Florent Bouchez
Jean-François Pineau

TD n°6
Zoo Graphes

1 Animaux

Exercice 1 Un graphe $G = (X, E)$ non orienté est un graphe *scorpion* s'il existe trois sommets x, y, et z, tel que
- $d(x) = 1$ (x est le dard)
- $d(y) = 2$ et $xy \in E$ (y est la queue)
- $d(z) = n - 2$ et $yz \in E$ (z est la tête)

Les autres sommets constituent le corps.

1. Quels sont les nombres minimum et maximum d'arêtes d'un graphe scorpion à n sommets ?
2. Montrer que s'il existe trois sommets a, b, et c tel que $ab \in E$, $bc \in E$, $d(a) = 1$, $d(b) = 2$ et $d(c) \neq n-2$ alors le graphe n'est pas scorpion.
3. En déduire un algorithme en $O(n)$ pour reconnaître les graphes scorpions.

Solution:

1. *On a un nombre maximum d'arêtes si le corps forme une clique de taille $n - 2$. Le nombre maximum d'arêtes est $1 + 1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Au minimum, seuls x, y et z ont des arêtes, ce qui donne $n - 1$ arêtes.*
2. *Montrons le par l'absurde. Supposons qu'il existe un graphe G ayant de tels sommets a, b, et c, qui soit scorpion. Alors il admet un sommet z tel que $d(z) = n - 2$. Or,*
   - *$z \neq c$ car $d(c) < n - 2$,*
   - *$d(a) = 1$ et $ab \in E$ impliquent que $za \notin E$.*
   - *$d(b) = 2$ et $ab \in E, bc \in E$ impliquent que $zb \notin E$.*

   donc $d(z) < n - 2$, ce qui est une contradiction.

pour $x \in X, d(x) = 1$ //test en temps $O(1)$ **faire**
    $y \leftarrow \Gamma(x)$;
    si $d(y) = 2$ //test en temps $O(2)$ **alors**
        $z \leftarrow \Gamma(y) - \{x\}$;
        si $d(z) = n - 2$ //test en temps $O(n)$, mais ne se fait qu'une fois **alors**
            renvoyer Vrai;
        sinon
            renvoyer Faux;
        fin
    fin
fin
Renvoyer Faux;

3.

2 Gestion du zoo

Exercice 2 Le constructeur d'un zoo veut pouvoir organiser des circuits de visites de son zoo. Ce qu'il cherche en fait, c'est que chaque allée du zoo soit parcourue par deux circuits différents (allées disjointes) de longueurs quelconques.

Montrer que s'il arrive à faire cela, alors il faudra barrer au moins 3 allées pour isoler une partie du zoo.

Solution:

Première Solution : *Soit* $G = (X, E)$ *le graphe représentant le zoo. Soit* $(x, y) \in X$, *et* μ *un chemin de* x *à* y. *Soit* $(e_1, e_2) \in E$, $e_1 = (u_1, v_1), e_2 = (u_2, v_2)$.

- $(e_1, e_2) \notin \mu$ *: alors* x *et* y *reste dans la même composante connexe de* $G \backslash \{e_1, e_2\}$
- $e_1 \in \mu, e_2 \notin \mu$ *: Par hypothèse, il existe 2 chemins arêtes disjointes* p_1 *et* $p_2 \neq \{e_1\}$ *reliant* u_1 *à* v_1.
  1. *Si* $e_2 \in p_1$, *alors* $\mu_{x \leftarrow u_1}.p_2.\mu_{v_1 \leftarrow y}$ *est un chemin de* x *à* y.
  2. *Sinon,* $\mu_{x \leftarrow u_1}.p_1.\mu_{v_1 \leftarrow y}$
- *Si* e_1 *et* $e_2 \in \mu$ *: on trouve* p_1 *de* u_1 *à* v_1 *ne contenant pas* e_2, *et* p_2 *de* u_2 *à* v_2 *ne contenant pas* e_1. *Alors, le chemin* $\mu_{x \leftarrow u_1}.p_1.\mu_{v_1 \leftarrow u_2}.p_2.\mu_{v_2 \leftarrow y}$ *est un chemin reliant* x *à* y *dans* $G \backslash \{e_1, e_2\}$.

Comme le choix de x *et* y *est quelconque,* $G - \{e_1, e_2\}$ *reste connexe.*

Deuxième Solution : *Soit* S *un sous-ensemble quelconque de* X, $S \neq X, S \neq \emptyset$. *Montrons qu'il faut couper plus de 3 arêtes pour séparer* S *de* $X \backslash S$. *Comme* S *contient au moins un sommet, et que le graphe est connexe, il y a au moins une arête entre* S *et* $X \backslash S$. *Soit* $e = (u, v)$ *une telle arête. Par hypothèse, il existe donc deux chemins* p_1 *et* p_2, *arêtes disjointes entre* u *et* v. *Soit* (u_1, v_1) *et* (u_2, v_2) *les arêtes respectives de* p_1 *et* p_2 *passant d'un sommet de* S *à un sommet de* $X \backslash S$. *Par hypothèse, elles sont différentes de* e, *donc il existe 3 arêtes connectant* S *à* $G \backslash S$.

Exercice 3 Panique au zoo (un autre) ! ! ! Les animaux se sont échappés. Avant de pouvoir les attraper pour les remettre en cage, il faut commencer par les isoler. Le directeur du zoo dispose encore d'éléphants dociles afin de bloquer soit les allées, soit les carrefours, et d'isoler 2 zones. Mais ne disposant pas de beaucoup d'éléphants, il veut minimiser le nombre qu'il doit déployer. (*Note : On ne cherche pas ici à avoir 2 zones de même taille*).

