Algorithmique II
Année 2006-2007

Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°6

Zoo Graphes

1 Animaux

Exercice 1 Un graphe $G = (X, E)$ non orienté est un graphe *scorpion* s'il existe trois sommets x, y, et z, tel que
- $d(x) = 1$ (x est le dard)
- $d(y) = 2$ et $xy \in E$ (y est la queue)
- $d(z) = n - 2$ et $yz \in E$ (z est la tête)

Les autres sommets constituent le corps.

1. Quels sont les nombres minimum et maximum d'arêtes d'un graphe scorpion à n sommets ?
2. Montrer que s'il existe trois sommets a, b, et c tel que $ab \in E$, $bc \in E$, $d(a) = 1$, $d(b) = 2$ et $d(c) \neq n-2$ alors le graphe n'est pas scorpion.
3. En déduire un algorithme en $O(n)$ pour reconnaître les graphes scorpions.

2 Gestion du zoo

Exercice 2 Le constructeur d'un zoo veut pouvoir organiser des circuits de visites de son zoo. Ce qu'il cherche en fait, c'est que chaque allée du zoo soit parcourue par deux circuits différents (allées disjointes) de longueurs quelconques.

Montrer que s'il arrive à faire cela, alors il faudra barrer au moins 3 allées pour isoler une partie du zoo.

Exercice 3 Panique au zoo (un autre) ! ! ! Les animaux se sont échappés. Avant de pouvoir les attraper pour les remettre en cage, il faut commencer par les isoler. Le directeur du zoo dispose encore d'éléphants dociles afin de bloquer soit les allées, soit les carrefours, et d'isoler 2 zones. Mais ne disposant pas de beaucoup d'éléphants, il veut minimiser le nombre qu'il doit déployer. (*Note : On ne cherche pas ici à avoir 2 zones de même taille*).

1. Est-il préférable de placer les éléphants sur les allées, ou sur les carrefours ? Y-a-t'il un cas où la différence est flagrante ?
2. Le directeur réalise que chaque carrefour relie exactement 3 allées. Y-a-t'il encore une différence entre placer les éléphants sur les allées ou sur les carrefours ?

3 Échauffement de partiel

Exercice 4 Soit $T = (X, E)$ un arbre, on appelle *ensemble dominant* de T une partie $S \subset X$ vérifiant :

$$\forall x \in X, \exists y \in S \text{ tel que } x = y \text{ ou } xy \in E$$

On va chercher à trouver un ensemble dominant de cardinal minimum.

1. Montrer qu'il existe toujours un ensemble dominant de cardinal minimum ne contenant aucune feuille de T.
2. Un élève imagine l'algorithme suivant.
   Montrer que cet algorithme ne fournit pas toujours un ensemble dominant de cardinal minimum.

$S \leftarrow \emptyset, F \leftarrow T$;
tant que F *contient un sommet* x *de degré 1* **faire**
  $y = \Gamma(x)$;
  $S \leftarrow S \cup \{y\}$;
  $F \leftarrow F - \Gamma(y) - \{y\}$;
fin
si $F \neq \emptyset$ **alors**
  ajouter tous les sommets restants (isolés) de F à S;
fin
Retourner S;

3. Décrire un algorithme le plus efficace possible pour calculer un ensemble dominant S de cardinal minimum. (*Note : On peut le faire en* $O(n)$).

Exercice 5 Dans cet exercice, $G = (X, E)$ est un graphe connexe dont les arêtes sont munies d'une valuation p strictement positive, et $T = (X, F)$ est un arbre couvrant de poids minimum. Le but ici sera de calculer le second arbre couvrant de poids minimum T'.

1. Montrer qu'il existe un T' de la forme $T - \{e\} + \{f\}$, avec $e \in F, f \in E \backslash F$.
2. Étant donné un sommet x fixé, donner un algorithme en $O(n)$ calculant pour tout $y \in X - \{x\}$ l'arête zt de poids maximum sur l'unique chaîne de T reliant x à y. Le résultat sera stocké dans un tableau de taille n, arête[y] contiendra zt. Justifier la complexité de l'algorithme.
3. On appelle T_x un arbre recouvrant de plus petit poids de la forme $T_x = T - \{e\} + \{f\}$, où $e \in F$ et $f = xy \in E \backslash F$. Donner un algorithme en $O(n)$ calculant T_x et justifier la complexité.
4. En déduire un algorithme calculant T'. Quelle est la complexité ?