A. Benoit, B. Depardon
C. Mouilleron, C. Rezvoy

TD n°5

1 Du pétrole et des idées

Le professeur Robert Ive est consultant pour une compagnie pétrolière qui projette de construire un grand oléoduc en ligne droite d'Est en Ouest à travers un champ pétrolier. À partir de chaque puits un raccordement doit être connecté directement sur l'oléoduc principal suivant le plus court chemin. Connaissant les coordonnées des puits, comment le professeur trouvera-t'il l'emplacement idéal de l'oléoduc principal qui minimise la longueur totale des raccordements ?

2 Médian pondéré

Soient n éléments distincts $x_1, ..., x_n$ de poids positifs $p_1, ..., p_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Le *médian pondéré (inférieur)* est l'élément x_k satisfaisant :

$$\sum_{x_i < x_k} p_i < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{x_i > x_k} p_i \leq \frac{1}{2}$$

Question 2.1 Démontrer que le médian de $x_1, ..., x_n$ est le médian pondéré des x_i affectés des poids $p_i = 1/n$ pour i compris entre 1 et n.

Question 2.2 Comment calculer *simplement* le médian pondéré de n éléments. Donner la complexité en comparaisons et en additions.

Question 2.3 Comment calculer le médian pondéré en temps linéaire dans le pire des cas.

3 Le problème de l'emplacement du bureau de poste

Considérons un espace métrique (E, d). Soient n éléments distincts $x_1, ..., x_n$ de poids respectifs $p_1, ..., p_n$ tels que

$$\forall i,\ p_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

On souhaite trouver un point x (qui n'est pas nécessairement un des x_i) qui minimise $\sum_{i=1}^{n} p_i d(x, x_i)$.

Question 3.1 **Cas de la dimension 1 :** (E, d) est l'ensemble des réels muni de la distance usuelle. Montrer que le médian pondéré est une des solutions optimales.

Question 3.2 **Cas de la dimension 2 :** (E, d) est le plan muni de la distance 1, ou *distance Manhattan*, c'est à dire :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Résoudre l'énoncé qui s'appelle dans ce cas «problème du bureau de poste».

4 Tri par tas

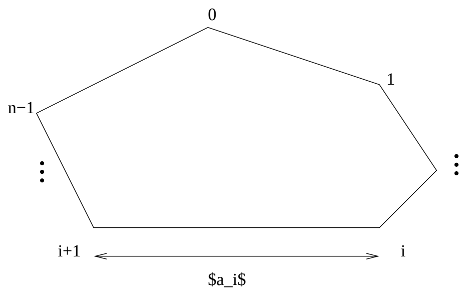
Le tri par tas est réalisé en deux étapes : insertion des n éléments dans le tas, puis déconstruction du tas en extrayant à chaque fois le plus petit élément.

La construction du tas se fait en $O(n \log n)$, et la suppression des éléments du tas se fait également en $O(n \log n)$.

Il est possible d'améliorer la complexité de la construction du tas, elle peut se faire en $O(n)$ (cependant la suppression des n éléments du tas reste en $O(n \log n)$). Proposez un algorithme pour construire le tas en temps linéaire.

5 Division du périmètre d'un polygone

On considère un polygone à n sommets, numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre de 0 à $n-1$. La suite des longueurs des côtés est $\{a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, comme représenté dans la figure ci-dessous.



Question 5.1 On cherche tout d'abord à déterminer les deux indices i, j qui minimisent la valeur absolue de la différence entre les deux portions de périmètre qu'ils déterminent, i.e., qui minimisent (sommations modulo n) :

$$|(\sum_{l=i}^{j-1} a_l) - (\sum_{l=j}^{i-1} a_l)|$$

5.1.1 Donner un algorithme naïf et calculer sa complexité.

5.1.2 Proposer une solution en temps linéaire.

Question 5.2 Trouver en temps linéaire trois indices i, j, k qui minimisent la différence entre le plus grand "tiers" et le plus petit "tiers" qu'ils déterminent $(\max(\sum_{l=i}^{j-1} a_l, \sum_{l=j}^{k-1} a_l, \sum_{l=k}^{i-1} a_l) - min(\sum_{l=i}^{j-1} a_l, \sum_{l=j}^{k-1} a_l, \sum_{l=k}^{i-1} a_l))$. Pouvez vous généraliser pour la découpe en k portions ?