Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°5
Graphes Eulériens

1 Échauffement

Définition 1 *On appelle* cheminement maximal *d'origine x toute chaîne de la forme $\mu = (x, \ldots, y)$ telle que toutes les arêtes incidentes à y sont dans μ, i.e. on ne peut plus prolonger la chaîne à partir de y.*

Exercice 1 Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, dont tous les sommets ont un degré pair. Montrer que tout cheminement maximal est un cycle.

Exercice 2 On considère un graphe connexe $G = (X, E)$ et un cycle ν de ce graphe. Montrer que toutes les composantes connexes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ de $G - \nu$ (on retire les arêtes, pas les sommets) ont chacune un sommet en commun avec ν.

2 Tourisme

Un ancien L3If arrive en touriste dans une grande ville. Il a noté toutes les rues qu'il voudrait parcourir avant de partir. Il aimerait passer une et une fois seulement par chacune de ces rues.

Se creusant la mémoire pour retrouver ses anciens cours de graphe, il se souvient que ce dont il a besoin ici est de trouver un cycle *eulérien*.

Flash Back 1 *Un cycle eulérien est un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe. Un graphe connexe est dit eulérien s'il existe un cycle eulérien.*

Exercice 3 Montrer que G est eulérien si et seulement si $\forall\, x \in X,\ d(x)$ est pair.

Exercice 4 En déduire un algorithme qui teste si un graphe est eulérien, et construit un cycle eulérien le cas échéant.

Exercice 5 Quelle structure de données utiliser afin d'obtenir un algorithme en $O(n + m)$

Exercice 6 Après vérification, notre ancien L3If s'aperçoit que son graphe possède exactement 2 sommets de degré impair. Il ne peut donc pas trouver de cycle eulérien...

- Mais peut-il passer une fois et une seule par chaque arête quand même ?
- Et si il y avait plus de sommets de degré impair ?

Exercice 7

Notre L3IF arrive devant un ancien édifice. Chaque pièce est reliée à une pièce adjacente par une porte possédant une ornementation *magnifique*, il serait dommage de ne pas toutes les emprunter. Chaque pièce possède également une porte de sortie sur chacune de ses façades. Est-ce possible d'emprunter chaque porte une fois et une seule ?

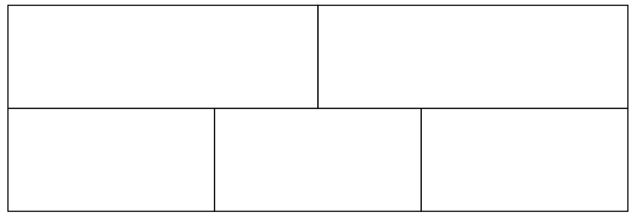

FIG. 1 – Dessine moi un chemin...

3 Mais que fait l'arbitre ?

Un graphe connexe est dit arbitrairement eulérien en x si tout cheminement maximal d'origine x est un cycle eulérien.

Exercice 8 Montrer que G est arbitrairement eulérien en x si et seulement si G est eulérien et tout cycle de G passe par x.

Exercice 9 Si F est une forêt où chaque arbre a au moins deux sommets et si x est un sommet n'appartenant pas à F, montrer qu'en joignant par une arête x à tous les sommets de degré impair de F on obtient un graphe arbitrairement eulérien en x. La réciproque est-elle vraie ?

Notes de fin de TD

On peut remarquer que les résultats des questions 3 et 6 s'étendent sans problème aux multigraphes.