

Réseaux d'interconnexion – 2

1 REM

Un Réseau Échange-Mélange (REM) avec $p = 2^r$ processeurs est défini comme suit :

(i) numéroter les processeurs de 0 à $p - 1$ et les écrire en binaire sur r bits :

$$q = b_{r-1}b_{r-2} \dots b_2b_1b_0 \text{ avec } b_i \in \{0, 1\} \text{ pour } 0 \leq i \leq r - 1$$

(ii) pour $q = b_{r-1}b_{r-2} \dots b_2b_1b_0$, définir :

$$\begin{aligned} rot(q) &= b_0b_{r-1}b_{r-2} \dots b_2b_1 \\ exch(q) &= b_{r-1}b_{r-2} \dots b_2b_1(1 - b_0) \end{aligned}$$

(iii) pour tout q , $0 \leq q \leq p - 1$, relier q à $rot(q)$ et à $exch(q)$ par des arcs orientés.

▷ **Question 1** Dessiner un REM à 2^4 processeurs (en regroupant les nœuds par paires, puis par motif).

▷ **Question 2** Proposer un algorithme de routage d'un processeur à un autre dans un REM. Quel est le diamètre d'un REM à 2^r processeurs ?

2 Réseaux reconfigurables

Un réseau ■ butterfly ■ de dimension r , noté $BUT(r)$, est un réseau composé de $(r + 1)2^r$ nœuds organisés en 2^r lignes de $r + 1$ niveaux. Un nœud est désigné par une paire (w, i) où w est un entier codé en représentation binaire sur r bits qui numérote la ligne du nœud, et où i numérote le niveau du nœud ($0 \leq i \leq r$). Deux nœuds (w, i) et (w', i') sont reliés par un arc si et seulement si $i' = i + 1$ et l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- $w = w'$
- w et w' ne diffèrent que par le i -ème bit.

La figure 1, représente $BUT(3)$.

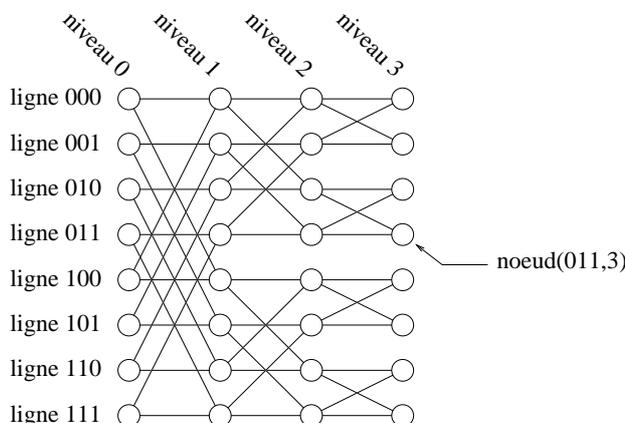


FIG. 1 – $BUT(3)$, le réseau butterfly de dimension 3.

▷ **Question 3** Quelle est l'architecture du réseau obtenu lorsque l'on regroupe les nœuds d'une même ligne en un seul nœud (et que l'on enlève les arcs redondants) ?

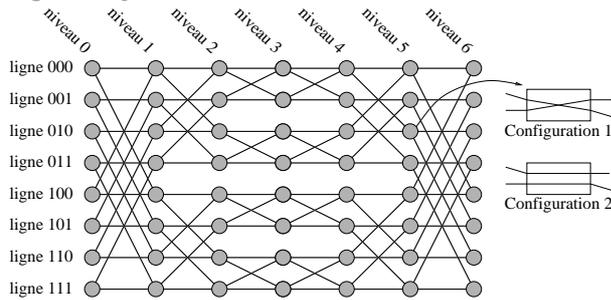


FIG. 2 – Le réseau de Benes de dimension 3

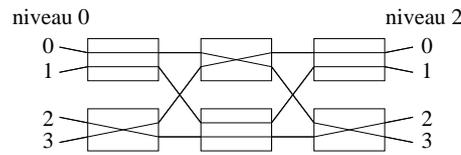


FIG. 3 – Une configuration du réseau de Benes de dimension 1

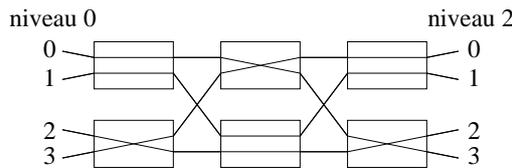


FIG. 4 – Configuration du réseau de Benes de dimension 1.

▷ **Question 4** Le réseau butterfly a une structure récursive. Donner deux moyens d’obtenir deux réseaux butterfly de dimension $r - 1$ à partir d’un réseau butterfly de dimension r .

▷ **Question 5** Montrer qu’il existe un unique chemin de longueur r entre un nœud $(w, 0)$ du niveau 0 et un nœud (w', r) du niveau r . Quel est le diamètre de $BUT(r)$?

Un réseau de Benes de dimension r est composé de deux réseaux butterfly mis dos à dos. Les nœuds des niveaux r de chaque butterfly sont fusionnés : chaque niveau comprend alors $2r + 1$ nœuds sur un même niveau. La figure 2 montre un réseau de Benes de dimension 3. On supposera ici que les nœuds du réseau sont uniquement des commutateurs 2×2 , pouvant être configurés en croix ou en lignes parallèles pour transmettre les données.

▷ **Question 6** Montrer (par récurrence sur la dimension r du réseau) que le réseau de Benes peut être configuré pour réaliser une permutation arbitraire : étant donné une permutation quelconque π des 2^{r+1} premiers entiers (de 0 à $2^{r+1} - 1$), il existe une configuration des commutateurs qui permet de connecter simultanément l’entrée i du réseau à sa sortie $\pi(i)$. Par exemple, figure 4 est représentée une configuration des commutateurs d’un réseau de Benes de dimension 1 réalisant la permutation $\pi = (0, 1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2, 0)$.

3 Réduction sur un anneau

On dispose de p fichiers F_i distribués sur un anneau unidirectionnel de p processeurs : P_i possède le fichier F_i , pour $1 \leq i \leq p$ (on pourra par exemple assimiler ces fichiers à des matrices). On dispose d’une loi associative et a priori non commutative sur ces fichiers, notée \odot (ce pourra être l’addition ou la multiplication de matrices). On souhaite calculer la réduction $F_1 \odot F_2 \odot \dots \odot F_p$, et le résultat pourra se trouver sur n’importe quel processeur de l’anneau. Le coût de communication d’un fichier sur un lien de l’anneau est c . Le coût de calcul d’une opération \odot est w .

▷ **Question 7** Dans un premier temps, on suppose que $w \ll c$ (c’est le cas par exemple pour l’addition de matrices). Donner un algorithme réalisant l’opération de réduction sur l’anneau, et calculer sa complexité.

▷ **Question 8** On s’intéresse maintenant à une opération \odot telle que $c \ll w$ (c’est le cas par exemple pour la multiplication de matrices). Proposez un algorithme de réduction adapté à ce cas, et donner sa complexité.