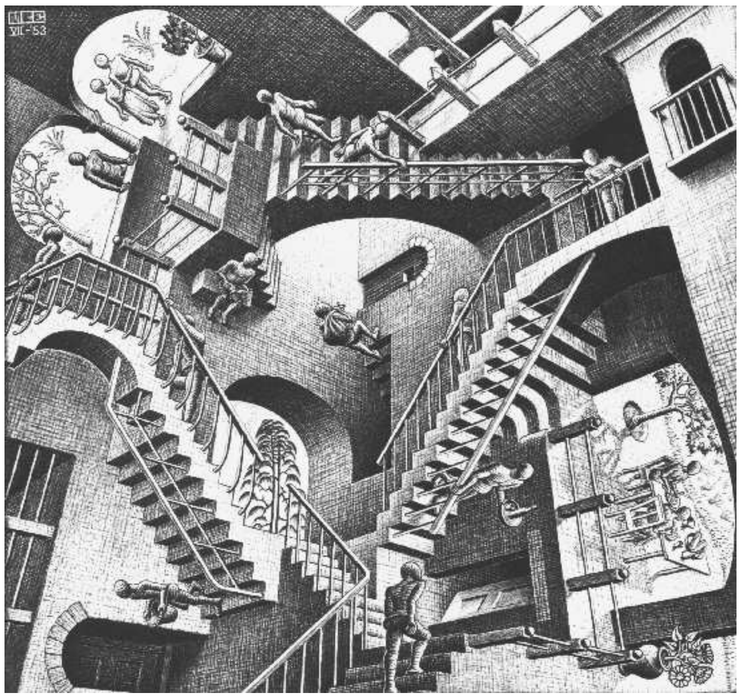

Fig. 1 – Relativity, 1953

Nous sommes dans la maison de Maurits Cornelis Escher. On y trouve des escaliers qu'on ne peut que descendre[1] qui relient entre elles des plates-formes.

Si en prenant une suite d'escaliers (au moins un), on arrive à retourner sur la plate-forme de départ (balèze hein !), c'est qu'on a trouvé un circuit d'escaliers d'Escher.

Un ensemble de plates-formes où l'on peut librement aller et revenir (en suivant des circuits d'Escher) est appelé une plate-forme d'Escher.

Exercice 1

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher si et seulement si chaque plate-forme d'Escher ne contient qu'une plate-forme.
2. On suppose qu'il existe au moins un circuit d'Escher. Écrire un algorithme en temps $O(n+m)$ qui renvoie un circuit élémentaire d'Escher.

[1] Si ça vous pose problème, imaginez que ce sont des escalators très très rapides.

Solution:

1. *Circuit de taille n implique composante connexe de taille au moins n.*
2. *Parcours en profondeur avec couleur. Si on retombe sur un nœud déjà colorié avec la même couleur, on a un circuit et il est élémentaire par construction. Si on termine sans trouver de circuit, on recommence sur les nœuds restants (qui étaient non atteignables) avec une autre couleur.*

Exercice 2 On note $P_i, 1 \leq i \leq k$, les plates-formes d'Escher. On considère la maison du voisin d'Escher qui possède k plates-formes notées p_i. Il y a un escalier (descendant) entre deux plates-formes p_i et p_j si et seulement si il existe un escalier entre une plate-forme de P_i et une de P_j, $i \neq j$.

1. Montrer qu'il n'y a pas de circuit d'Escher dans la maison du voisin.
2. Donner un algorithme de construction de la maison du voisin en temps linéaire.

Solution:

1. *S'il y avait un circuit, le tout formerait une grosse composante connexe.*
2. *Décomposition en composantes connexes du Cormen (ou du cours), puis parcours simple du graphe en ajoutant les bonnes arêtes.*

Exercice 3 Une maison est à deux étages si on peut partitionner l'ensemble des plates-formes en deux parties de telle manière qu'il n'existe des escaliers (qu'on peut monter et descendre cette fois) qu'entre un étage et l'autre.

1. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) la maison est à deux étages ;
   (b) il n'y a pas de cycle d'Escher de longueur impaire ;
   (c) il n'y a pas de cycle élémentaire d'Escher de longueur impaire.
2. Écrire un algorithme de reconnaissance des maisons à deux étages. Évaluer la complexité de cet algorithme.

Solution:

1. *$a \Rightarrow b$: par contraposée (on ne peut pas colorier un cycle de longueur impaire avec deux couleurs or biparti = 2-colorable) ; $b \Rightarrow a$: supposons qu'on n'a pas de cycle de longueur impaire. On fait un parcours en répartissant les sommets dans les deux groupes. Supposons qu'on n'y arrive pas, c'est qu'on est arrivé à un nœud x qui a un voisin déjà placé dans la même partie que lui. Puisque ce voisin est déjà placé, c'est qu'il est dans la même partie connexe et donc il y a un chemin de x à y. Comme on n'a jamais eu de problème jusqu'à présent, tous les nœuds de ce chemins sont en alternance dans les deux parties. Donc ce chemin est de taille paire et donc ce chemin augmenté de xy est un cycle de longueur impaire. Contradiction. $b \Rightarrow c$: trivial; $c \Rightarrow b$: par la contraposée, soit un cycle c de longueur impaire qui soit minimale. Supposons qu'il ne soit pas élémentaire, alors il existe un sommet x tel que $c = x_1, x_2, \ldots x_i = x, \ldots x_j = x, \ldots x_k$ avec $i < j$. Alors on peut construire deux cycles $c_1 = x_1, \ldots x_i, x_{j+1}, \ldots x_k$ et $c_2 = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$. Or $|c| = |c_1| + |c_2|$ donc l'un deux deux est de taille impaire et strictement plus petite que $|c|$ ce qui contredit la minimalité de c donc c est élémentaire.*
2. *On essaie de colorier le graphe avec deux couleurs par un parcours en largeur, à chaque étage sa couleur. En cas de conflit, c'est pas biparti.*

2 Prenez des claques (les vôtres)

Exercice 4 On considère un graphe $G = (X, E)$ non orienté et sans boucles. Une *clique* de G est un sous-graphe complet. Une clique K est maximale si elle est maximale par inclusion : $\forall x \in X - K, K \cup \{x\}$ n'est pas une clique. Ne pas confondre clique maximale et clique de taille maximale.

1. Donner un algorithme de calcul d'une clique maximale. Quelle est sa complexité ? Pouvez-vous faire en $O(n + m)$?
2. Modifier l'algorithme précédent pour chercher deux sommets à distance 2 dans un graphe connexe non complet.
3. Proposer une méthode différente pour rechercher deux sommets à distance 2.

Solution:

1. *On part d'un point o. On étiquette tous ses voisins avec le nombre $n = 1$ (on peut supposer que tous les autres sont étiquettés 0). Ces voisins forment la liste L. $\{o\}$ est la clique initiale K. Rajouter un sommet : soit $x \in L$, on rajoute x à K et on parcours tous ses voisins : ceux qui sont étiquettés n sont réétiquettés $n + 1$ et forment la nouvelle liste L. On s'arrête quand L est vide. K est alors maximale.*
2. *On part de o, on construit une clique maximale K contenant o. Soit $x \notin K$ voisin de K. x est à distance 2 de tout $y \in K$ tel que $xy \notin E$. Comme le graphe est connexe et non complet, on est sur de l'existance d'un tel x.*
3. *On part de o, on construit $N(o)$ les voisins de o, et $N(N(o))$ les voisins de $N(o)$. Soit $V = N(N(o)) - N(o) - \{o\}$. Si $V \neq \emptyset$, tout $v \in V$ est à distance 2 de o.*

Notes de fin de TD

Dans la vraie vie, un circuit [élémentaire] d'Escher est un *circuit [élémentaire]* dans un *graphe orienté*, une plate-forme d'Escher est une *composante fortement connexe* et une maison à deux étages est un *graphe biparti*.