



FIG. 1 – Cube connecté en cycle de taille 3.

Réseaux d'interconnexion

1 Anneaux - rotations de Givens

Pour triangulariser une matrice A d'ordre n de façon numériquement stable, on peut utiliser les rotations de Givens. L'opération de base $\text{ROT}(i, j, k)$ consiste à combiner les deux lignes i et j , qui doivent toutes deux commencer par $k - 1$ zéros, pour annuler l'élément en position (j, k) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}'_{i,k} & a'_{i,k+1} & \dots & a'_{i,n} \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & a'_{j,k+1} & \dots & a'_{j,n} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}_{i,k} & a_{i,k+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{a}_{j,k} & a_{j,k+1} & \dots & a_{j,n} \end{pmatrix}$$

3p Nous laissons au lecteur le soin de déterminer l'angle θ permettant d'effectuer cette opération. :-)
L'algorithme séquentiel peut s'écrire :

```
GIVENS(A)
1:  Pour  $k = 1$  to  $n - 1$  :
2:    Pour  $i = n$  downto  $k + 1$  step  $-1$  :
3:      ROT( $i - 1, i, k$ )
```

On considère qu'une rotation $\text{ROT}(i, j, k)$ s'exécute en temps unité, indépendamment de k .

▷ **Question 1** Mettre en œuvre cet algorithme sur un réseau linéaire de n processeurs.

▷ **Question 2** Mettre en œuvre cet algorithme sur un réseau linéaire comportant seulement $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ processeurs.

2 Tores, hypercubes et arbres binaires

▷ **Question 3** Quelles différences peut-on trouver entre un hypercube de dimension 6 et un tore 3D de taille $4 \times 4 \times 4$?

▷ **Question 4** Peut-on plonger un arbre binaire complet à $2^n - 1$ sommets dans une grille 2D de taille $r \times r$ à déterminer ?

3 Cycles connectés en cube

Un réseau $CCC(m)$ est obtenu en remplaçant chaque processeur d'un hypercube de dimension m par un anneau de m processeurs, et en connectant chaque processeur de l'anneau dans une dimension de l'hypercube (voir figure 1).

▷ **Question 5** Quel est le nombre de processeurs de $CCC(m)$? Donner une définition formelle de $CCC(m)$ et une majoration simple de son diamètre.

▷ **Question 6** Montrer que le diamètre de $CCC(m)$ est exactement $D = 2m - 2 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ si $m > 3$, et est égal à 6 si $m = 3$.

4 Transposition d'une matrice

On veut concevoir un algorithme parallèle pour la transposition d'une matrice $n \times n$. On suppose la matrice stockée de manière distribuée dans les processeurs. On supposera que les différents liens de communication sont bidirectionnels et peuvent être utilisés de manière simultanée.

- ▷ **Question 7** *Proposer une solution sur un anneau de p processeurs et donner sa complexité (on suppose que la distribution est monodimensionnelle).*
- ▷ **Question 8** *Proposer une solution sur une grille torique de $p = q \times q$ processeurs et donner sa complexité (on suppose que la distribution est bidimensionnelle).*
- ▷ **Question 9** *Proposer une solution sur un hypercube de $p = 2^m$ processeurs et donner sa complexité (on suppose que la distribution est bidimensionnelle).*