1. Est-il préférable de placer les éléphants sur les allées, ou sur les carrefours ? Y-a-t'il un cas où la différence est flagrante ?

   Solution:
   Soit $G = \{X, E\}$ *un graphe. On note :*

$$k(G) = \min\{|S|, S \subseteq X \text{ tel que } G - S \text{ non connexe}\}$$

$$k'(G) = \min\{|F|, F \subseteq E \text{ tel que } G - F \text{ non connexe}\}$$

   Soit $F \subseteq E$ *de cardinal minimum qui déconnecte* G. *Si* G *n'est pas une clique, soit* x *et* y *à distance supérieure ou égale à 2 déconnecté par* F *(Si ce n'est pas le cas, alors tous les éléments d'une composante connexe sont reliés aux éléments de l'autre, ce qui représente au moins* $n - 1$ *arêtes. Or,* G *n'est pas une clique, donc il existe un sommet de degré au plus* $n - 2$, *qu'il suffit de déconnecter pour avoir un ensemble* F' *de cardinal inférieur, ce qui entraine une contradiction).*
   $\forall e = (u, v) \in F$, *on note :*

$$\nu(e) = \begin{cases} u & \text{si } v = x \text{ ou } y. \\ v & \text{si } u = x \text{ ou } y. \\ u & \text{sinon} \end{cases}$$

   et $S = \{\nu(e), e \in F\}$. *Alors* $|S| \leq |F|$, *et* S *déconnecte* x *et* y. *Donc* $k(G) \leq |S| \leq k'(G)$.

2. Le directeur réalise que chaque carrefour relie exactement 3 allées. Y-a-t'il encore une différence entre placer les éléphants sur les allées ou sur les carrefours ?

   Solution:
   Soient $S \subseteq V$ qui réalise $k(G)$, et A et B 2 composantes connexes de $G - S$. $S = \Gamma(A) = \Gamma(B)$. Soit $x \in S$, et $\nu(x)$ l'arête de x à A si x n'a qu'un voisin dans A, l'arête de x à B sinon (G est 3-régulier). Alors $|F| \leq |S|$. Soit μ de a à b, $a \in A$, $B, \in B$. $\exists x \in S \cap \mu$. $\nu(x) \in \mu$ donc μ est déconnecté par F. μ étant quelconque, $k'(G) \leq k(G)$.

3 Échauffement de partiel

Exercice 4 Soit $T = (X, E)$ un arbre, on appelle *ensemble dominant* de T une partie $S \subset X$ vérifiant :

$$\forall x \in X, \exists y \in S \text{ tel que } x = y \text{ ou } xy \in E$$

On va chercher à trouver un ensemble dominant de cardinal minimum.

1. Montrer qu'il existe toujours un ensemble dominant de cardinal minimum ne contenant aucune feuille de T.

   Solution:
   Si $|X| \leq 3$, les feuilles ne sont pas reliées entre elles. Soient S dominant, F l'ensemble des feuilles de S, et F' l'ensemble des voisins de F. Alors $S' = (S \backslash F) \cup F'$ est dominant.
   Supposons $x \in X$ dominé par $y \in S$, alors
   – soit y n'est pas une feuille, donc $y \in S'$
   – soit y est une feuille, donc soit $x = y$, et x est dominé par $\Gamma(y) \in S'$, soit $x = \Gamma(y) \in S'$.
   De plus $|F'| \leq |F|$ donc $|S'| \leq |S|$.
2. Un élève imagine l'algorithme suivant.
   Montrer que cet algorithme ne fournit pas toujours un ensemble dominant de cardinal minimum.

$S \leftarrow \emptyset, F \leftarrow T$;
tant que F *contient un sommet x de degré 1* **faire**
    $y = \Gamma(x)$;
    $S \leftarrow S \cup \{y\}$;
    $F \leftarrow F - \Gamma(y) - \{y\}$;
fin
si $F \neq \emptyset$ **alors**
    ajouter tous les sommets restants (isolés) de F à S;
fin
Retourner S;

   Solution:
   Exemple du graphe scorpion de taille minimal.
3. Décrire un algorithme le plus efficace possible pour calculer un ensemble dominant S de cardinal minimum. (*Note : On peut le faire en $O(n)$*).

   Solution:

```
S ← ∅ //ensemble des dominants;
D ← ∅ //ensemble des dominés;
F ← T;
tant que ∃x feuille de F faire
    si x ∈ S alors
        D ← D ∪ Γ(x);
    fin
    si x ∉ D ∪ S alors
        S ← S ∪ Γ(x);
    fin
    F ← F\{x};
fin
```

Exercice 5 Dans cet exercice, $G = (X, E)$ est un graphe connexe dont les arêtes sont munies d'une valuation p strictement positive, et $T = (X, F)$ est un arbre couvrant de poids minimum. Le but ici sera de calculer le second arbre couvrant de poids minimum T'.

1. Montrer qu'il existe un T' de la forme $T - \{e\} + \{f\}$, avec $e \in F, f \in E \backslash F$.
2. Étant donné un sommet x fixé, donner un algorithme en $O(n)$ calculant pour tout $y \in X - \{x\}$ l'arête zt de poids maximum sur l'unique chaîne de T reliant x à y. Le résultat sera stocké dans un tableau de taille n, arête[y] contiendra zt. Justifier la complexité de l'algorithme.
3. On appelle T_x un arbre recouvrant de plus petit poids de la forme $T_x = T - \{e\} + \{f\}$, où $e \in F$ et $f = xy \in E \backslash F$. Donner un algorithme en $O(n)$ calculant T_x et justifier la complexité.
4. En déduire un algorithme calculant T'. Quelle est la complexité ?