Algorithmique I
Année 2008-2009

A. Benoit, B. Depardon
C. Mouilleron, C. Rezvoy

TD n^{o}13 Méthode du mille-feuille

1 Couverture par sommets

Nous considérons ici le problème de la couverture par sommets : étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et une fonction de poids sur les sommets $w : V \to \mathbb{Q}+$, trouver $S \subseteq V$ de poids minimum qui couvre les arêtes (c'est à dire $\forall\ e \in E, \exists\ s \in S : s \in e$). En cours, nous avons vu une 2-approximation dans le cas où w est constante. Nous allons étudier ici une 2-approximation dans le cas général. Pour ce faire nous nous intéressons à un type de fonction de poids particulier : les fonctions de poids par degré. w est une fonction de poids par degré si $\exists c > 0, \forall v \in V : w(v) = c\cdot deg(v)$.

Question 1.1 Soit $\{G = (V, E), w\}$ une instance du problème telle que w est une fonction de poids par degrés. Montrer que $w(V) \leq 2\cdot OPT$ où $w(V) = \sum_{v \in V} w(v)$.

On sait donc traiter les instances avec une fonction de poids par degrés. La méthode du mille-feuille consiste alors à décomposer une instance quelconque en une famille d'instances avec fonction de poids par degrés.

Question 1.2 À chaque étape de la décomposition, on cherche la plus grande fonction de poids par degrés p inférieure à w. Expliquer comment calculer p.

L'algorithme du mille-feuille est le suivant :

Données :

$G = (V, E)$;

une fonction de poids quelconque w;

début

$t \leftarrow 0$;

$G_0 \leftarrow G$;

$w_0 \leftarrow w$;

tant que G_t *contient une arrête* **faire**

$D_t \leftarrow u \in V_t : deg_t(u) = 0$;

$p_t \leftarrow$ plus grande fonction de poids par degrés inférieure à w_t dans G_t;

$S_t \leftarrow u \in V_t : p_t(u) = w_t(u)$;

$G_{t+1} \leftarrow G_t \setminus (D_t \cup S_t)$;

$w_{t+1} \leftarrow w_t - p_t$;

$t \leftarrow t = 1$;

fin

retourner $C = \bigcup_{k=0}^{t-1} S_k$

fin

Question 1.3 Montrer que l'algorithme termine en temps polynomial.

Question 1.4 Montrer que l'ensemble C de sommets retournés par l'algorithme est bien une couverture.

Question 1.5 Pour tout $v \in C$, exprimer $w(v)$ en fonction des poids par degrés p_k. Qu'en est-il pour $v \notin C$?
Remarque : on pourra poser $p_k(u) = 0$ pour tout sommet $u \notin G_t$.

À partir de maintenant, on notera C^* une couverture par sommets optimale pour l'instance de départ $\{G = (V, E), w\}$.

Question 1.6 Pour toute étape i de l'algorithme, comparer $p_i(C \cap G_i)$ et $p_i(C^* \cap G_i)$.
Indication : on remarquera que $C \cap G_i$ et $C^* \cap G_i$ sont deux couvertures par sommets de G_i.

Question 1.7 Montrer que l'algorithme est une 2-approximation du problème de la couverture par sommet minimum avec des poids arbitraires. Trouver un exemple où l'algorithme renvoie effectivement une solution de poids $2.OPT$.